ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LVII 1973 3

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

И. И. Микаелян

О наилучших приближениях рациональными функциями в соприкасающихся областях

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 19/III 1973)

Возможность аппроксимации многочленами в соприкасающихся областях рассмотрел А. Л. Шагинян ([1]).

С. Н. Мергелян установил меру наилучшего приближения многочленами в соприкасающихся областях в зависимости от касания ([2]).

Newman получил меру наилучшего приближения рациональными функциями функции $|x|$ на отрезке $[-1,1]$ ([3]).

Если обозначить

$$E_n(|x|) = \inf_{\{r_n\}} \max_{-1\leq x\leq 1} \Big| |x| - r_n(x) \Big|,$$

где $r_n(x)$—рациональная функция порядка n, то упомянутый выше результат заключается в том, что

$$O(e^{-9\sqrt{n}}) \leqslant E_n(|x|) < O(e^{-\sqrt{n}}).$$

В настоящей заметке рассматриваются две симметричные области относительно мнимой оси D_1 и D_2, которые касаются в точке O, требуется найти меру наилучшего приближения рациональными функциями на этом множестве функции

$$f(z) = \begin{cases} -z & \text{при} \quad z \in D_1 \\ z & \text{при} \quad z \in D_2 \end{cases}$$

В случае приближения многочленами мера наилучшего приближения в областях D_1 и D_2, лежащих между прямыми $y = kx$ и $y = -kx$, соприкасающихся в точке $z=0$, будет (*ср.*2)

$$\frac{1}{n^{1-\frac{2}{\pi}\cdot \operatorname{arctg} k}}.$$

2. Мера наилучшего приближения многочленами функции

$$f(z) = \begin{cases} z \text{ при } |z-1| \leq 1, \\ -z \text{ при } |z+1| \leq 1 \end{cases}$$

в указанных кругах, следует из работы (2)—величина порядка

$$O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Покажем, что мера наилучшего приближения рациональными функциями этой же функции на заданном множестве величина порядка $O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

Построим последовательность рациональных функций, которые аппроксимируют наилучшим образом функцию:

$$f_1(z) = \begin{cases} -1 \text{ при } |z+2| \leq 2-\delta \\ 1 \quad \text{при } |z-2| \leq 2-\delta \end{cases}$$

Отобразим кольцо $|z-2| > 2-\delta$, $|z+2| > 2-\delta$, в плоскости z на круговое кольцо

$$1 < |w| < \rho,$$

w—плоскости.

Это отображение осуществляет следующая дробно-линейная функция:

$$w(z) = \frac{\sqrt{\frac{\delta}{4-\delta}} \cdot (z-4+\delta)+z-\delta}{z-\delta-\sqrt{\frac{\delta}{4-\delta}} \cdot (z-4+\delta)}, \tag{1}$$

где ρ для достаточно малых δ, выражается формулой

$$\rho = \sqrt{\frac{2+\sqrt{\delta(4-\delta)}}{2-\sqrt{\delta.(4-\delta)}}}.$$

Обозначим

$$w(1) = w_1, \; w(-1) = w_2 \text{ и } \psi(w) = f_1(z),$$

где w определяется формулой (1).

$$\psi(w) = \begin{cases} w_1 \text{ при } |w| \leq 1 \\ w_2 \text{ при } |w| > \rho \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\mu_n(w) = \frac{w^n + (\sqrt{\rho})^n}{\frac{1}{w_2} \cdot w^n + \frac{1}{w_1} \cdot (\sqrt{\rho})^n},$$

($\mu_n(w)$—рациональная функция порядка n) удовлетворяет неравенству

$$|\psi(w) - \mu_n(w)| \leq \frac{3}{(\sqrt{\rho})^n}. \tag{2}$$

В работе ([4]) доказывается, что если

$$\lambda(t)=\begin{cases} c_1 \text{ при } t\in\Omega_1 \\ c_2 \text{ при } t\in\Omega_2 \end{cases}$$

$$\rho_n(\lambda(t))=\inf_{\{r_n\}}\max_{t\in\Omega_1\cap\Omega_2}|\lambda(t)-r_n(t)|,$$

где c_1 и c_2 константы, а $r_n(z)$ рациональная функция порядка n,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\rho_n(\lambda)}=\frac{1}{\sqrt{\rho}},$$

где Ω_1 и Ω_2 области, удовлетворяющие условию $\overline{\Omega}_1\cap\overline{\Omega}_2=\varnothing$, а ρ отношение радиусов кругового кольца на которую можно отобразить двусвязную область дополнительную к $\Omega_1\cap\Omega_2$.

Следовательно, оценка (2) является мерой наилучшего приближения функции $\psi(w)$ в области ее определения. При переходе из плоскости w на плоскость z, оценка (2) преобразуется в следующую:

$$|f_1(z)-R_n(z)|\leqslant\frac{3}{(\sqrt{\rho})^n}.$$

В последнем неравенстве

$$R_n(z)=\frac{|w(z)|^n+(\sqrt{\rho})^n}{(\sqrt{\rho})^n-|w(z)|^n},$$

а $w(z)$ определяется из формулы (1).

$R_n(z)$ — рациональная функция порядка n, полюсы которой суть

$$z_k=\frac{\delta.(\sqrt{\rho}-1)-(\sqrt{\rho}+1)\cdot\sqrt{\delta.(4-\delta)}}{\sqrt{\rho}-1-(\sqrt{\rho}+1)\cdot\sqrt{\dfrac{\delta}{4-\delta}}}\cdot e^{\frac{2\pi ki}{n}}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1).$$

Для достаточно малых δ имеем следующие ассимптотические оценки:

$$\rho\approx 1+2\cdot\sqrt{\delta}\qquad |z_k|=2\sqrt{\delta}+0(\delta)$$

$$\text{и}\qquad |w(z)|<2\quad\text{при}\quad |z|<2\cdot$$

$$|R_n(z)|\leqslant\frac{2}{n.\sqrt{\delta}},$$

Таким образом, если через $r_n(z)$ обозначить

$$r_n(z)=z\cdot R_n(z),\ \text{ то}$$

$$|f(z)-r_n(z)|\leqslant\begin{cases} 6\cdot e^{-n\sqrt{\delta}} & \text{при } |z\pm 2|\leqslant 2-\delta \\ \dfrac{2\sqrt{\rho}}{n}+2\delta & \text{при } |z|<\delta \end{cases}$$

Если через $\delta=\varphi(n)$ обозначим решение уравнения

$$3e^{-n\sqrt{\delta}}=\frac{\sqrt{\delta}}{n}+\delta,$$

то для достаточно больших n получим

$$\frac{(2-\varepsilon)^2 \cdot \ln^2 n}{n^2} < \varphi(n) < \frac{4\ln^2 n}{n^2}$$

Следовательно,

$$|f(z) - r_n(z)| \leqslant \frac{16 \cdot \ln^2 n}{n^2}$$

С другой стороны, если через $\varepsilon(n)$ обозначить меру наилучшего приближения рациональными функциями функции $f(z)$ на указанных в начале соприкасающихся кругах, то

$$|f(z) - r_n^*(z)| < \varepsilon(n),$$

где $r_n^*(z)$ — рациональная функция порядка n, которая наилучшим образом аппроксимирует $f(z)$.

Таким образом,

$$|z + r_n^*(z)| < \varepsilon(n) \text{ при } |z+1| \leqslant 1.$$

$z + r_n(z)$ является рациональной функцией порядка n, следовательно, можно применить оценку А. А. Гончара ([5]), которая заключается в следующем: если имеются две непересекающиеся области Ω_1 и Ω_2,

$r_n(z)$ — рациональная функция порядка n и если

$$\max_{z \in \Omega_1} |r_n(z)| \leqslant M,$$

то

$$\min_{z \in \Omega_2} |r_n(z)| \leqslant M \cdot \rho^n,$$

где ρ отношение радиусов кругового кольца, на которую можно отобразить двусьязную область дополнительную к $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

Применяя эту оценку, получим:

$$|z + r_n^*(z)| \leqslant \varepsilon(n) \quad e^{2n \cdot \sqrt{\delta}},$$

$$\text{при } |z+1| \leqslant 1 + \delta$$

$$2|z| - |z - r_n^*(z)| \leqslant |z + r_n^*(z)| < \varepsilon(n) e^{2n\sqrt{\delta}}.$$

Откуда

$$\varepsilon(n) \geqslant \frac{2\delta}{1 + e^{2n \cdot \sqrt{\delta}}}$$

при

$$\delta = \frac{1}{n^2}.$$

Имеем

$$\varepsilon(n) \geqslant \frac{2}{1+e^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Получена теорема 1.

Мера наилучшего приближения функции

$$f(z)=\begin{cases} z & \text{при } |z-1|\leqslant 1, \\ -z & \text{при } |z+1|\leqslant 1 \end{cases}$$

на совокупности, состоящей из этих двух кругов, будет величина порядка

$$O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right).$$

Аналогичным образом можно решать задачу о наилучшем приближении функции

$$f(z)=\begin{cases} z & \text{при } z\in B_1, \\ -z & \text{при } z\in B_2, \end{cases}$$

где B_1 и B_2 два симметричных треугольника с общей вершиной в точке $z=0$:

$$B_1 - \{\arg z=\alpha,\ \arg z=-\alpha,\ \operatorname{Re} z=1\}$$
$$B_2 - \{\arg z=\pi-\alpha,\ \arg z=\pi+\alpha,\ \operatorname{Re} z=-1\}$$

Получается теорема 2.

Мера наилучшего приближения рациональными функциями функции на двух симметричных относительно мнимой оси треугольниках с общей вершиной в точке $z=0$ величина порядка

$$\exp\{-\sqrt{2\pi n(\pi-2\alpha)}\}.$$

Ереванский государственный университет

Ի. Ի. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Լավագույն մոտավորություններ ռացիոնալ ֆունկցիաներով իրար շոշափող տիրույթներում

Ուսումնասիրվում է կոմպլեքս հարթության մեջ կեղծ առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ և սկզբնակետում իրար շոշափող երկու D_1 և D_2 տիրույթներում

$$f(z)=\begin{cases} z & երբ\ z\in D_1 \\ -z & երբ\ z\in D_2 \end{cases}$$

ֆունկցիայի ռացիոնալ ֆունկցիաներով լավագույն մոտավորության չափը։ Շրջանների դեպքում այն ստացվում է $\frac{\ln^2 n}{n^2}$ կարգի մեծություն։ Երկու եռանկյունների համար ստացվում է

$$\exp\{-\sqrt{2\pi n(2\pi-\alpha)}\},$$

որտեղ 2α-ն եռանկյունների սկզբնակետից դուրս եկող գագաթի անկյունն է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Л. Шагинян*, „Известия АН СССР“, 5(1941) [2] *С. Н. Мергелян*, Труды математического института им. Стеклова, XXXVII (1951) [3] *Newman*, Rational approximation to |x| NSF—QP—62.(1966). [4] *А. А. Гончар*, Математический сборник, т. 78(120) 4(1969). [5] *А. А. Гончар*, Математический сборник, т. 79(118); 1(1968).