ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LVII 1973 4

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

Р. В. Акопян

О формуле следов в теории возмущений для J-неотрицательных операторов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 27/II 1973)

Пусть H—гильбертово пространство, в котором наряду с обычным скалярным произведением (f, g) $(f, g\in H)$ введено индефинитное скалярное произведение

$$[f, g]=(Jf, g), \qquad J=P_+-P_-,$$

где $P_\pm$—взаимно дополнительные ортопроекторы в H.

Для любого линейного оператора A, действующего в плотной области определения $D(A)$, соответствующий J—сопряженный оператор однозначно определяется при помощи равенства

$$[Af, g]=[f, A^+g], \ f\in D(A).$$

Оператор A называется *J-самосопряженным*, если $A^+=A$. В дальнейшем под *J-неотрицательным* оператором понимается J-самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию: $[Af, f]\geqslant 0$ для $f\in D(A)$.

В известной работе И. М. Лифшица ([1]) для двух самосопряженных в обычном смысле операторов $\tilde{A}$ и A в H, разность которых конечномерна, и функции „достаточно общего вида" $\Phi(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ была получена не вполне строго так называемая формула следов

$$\mathrm{Sp}\{\Phi(\tilde{A})-\Phi(A)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\xi(\lambda)\Phi'(\lambda)d\lambda \quad (\xi(\lambda)=\xi(\lambda, A, \tilde{A}))$$

Вскоре М. Г. Крейн дал строгое доказательство формулы следов в более общем случае, когда разность операторов $\tilde{A}$ и A ядерна ([2]).

В настоящей заметке выводится формула следов для двух J-неотрицательных операторов $\tilde{A}$ и A, разность которых конечномерна. Приводится пример, показывающий, что эта формула, вообще говоря, не имеет места уже тогда, когда возмущение $V=\tilde{A}-A$ ядерно.

1. Для J-неотрицательного оператора A, имеющего хотя бы одну регулярную точку в верхней полуплоскости, известно следующее $A=S+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$ спектральное разложение ([3,4]), где $E(\lambda)$ семейство J-ортогональных проекторов, определенных всюду, кроме точки $\lambda=0$, причем $[E(\lambda)f, f]$ $(f\in H)$ монотонно убывающая функция при $\lambda<0$ и монотонно возрастающая при $\lambda>0$, а S J-неотрицательный ограниченный оператор такой, что

$S^2=0$, $SE(\Delta)=E(\Delta)S=0$, если $0\overline{\in}\Delta$ $(E(\Delta)=E(\beta-0)-E(\alpha+0)$, при $\Delta=(\alpha,\beta))$.

Для резольвенты оператора A при этом получается формула

$$R_z(A)=(A-zI)^{-1}=-\frac{I}{z}-\frac{S}{z^2}+\frac{1}{z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda dE(\lambda)}{\lambda-z}\ (\operatorname{Im} z\neq 0), \tag{1}$$

из которой, в частности, следует, что спектр такого оператора лежит на действительной оси.

Резольвенту оператора A можно также записать следующим образом

$$R_z(A)=-\frac{I}{z}+\frac{1}{z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dF(\lambda)}{\lambda-z}\quad (\operatorname{Im} z\neq 0) \tag{2}$$

где $[F(\lambda)f, f]$—локально суммируемая неубывающая функция.

Представим H в виде $H=E(-\mu)H[+](E(\mu)-E(-\mu))H[+]$ $[+](I-E(\mu))H=H_1[+]H_2[+]H_3$ $(\mu>0)$, будем иметь

$$[R_z(A)\varphi,\varphi]=\int\limits_{-\infty}^{-\mu}\frac{d[E(\lambda)\varphi_1,\varphi_1]}{\lambda-z}-\frac{[\varphi_2,\varphi_2]}{z}-\frac{[S\varphi_2,\varphi_2]}{z^2}+\frac{1}{z}\int\limits_{-\mu}^{\mu}\frac{\lambda d[E(\lambda)\varphi_2,\varphi_2]}{\lambda-z}+$$

$$+\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{d[E(\lambda)\varphi_3,\varphi_3]}{\lambda-z},\quad (\operatorname{Im} z\neq 0),\quad (\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3,\ \varphi_i\in H_i\ (i=1,2,3)). \tag{3}$$

2. Легко видеть, что для любого конечномерного J-неотрицательного оператора A справедливо представление

$$A=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j[\,\cdot\,,\psi_j]\psi_j\quad \alpha_j\geqslant 0.$$

Пусть A J-неотрицательный оператор, $V=\alpha[\,\cdot\,,\varphi]\varphi$, $\alpha>0$ и $\widetilde{A}=A+V$. Составим определитель возмущения

$$\Delta(z)=\det[(\widetilde{A}-zI)(A-zI)^{-1}]=\det(I+R_z(A)V)=1+\alpha[R_z(A)\varphi,\varphi].$$

Лемма 1. $\Delta(z)$ *не принимает действительных значений, меньших единицы при* $\mathrm{Im}\, z > 0$.

Доказательство. Предположим, что $[\varphi, \varphi] = 1$. Тогда согласно (2)

$$\Delta(x+iy) = 1 - \frac{\alpha}{x+iy} + \frac{\alpha}{x+iy}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - x - iy} = 1 - \frac{\alpha(x-iy)}{x^2+y^2} +$$

$$+ \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-iy)[(\lambda-x)+iy]\,d\sigma(\lambda)}{(x^2+y^2)[(\lambda-x)^2+y^2]}; \qquad \sigma(\lambda) = [F(\lambda)\varphi, \varphi],$$

$$\mathrm{Im}\Delta(x+iy) = \alpha\left[\frac{y}{x^2+y^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2xy - y\lambda)\,d\sigma(\lambda)}{(x^2+y^2)[(\lambda-x)^2+y^2]}\right] \tag{4}$$

и, если $\mathrm{Im}\Delta(x+iy) = 0$ $(y>0)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x-\lambda)\,d\sigma(\lambda)}{(\lambda-x)^2+y^2} = -1, \tag{5}$$

$$\mathrm{Re}\Delta(x+iy) = 1 - \frac{\alpha x}{x^2+y^2} + \alpha\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[x(\lambda-x)+y^2]\,d\sigma(\lambda)}{(x^2+y^2)[(\lambda-x)^2+y^2]}.$$

С учетом (5) получаем, что $\mathrm{Re}\Delta(x+iy) = 1 + \alpha\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{(\lambda-x)^2+y^2} \geqslant 1.$

Аналогично проверяется, что $\mathrm{Re}\Delta(x+iy) \geqslant 1$, в случае, когда $[\varphi, \varphi] = -1$ и $[\varphi, \varphi] = 0$.

Поскольку значения $\Delta(z)$ не охватывают точку нуль, то можно выделить однозначную ветвь $\ln\Delta(z)$, делая разрез вдоль отрицательной полуоси.

Выберем у функции $\ln\Delta(z) = \ln|\Delta(z)| + i\arg\Delta(z)$ ту ветвь, для которой $-\pi < \arg\Delta(z) < \pi$.

Следующая лемма, в сущности, известна ([5]):

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(z)$ *аналитическая функция в верхней полуплоскости с ограниченной мнимой частью. Тогда она допускает представление вида*

$$\varphi(z) = \beta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda z}{\lambda - z}\, g(\lambda)\,d\lambda, \quad \textit{причем} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|\,d\lambda < \infty.$$

Лемма 3. (Обобщенная лемма Колмогорова ([7]), ([8]))*; *Пусть*

---

* В процессе оформления этой заметки нам стало известно, что оценка (6) в несколько более сильной форме была получена в диссертации В. Н. Логвиненко.

$$\bar{\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-x} \quad \text{и} \quad E = \{x : |\bar{\sigma}(x)| > N\}$$ *($\sigma(t)$ имеет ограниченную вариацию на всей оси). Тогда*

$$\operatorname{mes} E \leqslant \frac{A}{N} \int_{-\infty}^{\infty} |d\sigma(t)|, \tag{6}$$

где A — некоторая абсолютная константа.

По лемме 2 имеем

$$\ln \Delta(z) = \beta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda z}{\lambda - z} g(\lambda) d\lambda = \beta + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) \xi(\lambda) d\lambda, \tag{7}$$

где $\xi(\lambda) = (1+\lambda^2) g(\lambda)$.

Лемма 4. *Функция $\xi(\lambda)$ абсолютно суммируема на всей оси.*

Доказательство. Из (4) следует, что почти всюду на вещественной оси

$$\lim_{y \downarrow 0} \operatorname{Im} \Delta(x + iy) = \frac{\alpha \pi \sigma'(x)}{x}. \tag{8}$$

В силу равенства (7)

$$\arg \Delta(x + iy) = \operatorname{Im} \ln \Delta(x + iy) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \xi(\lambda) d\lambda}{(\lambda - x)^2 + y^2}.$$

Поэтому $\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \downarrow 0} \arg \Delta(x + iy)$, и значит $-1 \leqslant \xi(\lambda) \leqslant 1$.

С другой стороны

$$\arg \Delta(x) = \lim_{y \downarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \Delta(x + iy)}{\operatorname{Re} \Delta(x + iy)}. \tag{9}$$

Из (3) для $x < -\mu$ получаем, что

$$\lim_{y \downarrow 0} \operatorname{Re} [R_z(A)\varphi, \varphi] = \int_{-\infty}^{-\mu} \frac{d[E(\lambda)\varphi_1, \varphi_1]}{\lambda - x} - \frac{[\varphi_2, \varphi_2]}{x} - \frac{[S\varphi_2, \varphi_2]}{x^2} +$$

$$+ \frac{1}{x} \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\lambda d[E(\lambda)\varphi_2, \varphi_2]}{\lambda - x} + \int_{\mu}^{\infty} \frac{d[E(\lambda)\varphi_3, \varphi_3]}{\lambda - x} = \bar{e}(x) - \frac{[\varphi_2, \varphi_2]}{x} -$$

$$- \frac{[S\varphi_2, \varphi_2]}{x^2} + \frac{1}{x} \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\lambda d[E(\lambda)\varphi_2, \varphi_2]}{\lambda - x} + \int_{\mu}^{\infty} \frac{d[E(\lambda)\varphi_3, \varphi_3]}{\lambda - x}.$$

По лемме 3 существует $M>0$ такое, что

$$\operatorname{mes} E\{x : |\bar{e}(x)| > \frac{1}{2};\ x\in(-\infty, -M)\} < \varepsilon.$$

Следовательно, за счет выбора числа M можно добиться того, чтобы

$$\int_{-\infty}^{-M} |\arg \Delta(x)| dx < 2\varepsilon.$$

Аналогично при достаточно большом M_1 справедливо неравенство

$$\int_{M_1}^{\infty} |\arg\Delta(x)| dx < 2\varepsilon.$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Имеет место следующее представление*

$$\ln\Delta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)d\lambda}{\lambda - z} \qquad (\operatorname{Im} z > 0).$$

Из определения функции $\Delta(z)$ и формулы (3) следует, что $\sup\limits_{y>1} |y \ln \Delta(iy)| < M < \infty$. Поэтому лемма 4 вместе с представлением (7) приводит к равенству $\beta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \xi(\lambda) d\lambda$, что и доказывает лемму 5.

После этой подготовки уже нетрудно методом работы ([2]) (см. также ([6])) доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть A любой J-неотрицательный оператор, имеющий хотя бы одну регулярную точку в верхней полуплоскости, а V конечномерный J-неотрицательный оператор и $\bar{A} = A + V$. Тогда паре A, $\bar{A}$ отвечает единственная функция $\xi(\lambda) = \xi(\lambda, A, \bar{A}) \in L_1(-\infty, \infty)$ такая, что имеет место формула следов*

$$\operatorname{Sp}[\Phi(\bar{A}) - \Phi(A)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda)\xi(\lambda) d\lambda,$$

где $\Phi(\lambda)$ любая рациональная функция с полюсами, принадлежащими пересечению резольвентных множеств операторов A и $\bar{A}$, имеющая на бесконечности полюс не выше первого порядка. При этом $\xi(\lambda) \leq 0$ при $\lambda < 0$ и $\xi(\lambda) \geq 0$ при $\lambda > 0$.

Последнее утверждение теоремы следует из (8).

3. Спектральная функция $E(\lambda)$ называется регулярной, если существует $s - \lim\limits_{\lambda\to -0} E(\lambda) = E(-0)$ и $s - \lim\limits_{\lambda\to +0} E(\lambda) = E(+0)$.

В этом случае пространство H разлагается в J-ортогональную сумму подпространств $H=H_1[+]H_2$,

$$H_1=E(-0)H[+](I-E(+0))H, \qquad H_2=(E(+0)-E(-0))H$$

приводящих оператор A, причем на подпространстве H_1 A совпадает с $A_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$, на H_2 совпадает с оператором S. Следовательно,

$$(A-zI)^{-1}=(A_1-zI)^{-1}[+](S-zI)^{-1}.$$

Пусть $\varphi\in H_2$ и $V=\alpha[\,\cdot\,,\varphi]\varphi$, $\alpha>0$. Тогда

$$\Delta(z)=\det[(\bar{A}-zI)(A-zI)^{-1}]=\det(I+R_z(S)V)=1+$$

$$+\alpha\left[\left(-\frac{1}{z}-\frac{S}{z^2}\right)\varphi,\ \varphi\right]=1-\frac{b}{z}-\frac{a}{z^2},\ \text{ где } b=\alpha[\varphi,\varphi],\ a=\alpha[S\varphi,\varphi]$$

В данном случае $\xi(\lambda)$ легко подсчитывается и имеет вид

$$\xi(\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при } \lambda\leq\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+a} \text{ и } \lambda\geq\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+a},\\ -1 & \text{при } \frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}<\lambda<0,\\ 1 & \text{при } 0<\lambda<\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}. \end{cases} \tag{10}$$

Предположим теперь, что размерность подпространства H_2 бесконечно, V J—неотрицательный ядерный оператор, т. е. $V=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j[\,\cdot\,,\varphi_j]\varphi_j$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j<\infty$, причем $\varphi_j\in H_2$ $(j=1, 2, \ldots)$ и S J—неотрицательный ограниченный оператор такой, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_j[S\varphi_j,\varphi_j]}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_j}=\infty$. Полагая $A_n=A+V_n$, где $V_n=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j[\,\cdot\,,\varphi_j]\varphi_j$ и подсчитав по формуле (10) функцию $\xi_n(\lambda)=\xi(\lambda, A_n, A_{n-1})$ $(A_0=A)$ убеждаемся в том, что в противоположность дефинитному случаю $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i(\lambda)$ не сходится в $L_1(-\infty,\infty)$. Пусть интервал (a, b) содержит конечное число точек спектра оператора A

$$a<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{i_0}<0<\lambda_{i_0+1}<\cdots<\lambda_n<b,$$

являющихся полюсами определителя $\Delta(z)$. Легко убедиться, что все нули $\Delta(z)$ внутри (a, b) простые и между λ_j и λ_{j+1} $j\neq i_0$ лежит точно один нуль, а в интервале $(\lambda_{i_0}, \lambda_{i_0+1})$ функция $\Delta(z)$ не имеет нулей. Внутри интервалов (a, λ_1) и (λ_n, b) может лежать не более одного нуля.

Легко получить явное выражение для $\xi(\lambda)$ в (a, b).

Автор выражает благодарность М. Г. Крейну за предложенную тему и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Ռ. Վ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Հետքերի բանաձևը J-ոչ բացասական օպերատորների համար

Հոդվածում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ. Դիցուք A ցանկացած J-ոչ բացասական օպերատոր է, որն ունի առնվազն մեկ ռեգուլյար կետ վերին կիսահարթությունում, իսկ V վերջավոր չափանի J-ոչ բացասական օպերատոր է և $\tilde{A}=A+V$: Այդ դեպքում $A, \tilde{A}$ զույգին համապատասխանում է միակ $\xi(\lambda)=\xi(\lambda, A, \tilde{A})\in L_1(-\infty,\infty)$ ֆունկցիա, այնպես որ տեղի ունի հետքերի բանաձևը

$$\mathrm{Sp}|\Phi(\tilde{A})-\Phi(A)|=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda,$$

որտեղ $\Phi(\lambda)$ ցանկացած ռացիոնալ ֆունկցիա է, որի բևեռները պատկանում են A և $\tilde{A}$ օպերատորների ռեզոլվենտային բազմությունների հատմանը, իսկ անվերջությունում կարող է ունենալ ամենաշատը առաջին կարգի բևեռ:

Ցույց է տրված, որ այդ թեորեմն ընդհանրապես ասած, ճիշտ չէ արդեն այն դեպքում, երբ V միջուկային օպերատոր է:

Ստացված են այդ թեորեմի որոշ հետևանքներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. М. Лифшиц*, УМН, 7, 1 (47) (1952). [2] *М. Г. Крейн*, Мат. сборник 33 (75). 3(1953). [3] *H. Langer*, Диссертация, Dresden (1965). [4] *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмулян*, Мат. исслед., 1—1 (1966). [5] *Н. И. Ахиезер* и *И. М. Глазман*, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., [6] *М. Г. Крейн*, Первая летняя мат. школа, Киев 1964. [7] *А. Н. Колмогоров*, Fund. Math., 7(1925). [8] *Н. К. Бари*, Тригонометрические ряды, М., 1961. [9] *Н. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.