

УДК 519.14+518.5

МАТЕМАТИКА

А. В. Петросян, С. Л. Амбарян, С. Е. Маркосян,
Ж. Э. Мелик-Адамян

О некоторых комбинаторных задачах размещения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 7/III 1973)

При автоматизации проектирования конструкторских структур ЭВМ главное место занимает автоматизация проектирования печатных плат (АППП) разных уровней.

Комбинаторные задачи, возникающие при АППП, обычно делятся на три класса: задачи компоновки, размещения и трассировки.

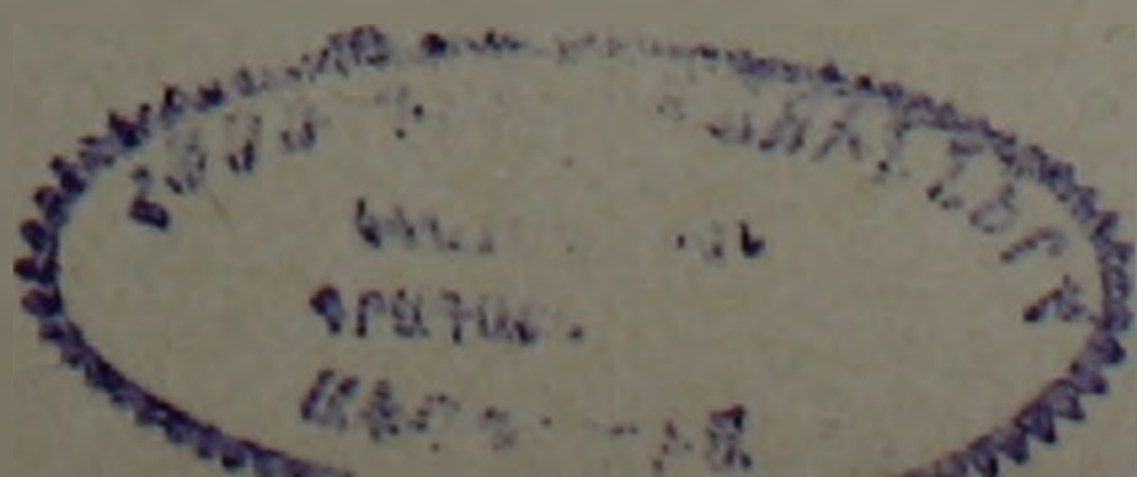
Задачи размещения, которым посвящена настоящая работа, естественным образом можно разделить на два подкласса: задачи размещения, связанные с реализацией внешних связей и задачи размещения, связанные с реализацией внутренних связей. Отметим, что при размещении обычно учитываются только необходимые условия для реализации внутренних связей. Такой подход приводит к существенным трудностям при реализации внешних связей. Вышеуказанное разделение задач размещения устраняет эти затруднения и позволяет одинаково формулировать задачи размещения для конструкторских структур всех уровней (ТЭЗ, панелей и т. д.).

Будут рассмотрены задачи для плат, контакты разъемов которых расположены регулярно, пропускные способности одинаковы и из каждой цепи необходимо вывести не более одного вывода.

Для реализации внешних связей предлагается решить следующие задачи:

1. Найти множество с минимальным числом модулей, покрывающих все внешние связи.
2. Установить однозначное соответствие между цепями и модулями так, чтобы максимальное число цепей, соответствующих одному модулю, было минимальным.
3. Разместить множество выбранных модулей в m модульных рядах так, чтобы максимальное число внешних связей каждого ряда было минимальным.

Такой подход оправдан тем, что выбор модулей согласно первому пункту обеспечивает максимальную возможность для реализации внутренних связей, а выполнение второго и третьего пунктов гарантирует максимальную возможность для проведения внешних связей.



Для математической формулировки этих задач введем некоторые обозначения.

Пусть задано множество элементов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и множество $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$ тех цепей, которые имеют внешние связи.

При изложении задач будем пользоваться терминологией, принятой в (1,2).

Задача 1. Найти такое подмножество $A \subset X$ с минимальным числом элементов, чтобы $A \cap Z_i \neq \emptyset$ для любого $i = 1, 2, \dots, p$.

Построим простой граф $G = (Z, N; \Gamma)$, где $N = \{1, 2, \dots, p\}$, $Z = \bigcup Z_i$, а отображение $\Gamma x = \{i : x \in Z_i\}$.

Очевидно, что нахождение подмножества A с указанными свойствами, эквивалентно нахождению минимального внешне устойчивого множества графа G , принадлежащего множеству Z .

Описанный в (1) алгоритм для нахождения такого множества включает значительный перебор вариантов. Указанный алгоритм может быть значительно улучшен, если заменить перебор выбором вариантов по методу ветвей и границ (3). Укажем правила ветвления и выбор функции, вычисляющей нижние границы.

Каждому классу возможных вариантов приводится в соответствие некоторый подграф графа G и некоторое множество вершин, которые обязательно должны входить во внешне устойчивые множества графа G , получаемые при вариантах данного класса.

На каждом шаге класс возможных вариантов с минимальной оценкой разбивается на два подкласса (две ветви).

Пусть на t -ом шаге выбран некоторый класс для разбиения. Обозначим через $G(t) = (Z(t), N(t); \Gamma)$ подграф, соответствующий этому классу, а через $A(t)$ — множество тех вершин из $Z/Z(t)$, которые обязательно должны входить во внешне устойчивые множества графа G , получаемые при вариантах данного класса.

Расположим вершины множества $Z(t)$ в порядке убывания их локальных степеней относительно графа $G(t)$: $\rho(x'_1) \geq \rho(x'_2) \geq \dots \geq \rho(x'_q)$. Тогда оценка данного класса равна $|A(t)| + q$, где q — первый индекс, для которого $\sum_{i=1}^q \rho(x'_i) \geq |N(t)|$.

В первый подкласс попадут все те вершины, для которых полученные внешне устойчивые множества содержат $A(t) \cup \{x'_1\}$, а во второй подкласс — те вершины, для которых полученные внешне устойчивые множества содержат множество $A(t)$, но не содержат вершину x'_1 .

Пусть $G_1(t) = (Z_1(t), N_1(t); \Gamma)$ и $G_2(t) = (Z_2(t), N_2(t); \Gamma)$ подграфы соответственно для первого и второго подклассов, а $A_1(t)$ и $A_2(t)$ — соответствующие им множества. Тогда множество $A_1(t)$ определяется следующим образом:

$$A_1(t) = A(t) \cup \{x'_1\} \cup \Delta(G^-(t)),$$

где $\Delta(G^-(t))$ получается из графа $G^-(t) = (Z(t)/\{x'_1\}, N(t)/\Gamma x'_1; \Gamma)$ в результате применения следующих двух операций.

1. Если вершина x'_i поглощает вершину x'_j , т. е. $\Gamma x'_j \subseteq \Gamma x'_i$, то x'_j исключается из графа.

2. Если (x'_i, j) — висячее ребро, то $x'_i \in \Delta(G-(t))$ и из графа исключаются вершины множества $\{x'_i\} \cup \Gamma x'_i$.

Эти две операции применяются к графу $G(t)$ до тех пор, пока это возможно. В результате получается множество $\Delta(G-(t))$ и граф $G_1(t)$, к которому указанные операции не применимы. Множество $A_2(t) = A(t)$, а $G_2(t) = (Z(t)/|x'_1|, N(t); \Gamma)$. Классу всевозможных вариантов соответствует граф $G(1)$, который получается в результате применения к исходному графу операции 1 и 2. Соответствующее этому классу множество $A(1) = \Delta(G)$.

Задача 2. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ является решением задачи 1, а f — такое однозначное отображение, переводящее N на A , что $f(i) \in Z_i \cap A$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Пусть Φ — множество всех однозначных отображений f . Обозначим через $c(x, f) = |\{i: i \in N, x \in A, f(i) = x\}|$. Требуется найти такое f^0 , при котором

$$\max_{x \in A} c(x, f^0) = \min_{f \in \Phi} \{ \max_{x \in A} c(x, f) \}.$$

Решение этой задачи сводится к нахождению максимальных потоков в нескольких транспортных сетях следующим образом. Построим транспортную сеть для графа $G = (A, N; \Gamma)$, где $\Gamma a = \{i: f(i) = a, a \in A\}$ с входом x_0 и выходом z . Соединим x_0 со всеми элементами множества N . Положим пропускные способности всех дуг, за исключением дуг (x_0, a) , равным единице. Пропускные способности дуг (x_0, a) первоначально положим равными единице. Будем последовательно увеличивать их значение до тех пор, пока не получим поток, насыщающий все дуги, идущие в z . Число испытываемых вариантов можно уменьшить введением оценок для пропускных способностей дуг (x_0, a) . Для задач, возникающих при АППП, число этих транспортных сетей невелико.

Максимальные потоки находятся по алгоритму Форда — Фалкерсона^(1,2).

Задача 3. Пусть $c(x) = c(x, f^0)$, где $x \in A$, f^0 — решение задачи 2, а $\tau(A) = \{X_1, X_2, \dots, X_q\}$ некоторое разбиение множества A на $q \leq m$ подмножеств.

Пусть $T(A)$ — множество всех разбиений $\tau(A)$. Под весом $c(Y)$ множества $Y \subseteq A$ будем понимать $\sum_{x \in Y} c(x)$. Требуется найти такое разбиение $\tau_0(A)$, при котором

$$\max_{X_i \in \tau(A)} c(X_i) = \min_{\tau(A) \in T(A)} \{ \max_{X_i \in \tau(A)} c(X_i) \}.$$

Обозначим через $\bar{c} = \frac{\sum_{x \in A} c(x)}{m}$.

Подмножество $Y \subseteq A$ назовем $\bar{c}$ -критическим, если $c(Y) \geq \bar{c}$, но $c(Y') < \bar{c}$ для любого собственного подмножества Y' множества Y .

Теорема 1. Среди решений задачи 3 существует такое, что все его подмножества с весом не меньше $\bar{c}$ являются $\bar{c}$ -критическими.

Из утверждения теоремы 1 следует, что решение задачи 3 можно искать среди тех подмножеств множества A , которые являются $\bar{c}$ -критическими или имеют вес, меньший $\bar{c}$.

Предлагается следующий алгоритм для нахождения требуемого разбиения.

1°. Если $\max_{x \in A} c(x) \leq \bar{c}$, перейти к пункту 3°.

2°. Если $\max_{x \in A} c(x) > \bar{c}$, построим некоторое разбиение множества $B = \{x: x \in A, c(x) \geq \bar{c}\}$ на подмножества, вес которых не превышает $\max_{x \in A} c(x)$.

Для этого рассмотрим все те подмножества Y множества B , вес которых не превышает $\max_{x \in A} c(x)$.

Пусть уже выбраны подмножества $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ и $B / \cup Y_i \neq \emptyset$. Тогда в качестве Y_{k+1} выбирается такое подмножество Y из $B / \cup Y_i$, для которого $\max_{x \in A} c(x) - c(Y)$ принимает минимальное значение. Если существует несколько таких подмножеств, то среди них выбираем подмножество с минимальным числом элементов. Предположим, что $Y_1, Y_2, \dots, Y_l$ — требуемое разбиение.

Вычислим $\bar{c}' = \frac{\sum_{x \in A/B} c(x)}{m-l}$ и примем $\bar{c} = \bar{c}'$, а в качестве A — множество A/B .

3°. Рассмотрим все те подмножества X' множества A , которые $\bar{c}$ -критические или $c(X') \leq \bar{c}$.

Предположим, что выбраны подмножества $X_1, X_2, \dots, X_k$ и $A / \cup X_i \neq \emptyset$.

Обозначим $\bar{c}_k = \frac{\sum c(X_i)}{k}$.

Рассмотрим два случая.

а) $\bar{c}_k \leq \bar{c}$, тогда в качестве X_{k+1} выбирается такое $\bar{c}$ -критическое подмножество X'' из $A / \cup X_i$, для которого разность $c(X'') - \bar{c}$ принимает минимальное значение и $c(X'') \geq \bar{c}$.

б) $\bar{c}_k > \bar{c}$, тогда в качестве X_{k+1} выбирается такое подмножество X'' из $A / \cup X_i$ и $c(X'') \leq \bar{c}$, для которого разность $\bar{c} - c(X'')$ принимает минимальное значение.

Можно доказать следующие теоремы.

Теорема 2. Число классов разбиения, полученных в результате работы алгоритма, не превосходит m .

Теорема 3. При $\max_{x \in A} c(x) \geq 2c' - 2$ алгоритм находит оптимальное решение.

Ереванский научно-исследовательский институт
математических машин

Ա. Վ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Ս. Լ. ՀԱՄԲԱՐՅԱՆ, Ս. Ե. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ, Ժ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ

Տեղաբաշխման մի Բանի կոմբինատորային խնդիրների մասին

Հոդվածում ձևակերպված են մի քանի մաթեմատիկական խնդիրներ, որոնք առաջանում են հաշվողական մեքենաների կոնստրուկտորական ստորուկ-ստորանների տեղաբաշխման էտալում և տրված են դրանց լուծումները:

Առաջին խնդիր. Գտնել տված դրաֆի ամենափոքր արտաքին կայուն բազմությունը: Լուծման հիմքում ընկած է ճյուղավորումների և սահմանափակումների մեթոդը:

Երկրորդ խնդիրը, որը վերաբերվում է դրաֆի մեջ որոշակի արտապատկերման գտնելուն, բերվում է տրանսպորտային ցանցի մաքսիմալ հոսքի խնդրին:

Երրորդ խնդիր. Կշիռ ունեցող էլեմենտների բազմությունը տրոհել որոշակի քանակով ենթաբազմությունների այնպես, որ ամենամեծ կշիռ ունեցող ենթաբազմության կշիռը լինի մինիմալ:

Ապացուցված է մի քանի թեորեմ լուծման վերաբերյալ և նկարագրված է էվիրիստիկ ալգորիթմ, որը բավական մոտ է օպտիմալին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ К. Берж, Теория графов и ее применение, изд. ИЛ., М., 1962. ² Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон, Поток в сетях, изд. «Мир», М., 1966. ³ Дж. Литл, К. Мурти, Д. Сунни, К. Кэрел, «Экономика и математические методы», т. I, вып. I, 1965.