ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LVII 1973 2

УДК 517.51 : 519.53

МАТЕМАТИКА

Ф. Г. Арутюнян

Система представления

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 13/II 1973)

Пусть E некоторый отрезок числовой прямой. Введем следующие обозначения. Через $S(E)$ обозначим пространство всех п. в. конечных, измеримых функций на E с обычной метрикой. А через $S^*(E)$ обозначим класс всех измеримых на E функций, которые, в частности, могут обращаться в $+\infty$ или $-\infty$ на подмножествах E положительной меры.

Определение 1. Пусть $\varphi_n \in S(E)$, $n \geq 1$ и $f \in S^*(E)$. Скажем, что φ_n сходится к f в смысле ∂_1, (∂_2 или ∂_3), если φ_n сходится к f, соответственно,

1) почти всюду на E;
2) почти всюду там, где f конечна и по мере на E;
3) по мере на E.

Далее пусть $C(E)$, $M(E)$ и $L_p(E)$ пространства функций, соответственно: непрерывных, существенно ограниченных и P интегрируемых. Введем также обозначение $C_1(E)$—класс кусочно непрерывных функций на E.

Определение 2. Пусть $D(E)$—произвольный класс функций измеримых на E, ∂—некоторое понятие сходимости (∂_1, ∂_2, ∂_3, $C(E)$, $M(E)$, $L_p(E)$ или $S(E)$). Система функций $\varphi_n \in S(E)$, $n \geq 1$ назовем $D(\partial, E)$ системой, если для любой функции f из $D(E)$ существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$, который ∂ сходится к f.

Теорема 1. (Д. Е. Меньшов [1]). Тригонометрическая система является $S(\partial_1, [0, 2\pi])$ системой.

Теорема 2. (Д. Е. Меньшов [2]). *Тригонометрическая система является $S^*(\partial_3, [0, 2\pi])$ системой.*

Существенные обобщения теорем 1 и 2 получены А. А. Талаляном (см. например [3-5]). В частности, им была получена

Теорема 3. (А. А. Талалян [3]). *Любой базис пространства $L_p(E)$, $p > 1$ является $S^*(\partial_3, E)$ системой.*

В настоящее время остается открытым вопрос: является ли тригонометрическая система $S^\infty(\partial_3, E)$ системой? В связи с этим интересна следующая

Теорема 4. (А. А. Талалян ([1])). *Тригонометрическая система является $S^\infty(\partial_2, [0, 2\pi])$ системой.*

В нашей, совместной с А. А. Талаляном, работе ([7]) установлено: ряд по системе Хаара, а также и по системе Уолша, не может сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры. Следовательно, в формулировке теоремы 3 $S^\infty(\partial_3, E)$ нельзя заменить $S^\infty(\partial_1, E)$. Что же касается теорем 1 или 4, то они были доказаны лишь для конкретных систем, где были использованы специфические свойства этих систем.

В настоящей работе, в частности, приводятся теоремы, аналогичные теоремам 3 и 4 для довольно широкого класса систем функций включая базисы пространства $C(E)$, тригонометрическую систему и так далее. Метод доказательства этих теорем немедленно приводит к другим результатам, касающимся вопросу существования ортогональных рядов, частичные суммы которых положительны, и которые не являются рядами Фурье. В частности, для тригонометрической системы дается усиление результата Кацнельсона ([9]). Кроме того, для довольно широкого класса ортогональных систем (включая тригонометрическую) и для базисов $C(E)$ доказывается существование рядов по этим системам, которые после перестановок могут сходиться к $+\infty$ на множествах положительной меры. В доказательстве всех теорем применен метод, использованный при доказательстве теоремы о том, что любой базис пространства $C(E)$ является $S(\partial_1, E)$ системой ([10]).

Пусть последовательность функций $\{z_n(t)\}_1^\infty$, $z_n \in S(E)$ определяется следующим образом

а) $|z_n(t)| \leq 1$, $t \in E$, $n \geq 1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Delta z_n(t)dt = 0$ для любого интервала Δ из E;

в) существует число $\gamma > 0$ такое, что для любого интервала $\Delta \subseteq E$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Delta|} \int\limits_\Delta |z_{n_k}(t)|dt > \gamma,$$

где $\{n_k\}_1^\infty$ все те номера, для которых $z_{n_k}(t) = 0$ при $t \bar{\in} \Delta$.

Лемма 1. *Из $\{z_n(t)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{z_{n_k}(t)\}_1^\infty$ обладающую свойством* а), б), в) *и вместе с тем обладающую тем свойством, что если нижний предел частичных сумм некоторого ряда $\Omega \sim \sum\limits_{k=1}^\infty \alpha_k z_{n_k}(t)$, $|\alpha_k| \leq 1$ больше $-\infty$ на некотором измеримом множестве G, то п. в. на G ряд Ω сходится к конечной функции.*

В дальнейшем, без ограничения общности, мы дополнительно будем предполагать, что для системы функций $\{z_n(t)\}_1^\infty$ выполнено также утверждение леммы 1. Кроме того, для простоты мы будем предполагать, хотя это не обязательно, что $z_n \in C^1(E)$ и $\int_E z_n(t)dt=0$, $n \geq 1$.

Основой доказательств нижеприведенных теорем является следующая

Теорема 5. *Для любого* $f \in C_1(E)$, $\inf_{t\in E} f(t)>0$ *существует ряд* $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n z_n(t)$, $|\alpha_n|\leq 1$, $n\geq 1$ *такой, что* $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \alpha_k z_k(t)=f(t)$ *п. в. на* E *(следовательно, ряд* $д_1$ *сходится к функции* $f(t)$ *на* E*) и* $\sup_n \sum_{k=1}^n \alpha_k z_k(t) \leq f(t)$ *всюду на* E.

Далее, пусть X—пространство типа F (см. ([12])), $\{x_n\}_1^\infty$ последовательность из X. Пусть для некоторого $x \in X$ существует ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$, который сходится к x. Через x^* обозначим совокупность всех рядов, сходящихся к x и множество всех x^* обозначим через X^*. Относительно операций $\alpha x^*=(\alpha x)^*$ и $x^*+y^*=(x+y)^*$ множество X^* будет линейным пространством. Положим

$$\| x^* \|_{X^*}= \inf \sup_n \| \sum_{k=1}^n a_k x_k \|_X,$$

где inf берется по всем рядам $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$, сходящимся к x. В работе ([8]) доказано, что $\| \ \|_{X^*}$ является квазинормой в X^*, по которой X^* является пространством типа F. Если же X—пространство Банаха, то X^* тоже является пространством Банаха.

В дальнейшем мы будем предполагать, что существует положительное число σ такое, что $\| x_n \|_X \geq \sigma$, $n\geq 1$.

Определим линейный оператор $I: X^*\to X$, полагая $I(x^*)=x$. Пусть теперь Y—линейное пространство всех бесконечных последовательностей, имеющих лишь конечное число элементов отличных от нуля и $e_n=(0, \ldots 0, 1, 0, \ldots 0)$, $n\geq 1$, где единица стоит на n-ом месте. Пусть $T: Y\to X^*$ линейный оператор (не обязательно непрерывный), который по всем лучам e_n равномерно непрерывен в нуле. То есть, для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что $\| T(\alpha e_n) \|_{X^*}<\varepsilon$ для всех $|\alpha|<\delta$ и $n\geq 1$.

Через Z обозначим множество линейных агрегатов вида $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n z_n$, где в каждой сумме отличны от нуля только конечное число коэффициентов α_n. Две суммы считаются равными тогда и только тогда, когда равны соответственные коэффициенты. Линейный оператор $P: Z\to X$ определим следующим образом

$$P(\sum_{n=1}^\infty \alpha_n z_n)=I(T(\sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n)).$$

Основные результаты работы содержатся в следующей теореме

Теорема 6. (основная). *Пусть $f_n(t)$, $n \geq 1$, возрастающая последовательность положительных функций из $C(E)$ и пусть заданы числа ε_n, $\varepsilon_n \to 0$, $n > 0$, тогда существуют номера $0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$, и два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n(t)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ такие, что*

$$1^\circ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n(t) \overset{\partial_2}{=} \sup_n f_n(t),$$

$$2^\circ \quad \sup_{1 \leq m \leq n_k} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i(t) < f_k(t), \quad k \geq 1,$$

$$3^\circ \quad \sup_{n_{k-1} \leq m \leq n_k} \| P(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i) - \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \|_X < \varepsilon_k, \quad k \geq 1.$$

Ввиду того, что всякая $f \in S^\infty(E)$ п. в. представляется $f(t) = \lim_{n \to \infty} f_n^{(1)}(t) - \lim_{n \to \infty} f_n^{(2)}(t)$, где $\{f_n^{(\nu)}(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $\nu = 1$ или 2 строго возрастающие последовательности положительных функций из $C(E)$ удовлетворяющие условию $\| f_n^{(\nu)} \|_{L_1(E)} < 2 \| f \|_{L_1(E)} + \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$, то из теоремы 6 получим

Теорема 7. *Для любой $f \in S^\infty(E)$ существуют ряды (не единственные) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n(t)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ такие, что*

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n(t) \overset{\partial_1}{=} f(t),$$

$$2) \quad \sup_n \| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k \|_{L_1(E)} < 4(\| f \|_{L_1(E)} + \varepsilon),$$

$$3) \quad \lim_{n \to \infty} \| P(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \|_X = 0.$$

Примечание 1. В случае $f \in C'(E)$, $\inf_{t \in E} f(t) > 0$ можно было добиться, чтобы

$$\| P(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \|_X < \inf_{t \in E} (f(t) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k(t)), \quad n \geq 1.$$

Примечание 2. В формулировке теоремы 6 для конечного числа различных последовательностей $\{f_n\}$ можно выбрать одни и те же номера $\{n_k\}$.

Примечание 3. Заметим так же, что существует перестановка натуральных чисел $\{\nu_k\}$ такая, что для последовательностей $\{z_{\nu_k}\}$ и $\{x_{\nu_k}\}$ верна усиленная теорема 7, в том смысле, что сходимость ∂_1 можно заменить сходимостью ∂_1.

В частном случае легко получить перестановку ν_k в зависимости от представляемой функции $f(t)$. Для этого достаточно в формулировке теоремы 6 полагать: при $n_{q-1} < k \leqslant n_q$, $(q \geqslant 1)$ $\nu_k = n_{q-1} + n_q + 1 - k$. Идея перестановки в обратном порядке впервые была применена А. М. Олевским в работе (8), при получении $+\infty$ переставленными рядами Хаара. Р. И. Овсепяном было замечено, что суть вышеуказанной перестановки в сущности сводится к одному простому свойству числовых последовательностей. А именно: если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant 1, \ n \geqslant 1, \text{ то } \sum_{k=n}^{\infty} a_k \geqslant 0, \ n \geqslant 1.$$

Далее, пусть W—пространство типа F, а $A: W \to X$ линейное непрерывное отображение такое, что $A(W) \subseteq I(X^*)$.

Верна следующая

Лемма 2. *$I^{-0}A: W \to X^*$ непрерывно.*

Пусть теперь W совпадает либо с $C(E)$, либо с $M(E)$. $z_n \in W$, и $A(z_n) \in I(X^*)$, $n \geqslant 1$. Определим линейное отображение $T_A: Y \to X^*$, полагая $T(e_n) = I^{-1}(A(z_n))$. Тогда $P(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k) = A(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k)$. По лемме 2 T равномерно непрерывно по лучам e_n, $n \geqslant 1$ и, следовательно, справедлива

Теорема 8. При $T = T_A$ *верны теоремы 6, 7 и примечание 3.*

Пусть $\{\varphi_n\}_1^\infty$—либо тригонометрическая система, либо последовательность ограниченных функций, равномерно сходящимися рядами, по которым можно представить любую непрерывную функцию (в частности базис в $C(E)$); либо переставленная система Уолша; либо переставленная система Хаара.

Если принять $X = M(E)$, $A: W \to M(E)$ (где W либо $C(E)$, либо $M(E)$) определить как $A(f) = f$, $f \in W$, то справедлива

Лемма 3. *Можно выбрать последовательность $z_n \in W$, $n \geqslant 1$ такую, что определенный выше оператор T_A равномерно непрерывен по всем лучам e_n, $n \geqslant 1$.*

Для базисов в $C(E)$ непрерывность T_A указана выше. В случае тригонометрической системы лемму 2 можно получить из одной леммы Д. Е. Меньшова (11). А когда $\{\varphi_n(t)\}_1^\infty$—переставленная система Уолша, то лемма 2 вытекает из следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть $\{w_k(t)\}_1^\infty$—система Уолша, а $\chi_n(t)$ некоторая функция Хаара. $a_k^{(n)} = \int_0^1 \chi_n(t) w_k(t)\,dt$, $k \geqslant 1$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(n)}| = \|\chi_n\|_{M(E)}$.*

Теорема 9. *Для любой $f \in S^*(E)$ существует ряд $\sum_{n=1} a_n \varphi_n(t)$, который d_2 сходится к $f(t)$ и $\|\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\|_{L_1(E)} \leqslant 4(\|f\|_{L_1(E)} + 1)$, $n \geqslant 1$. Если же $f \in C^1(E)$, то $\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t) < f(t)$ для всех $t \in E$, $n \geqslant 1$.*

В случае, когда $\{\varphi_n(t)\}_1^\infty$—тригонометрическая система, в частности, получаем теорему 1 и теорему Кацнельсона (9).

Примечание 4. Первая часть теоремы 9 верна для всех базисов пространства $L_p(E)$, $p \geqslant 1$.

Теорема 10. *Существует перестановка системы* $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$, *которая является* $S^*(\partial_1, E)$ *системой.*

Если положим $X=S(E)$, $W=C(E)$, $A(x)=x$, $x\in W$, то из теоремы 8 получим:

Теорема 11. *Если* $\{x_n\}_1^\infty$ *является* $C(\partial_3, E)$ *системой, то* $\{x_n\}_1^\infty$ *является и* $S^\infty(\partial_3, E)$ *системой.*

Наконец отметим, что можно получить и теоремы, которые указывают, что существуют универсальные ряды по рассмотренным здесь системам. Приведем такую теорему в общем виде.

Теорема 12. *Существуют номера* $\{n_k\}$, $\{m_k\}$ *и* $\{p_k\}_1^\infty$ $(n_{k-1}< <m_k<p_k\leq n_k,\ n_0=0,\ k\geq 1)$, *универсальный (в смысле сходимости по мере), относительно перестановок, ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty \alpha_k(z_{m_k}(t)+z_{p_k}(t)) \quad \text{и ряд} \quad \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i x_i \quad \text{такие, что}$$

$$\sum_{q=1}^\infty \sum_{k=q}^\infty \| P(\alpha_k(z_{m_k}+z_{p_k})) - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i x_i \|_X < +\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n_{k-1}<j<n_k} \| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{j} a_i x_i \|_X = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0.$$

Примечание 5. Построить универсальный ряд по $\{z_n\}_1^\infty$ очень легко. Например, если, в частности, $\{z_n\}_1^\infty$ совпадает с системой Хаара, то ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n\chi_n(t)$ такой, что $\lim_{n\to\infty} a_n\chi_n(t)=0$ п. в. на $[0,1]$ и $\sum_{n=1}^\infty |a_n\chi_n(t)| = +\infty$ п. в. на $[0,1]$, универсален.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Ներկայացման սիստեմներ

Աշխատանքում բերվում են ֆուկցիաների սիստեմների օրինակներ, որոնք ունեն այն հատկությունը, որ նրանցով կազմված շարքերով կարելի է ներկայացնել բոլոր չափելի ֆունկցիաները զուգամիտության այս կամ այն իմաստով (օրինակ համարյա ամենուրեք կամ ըստ չափի)։ Այդ սիստեմները մասնավորապես կարող են համընկնել եռանկյունաչափական սիստեմի կամ (0,1)-ի բազիսների հետ։ Մասնավորապես ըստ վերջին սիստեմների կառուցվում են շարքեր, որոնց մասնակի գումարները սահմանափակ են վերևից հաստատունով, բայց չեն հանդիսանում վերլուծություններ։ Բայց այդ, ըստ այդ սիստեմների, տրվում է շարքի օրինակ, որը որոշ տեղափոխությունից հետո համարյա ամենուրեք զուգամիտում է $+\infty$։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Д. Е. Меньшов*. Sur la représetation des fonctions mesurables par des séries trigonométriques. Мат. сб., 9, 667—692, 1941, [2] *Д. Е. Меньшов*, О сходимости по мере тригонометрических рядов. Тр. Мат. ин-та АН СССР. вып. 32, 1—99, (1956).. [3] *А. А. Талалян*, Успехи мат. наук, 15, № 5, 77—141, (1960) (РЖМат, 1961, 7Б18). [4] *А. А. Талалян*, «Известия АН СССР», Сер. мат. 27, № 3, 621—660, (1963) (РЖМат, 1964, 3Б103). [5] *А. А. Талалян*, Мат. сб., 78, 425—445, (1969). (РЖМат, 1969. 12Б108). [6] *А. А. Талалян*, Мат. сб., 76, № 1, 39—51, (1968). (РЖМат, 1969, 4Б96). [7] *А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян*, Мат. сб., 66, № 2, 240—247, (1965). (РЖМат, 1966, 1Б86). [8] *А. М. Олевский*, Мат. сб., 77, № 2, 251—258, (1968). (РЖМат, 1969, 5Б138). [9]. Y. Katznelson, Trigonometric series with positive partial sums. Bull. Amer. Math. Soc., 71, №5, 718—719, (1965). [10] *Ф. Г. Арутюнян*, Тезисы кратких научных сообщений, секция 4, стр. 32, 33, М., 1966. [11]. *Н. К. Бари*, Тригонометрические ряды, стр. 446. Следствие 2 Гос. изд. физ.—мат. 1961, [12]. *К. Иосида*, Функциональный анализ, Изд. „Мир", стр. 81, М., 1967.