ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LVII 1973 4

УДК 513.74

МАТЕМАТИКА

М. А. Василян

Аффинные связности, индуцируемые оснащением гиперполосы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 12/III 1973)

1. В работах ([1-3]) нами изучалась проективная теория многомерных регулярных гиперполос. В этих работах строились инвариантные оснащения гиперполосы $H_r (r < n-1)$ проективного пространства P_n и подробно изучалась ее геометрия.

Целью настоящей работы является изучение аффинных связностей без кручения, индуцируемых на гиперполосе H_r, теми оснащениями, которые построены в упомянутых выше работах.

Напомним основные определения, введенные в работах ([1-3]), и формулы, которые нам понадобятся в дальнейшем.

К регулярной гиперполосе H_r проективного пространства P_n мы присоединяем подвижной проективный репер первого порядка. Точка A_0 этого репера описывает r-мерную базисную поверхность V_r гиперполосы H_r, его гиперплоскость α^n совпадает с опорной гиперплоскостью гиперполосы, точки A_i $(i=1,\ldots,r)$ принадлежат касательной r-плоскости к поверхности V_r, а точки $A_v (v=r+1,\ldots, n-1)$ лежат в $(n-r-1)$-мерной образующей гиперповерхности V^r_{n-1} ранга r, огибаемой гиперплоскостями α^n. В этом репере уравнения гиперполосы H_r записываются в виде:

$$\omega_0^n = 0,\ \omega_0^v = 0,\ \omega_v^n = 0. \tag{1}$$

формы $\omega^i \equiv \omega_0^i$ и ω_i^n будут базисными формами поверхностей V_r и V^r_{n-1} соответственно.

Продолжение уравнений (1) приводит нас к уравнениям:

$$\omega_i^n = a_{ij}\omega^j,\ \omega_i^v = \lambda_{ij}^v\omega^j,\ \omega_v^i = \lambda_v^{ij}\omega_j^n, \tag{2}$$

где $a_{ij}, \lambda_{ij}^v, \lambda_v^{ij}$ —симметричны по индексам i, j, а a_{ij} —основной тензор гиперполосы H_r, невырожденный в силу ее регулярности.

Продолжение первого из уравнений (2) вводит обьект λ_{ijk} симметричный по всем индексам. С помощью этих обьектов строятся новые обьекты:

$$\lambda_v = \frac{1}{r} a_{ij}\lambda^{ij}_v, \quad \lambda^v = \frac{1}{r} a^{ij}\lambda^v_{ij}, \quad t_i = \frac{1}{r+2}\lambda_{ijk}a^{jk}$$

и тензоры

$$b^v_{ij} = \lambda^v_{ij} - \lambda^v a_{ij}, \quad c^{ij}_v = \lambda^{ij}_v - \lambda_v a^{ij}, \quad l_{ijk} = \lambda_{ijk} - 3a_{(ij}t_{k)}. \tag{3}$$

2. Пусть M_r r-мерное дифференцируемое многообразие и Θ^i — его базисные формы. Если на M_r задана аффинная связность, то эти формы удовлетворяют структурным уравнениям:

$$d\Theta^i = \Theta^j \wedge \Theta^i_j + R^i_{jk}\, \Theta^j \wedge \Theta^k. \tag{4}$$

$$d\Theta^i_j = \Theta^k_j \wedge \Theta^i_k + R^i_{jke}\Theta^k \wedge \Theta^e. \tag{5}$$

где Θ^i_j — формы Пфаффа, определяющие эту связность, R^i_{jk} — ее тензор кручения, R^i_{jke} — ее тензор кривизны ([4]).

Рассмотрим гиперполосу H_r, отнесенного к реперу первого порядка. Формы ω^i являются базисными формами поверхности V_r этой гиперполосы, поэтому положим

$$\Theta^i = \omega^i. \tag{6}$$

Будем присоединять к поверхности V_r связность без кручения, поэтому положим $R^i_{jk} = 0$. Продолжая уравнения (6), получаем

$$\Theta^i_j = \omega^i_j - \delta^i_j\omega^0_0 + x^i_{jk}\omega^k, \quad (x^i_{jk} = x^i_{kj}). \tag{7}$$

Для того чтобы обьект x^i_{jk} определял связность на поверхности V_r, необходимо и достаточно, чтобы уравнения, полученные продолжением уравнения (7), имели вид (5). Отсюда следует, что при фиксированных главных параметрах обьект x^i_{jk} должен удовлетворять уравнениям

$$\overset{*}{\nabla}_\delta x^i_{jk} = a_{jk}\pi^i_n - 2\delta^i_{(j}\pi^0_{k)}, \tag{8}$$

где $\overset{*}{\nabla}_\delta$ — оператор дифференцирования в связности, определяемой формами Θ^i_j, причем

$$\overset{*}{\nabla}_\delta x^i_{jk} = \nabla_\delta\, x^i_{jk} + \pi^0_0 x^i_{jk}, \tag{9}$$

где ∇_δ — оператор ковариантного дифференцирования относительно форм ω^i_j.

Для того чтобы связность на V_r была внутренним образом связана с геометрией гиперполосы H_r нужно, чтобы объект x^i_{jk} охватывался обьектами ее фундаментальной последовательности геометрических обьектов. Можно доказать, что этот охват обьекта x^i_{jk} представляется в виде

$$x^i_{jk} = t^i_{jk} - a_{jk}\lambda^i - 2\delta^i_{(j}\lambda_{k)}, \quad (t^i_{jk} = t^i_{kj}), \tag{10}$$

где t^i_{jk} —тензор, то есть $\overset{*}{\nabla}_0 t^i_{jk} = 0$.

Аналогичным способом можно определить аффинную связность на гиперполосе H_r, рассматривая её тангенциально вырожденную гиперповерхность V^r_{n-1}.

В этом случае возникает обьект $x^{jk}_i = x^{kj}_i$, и для того чтобы связность на V^r_{n-1} была внутренним образом связана с геометрией гиперполосы H_r, этот обьект должен иметь вид:

$$x^{jk}_i = t^{jk}_i - a^{jk}\lambda_i - 2\delta^{(j}_i\lambda^{k)}, \quad (t^{jk}_i = t^{kj}_i) \tag{11}$$

где t^{jk}_i — тензор.

3. Рассмотрим геодезические линии на поверхности V_r относительно связности, определяемой на ней формами Θ^i_j. В силу (7) эти геодезические задаются уравнениями:

$$d\omega^i + \omega^j\,(\omega^i_j - \delta^i_j\,\omega^0_0 + x^i_{jk}\,\omega^k) = \Theta\omega^i. \tag{12}$$

Связность, определяемую на V_r обьектом x^i_{jk} назовем нормальной, если все соприкасающиеся плоскости ее геодезических линий, проходящих через фиксированную точку поверхности, пересекаются по прямым линиям с некоторой нормалью первого рода поверхности V_r, построенной в этой точке.

Т е о р е м а 1: *Для того чтобы связность, определяемая тензором t^i_{jk} была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы этот тензор являлся линейной, комбинацией основных тензоров a_{ij}, b^v_{ij} поверхности V_r и единичного тензора δ^i_j, имеющей вид*

$$t^i_{jk} = b^v_{jk}x^i_v + a_{jk}x^i + 2z_{(j}\delta^i_{k)}\,. \tag{13}$$

При этом соответствующая нормаль E_{n-r} поверхности V_r определяется точкой A_0 и точками $P_v = A_v - x^i_v A_i$, $P_n = A_n - \tilde{x}^i A_i$, где

$$\tilde{x}^i = x^i - \lambda^i - \lambda^v x^i_v.$$

Рассмотрим частные случаи нормальной связности. Пусть нормаль E_{n-r} проходит через образующую E_{n-r-1} гиперповерхности V^r_{n-1}, определяемую точками A_0, A_v. Тогда $x^i_v = 0$, и поэтому

$$t^i_{jk} = a_{jk}(\tilde{x}^i + \lambda^i) + 2z_{(j}\delta^i_{k)}\,. \tag{14}$$

Связность, определяемую таким тензором t^i_{jk}, назовем полувнутренней связностью поверхности V_r.

Пусть теперь нормаль E_{n-r} совпадает с инвариантной нормалью первого ряда гиперполосы H_r. Так как эта нормаль является пересечением гиперплоскостей $\mu^i = \alpha^i - \lambda^i \alpha^n$ инвариантного репера, и точки P_v, P_n должны на ней лежать, то будем иметь $x^i_v = 0$, $x^i = -\lambda^i$, и поэтому

$$t^i_{jk} = 2z_{(j}\delta^i{}_{k)}. \tag{15}$$

Такую связность назовем внутренней связностью поверхности V_r.

Рассмотрим теперь геодезические на тангенциально вырожденной гиперповерхности V^r_{n-1} относительно связности, определяемой на ней формами

$$\widetilde{\Theta}^j_i = \omega^j_i - \delta^j_i \omega^n_n + x^{jk}_i \omega^n_k. \tag{16}$$

Каждая геодезическая гиперповерхность V^r_{n-1} представляет собой однопараметрическое семейство гиперплоскостей, касательных к V^r_{n-1} и удовлетворяющих управлениям:

$$d\omega^n_i - \omega^n_j(\omega^j_i - \delta^j_i \omega^n_n + x^{jk}_i \omega^n_k) = \widetilde{\Theta}\omega^n_i. \tag{17}$$

Характеристическими плоскостями геодезических гиперповерхности V^r_{n-1} будут $(n-3)$ —плоскости, по которым пересекаются три их бесконечно близкие касательные гиперплоскости.

Связность, определяемую на гиперповерхности V^r_{n-1} объектом x^{jk}_i, назовем нормальной, если объединение любой характеристической плоскости ее геодезических, содержащих фиксированную гиперплоскость α^n, с некоторой нормалью E_{r-1} первого рода гиперповерхности V^r_{n-1} определяют плоскость размерности $n-2$. Для того чтобы связность была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы

$$t^{jk}_i = c^{jk}_v x^v_i + a^{jk} x_i + 2z^{(j}\delta^{k)}_i, \tag{18}$$

причем соответствующая нормаль E_{r-1} гиперповерхности V^r_{n-1} определяется гиперплоскостями

$$\rho^v = \alpha^v - x^v_i \alpha^i, \ \rho^\circ = \alpha^\circ - \tilde{x}_i \alpha^i,$$

где

$$\tilde{x}_i = x_i - \lambda_i - \lambda_v x^v_i.$$

Здесь также можно отметить частные случаи нормальной связности на гиперповерхности V^r_{n-1}: полувнутреннюю связность, для которой нормаль E_{r-1} лежит в касательной плоскости E_r поверхности V_r, и внутреннюю связность, для которой нормаль E_{r-1} совпадает с инвариантной нормалью первого рода гиперповерхности V^r_{n-1}.

4. Потребуем теперь, чтобы геодезические на поверхности V_r и гиперповерхности V^r_{n-1}, определяемые соответственно уравнениями (12) и (17), соответствовали друг другу.
В силу соотношения $\omega^n_i = a_{ij}\omega^j$, из этих уравнений вытекает, что

$$[a^{im}(l_{mjk} - x^{pq}_{m} a_{jp} a_{kq}) - x^{i}_{jk}]\,\omega^j\omega^k = (\Theta - \tilde{\Theta})\omega^i. \tag{19}$$

Эти уравнения приводят к соотношениям

$$l_{ijk} = a_{ip} T^p_{jk} + a_{jp} a_{kq} T^{pq}_{i}, \tag{20}$$

где

$$T^i_{jk} = t^i_{jk} - \frac{2}{r+1}\,\delta^i_{(j}\,t^m_{k)m},\quad T^{jk}_i = t^{jk}_i - \frac{2}{r+1}\,\delta^{(j}_i t^{k)m}_m.$$

Теорема 2: *Для того чтобы существовало соответствие геодезических поверхности V_r и гиперповерхности V^r_{n-1}, необходимо и достаточно, чтобы тензоры T^i_{jk} и T^{jk}_i их связностей удовлетворяли соотношениям* (20).

А. П. Норденом (5) было введено понятие сопряженности двух аффинных связностей на дифференцируемом многообразии относительно некоторого основного тензора. Затем это понятие было использовано при изучении аффинных связностей на гиперповерхностях проективного пространства. Это понятие мы используем при изучении аффинных связностей на гиперполосе H_r, проективного пространства P_n. При этом в качестве основного тензора выбирается тензор a_{ij} этой гиперполосы.

Теорема 3: *Для того чтобы связности, определяемые формами Θ^i_j и $\tilde{\Theta}^i_j$ гиперполосе H_r, были сопряженными, необходимо и достаточно, чтобы тензоры t^i_{jk} и t^{jk}_i этих связностей удовлетворяли соотношению*

$$l_{ijk} = a_{ip}\Big(t^p_{jk} - \frac{1}{r}\,\delta^p_j\,t^q_{kq}\Big) + a_{jp}\,a_{kq}\,\Big(t^{pq}_i - \frac{1}{r}\delta^p_i t^{qm}_m\Big). \tag{21}$$

Заметим, что в левой части соотношения (21) тензор l_{ijk} симметричен по всем индексам. В силу этого имеем $l_{i[jk]} = 0$, что нас приводит к соотношению:

$$t^p_{ip} + a_{ip}\,t^{pq}_q = 0. \tag{22}$$

Учитывая последнее соотношение, мы из (21) получим:

$$l_{ijk} = a_{ip} t^p_{jk} + a_{jp} a_{kq}\, t^{pq}_i. \tag{23}$$

Нетрудно видеть что при наличии соотношения (22), соотношение (23) будет равносильно соотношению (20).

Теорема 4: *Если связности, определяемые на гиперполосе H_r сопряжены, то геодезические на поверхности V_r и гиперповерхности V^r_{n-1} соответствуют. Обратно, если геодезические связностей, определяемые на поверхности V_r и гиперповерхности V^r_{n-1}, соответствуют, и кроме того, выполняются соотношение* (22), *то эти связности являются сопряженными.*

Выражаю искреннюю благодарность Акивису за постановку задачи и ценные замечания.

Ереванский государственный университет

Մ. Ա. ՎԱՍԻԼՅԱՆ

Հիպերշերտի հագեցման կողմից ինդուցված աֆինական կապակցություններ

Ուսումնասիրվում են առանց ոլորման այն աֆինական կապակցությունները, որոնք ինդուցվում են P_n պրոեկտիվ տարածության $H_r(r < n-1)$ հիպերշերտի վրա այն հագեցման շնորհիվ, որոնք կառուցվել են մեր (1–3) աշխատանքներում:

Դիտարկվող հիպերշերտի V_r բազիսային մակերևույթի վրա որոշվող կապակցությունը կանվանենք նորմալ, եթե նրա ֆիքսված կետով անցնող բոլոր գեոդեզական գծերի հպման հարթությունները մակերևույթի առաջին սեռի նորմալը հատում են ուղիղ գծերով: Գտնված է կապակցության նորմալ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը:

Ուսումնասիրված են այդ կապակցության մասնավոր դեպքերը՝ կիսաներքին և ներքին կապակցությունները:

Օգտվելով պրոեկտիվ տարածության երկության հատկությունից, դիտարկված են կապակցություններ, որոնք առաջանում են հիպերշերտի տանգենցիալ—վերածվող V^r_{n-1} հիպերմակերևույթի վրա:

Ստացված են այն անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, որոնց դեպքում առաջ է գալիս գեոդեզիկ համապատասխանություն V_r և V^r_{n-1} մակերևույթների միջև:

Գտնված են V_r մակերևույթի և V^r_{n-1} հիպերմակերևույթի վրա ինդուցված կապակցությունների համալծության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները: Պարզվում է, որ V_r և V^r_{n-1} մակերևույթների գեոդեզիկ համապատասխանությունը և նրանց վրա ինդուցված կապակցությունների համալծությունը կապված են միմյանց հետ, ստացված են այդ կապի անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. А. Василян*, «Известия» АН Арм. ССР, Математика, VI, № 6 (1971). [2] *М. А. Василян*, ДАН Арм. ССР, т. 50, № 2 (1970). [3] *М. А. Василян*, ДАН Арм. ССР, т. 50, № 4 (1970). [4] *А. Лихнерович*, Теория связностей в целом и группы голономии, ИИЛ, 1960. [5] *А. П. Норден*, Пространства аффинной связности, ГИТТЛ. М.—Л., 1950.