УДК 517.52

МАТЕМАТИКА

Р. И. Овсепян

О представлении функций ортогональными рядами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 13/II 1973)

В теоремах 1—3 через $\{\varphi_n\}_1^\infty$ обозначается система Уолша, любой базис пространства $C[0,1]$. В данной заметке формулируются некоторые результаты о рядах по системе $\{\varphi_n\}_1^\infty$.

Т е о р е м а 1. *Существует ряд $\sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$, $(\sup_x |a_n \varphi_n(x)| \rightarrow 0)$ который после некоторой перестановки сходится к бесконечности почти всюду (п.в.) на отрезке ортогональности.*

В связи с этой теоремой отметим, что до сих пор остается открытым вопрос: может ли тригонометрический ряд (в обычном порядке) сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры.

Заметим, что первые примеры рядов $\sum_1^\infty a_n \psi_n(x)$ (где $\{\psi_n(x)\}$ — равномерно ограниченная ортонормированная система), сходящихся к $+\infty$ почти всюду на отрезке ортогональности были приведены в работах (1—3).

Для системы Уолша и системы Хаара известна теорема А. А. Талаляна и Ф. Г. Арутюняна (4), утверждающая, что ряд по этой системе не может сходиться к бесконечности на множестве положительной меры.

Однако, А. М. Олевским (2) был приведен пример ряда $\sum_1^\infty a_n \chi_n(x)$ по системе Хаара, который после некоторой перестановки членов ряда сходится к бесконечности п. в. на $[0,1]$.

Отметим что некоторые элементы метода А. М. Олевского используются нами при доказательстве теоремы 1.

Отметим также, что в теореме 1 в качестве $\{\psi_n\}_1^\infty$ можно взять систему Хаара, в то время, как в примере А. М. Олевского $\overline{\lim}_n |a_n \chi_n(x)| = +\infty$ п. в. на $[0,1]$ причем его методом невозможно добиться лучшего поведения членов ряда.

О п р е д е л е н и е 1. Система $\{\psi_n\}_1^\infty$ называется системой

представления почти всюду (с. п. п. в.) на $[a, b]$ в классе $S(\bar{S})$ всех конечных измеримых (всех измеримых) на $[a, b]$ функций $f(x)$, если для любой $f \in S$ ($f \in \bar{S}$) существует ряд $\sum_1^{\infty} a_n \psi_n(x)$, сходящийся п. в. на $[a, b]$ к $f(x)$.

Рассматриваемые нами системы являются с. п. п. в. в классе S на отрезке ортогональности.

Для базисов пространства $C[0, 1]$ — это теорема Ф. Г. Арутюняна⁽³⁾, а для системы Уолша это доказано независимо друг от друга (приводится в хронологическом порядке) Ф. Г. Арутюняном⁽⁵⁾ (тем же методом, что и его теорема для базисов), Р. И. Осиповым⁽⁶⁾ (методом, разработанным Д. Е. Меньшовым и А. А. Талаляном для тригонометрической системы), Р. С. Давтяном⁽⁷⁾.

Первые 4 теоремы данной заметки доказываются методом доказательства теоремы Ф. Г. Арутюняна из работы⁽⁵⁾ с использованием усовершенствованного нами метода А. М. Олевского⁽²⁾, в тех местах, где надо получать сходящиеся к бесконечности переставленные ряды.

В случае системы Уолша мы пользуемся также леммой I.

Лемма 3 не имеет принципиального значения для доказательства теорем 1—4, но ее использование упрощает применение метода работы⁽⁵⁾ Ф. Г. Арутюняна*.

Теперь отметим, что перестановка, о которой говорится в теореме 1, любой сходящийся числовой ряд $\sum_1^{\infty} a_n$, переводит в ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, который сходится к той же сумме, что и ряд $\sum_1^{\infty} a_n$.

Это замечание вместе с вышесказанным приводит к утверждению.

Т е о р е м а 2. Систему $\{\varphi_n\}_1^{\infty}$ можно переставить так, что переставленная система $\{\varphi_{k_n}\}$ является с. п. п. в. на отрезке ортогональности в классе $\bar{S}$ всех измеримых функций (эти функции могут принимать бесконечные значения на множествах положительной меры).

Заметим, что при этих перестановках, свойство базисности не нарушается.

Напомним

О п р е д е л е н и е 2. Ряд $\sum a_n \psi_n(x)$ называется универсальным относительно подрядов в классе $S(\bar{S})$, если для любой функции $f \in S$ ($f \in \bar{S}$) существует подряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \cdot \psi_{n_k}(x)$, сходящийся п. в. на $[a, b]$ к $f(x)$.

Справедлива

Т е о р е м а 3. Существует переставленный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \cdot \varphi_{k_n}(x)$ ($a_n \rightarrow 0$) универсальный относительно подрядов в классе $\bar{S}$ на отрезке ортогональности.

* Доказательства результатов работы⁽⁵⁾ были изложены Ф. Г. Арутюняном на семинаре.

Заметим, что, если ограничиться классом S конечных измеримых функций, то такие универсальные ряды можно строить, не прибегая к перестановкам. Для тригонометрической системы это сделано А. А. Талаляном ⁽⁵⁾, для базисов $C[0,1]$ — и для системы Уолша — это вытекает из результатов работ ⁽⁴⁾, ⁽⁶⁾, ⁽⁷⁾ с использованием метода А. А. Талаляна.

В теореме 4 $\{\psi_n\}$ будет означать любую перестановку системы Уолша.

Справедлива

Т е о р е м а 4. Пусть $f(x)$ — любая непрерывная функция на отрезке ортогональности $[a,b]$. Существует ряд $\sum a_n \psi_n(x)$ сходящийся п. в. на $[a,b]$ к $f(x)$, причем $\sum_1^N a_n \psi_n(x) \geq f(x)$ п. в. ($N \geq 1$), но этот ряд не есть ряд Фурье какой-либо интегрируемой функции.

Когда $\{\psi_n\}$ — система Уолша (в нумерации Пэли) и $f(x) \equiv 0$ — это теорема Ф. Шиппа ⁽⁸⁾, являющаяся аналогом теоремы Кацнельсона ⁽⁹⁾ о тригонометрических рядах, опровергающей гипотезу Литтлвуда-Штейнгауза, согласно которой тригонометрический ряд с неотрицательными частными суммами должен был быть рядом Фурье.

Отметим еще, что, если ограничиться перестановками внутри „пачек“ системы Уолша, то существует ряд Уолша, который независимо от перестановок указанного типа удовлетворяет условиям теоремы 4.

Следующее утверждение показывает, что в некоторых случаях аналог гипотезы Литтлвуда-Штейнгауза имеет положительный ответ.

Т е о р е м а 5. Существует равномерно ограниченная полная ортонормированная (в $L_2(0,1)$) система $\{\psi_n\}_1^\infty$ такая, что из условия $\sum_1^N a_n \psi_n(x) \geq A$ п. в. на $(0,1)$ ($N \geq 1, A$ — к.-л. число) вытекает, что ряд $\sum_1^\infty a_n \psi_n(x)$ является рядом Фурье ограниченной функции.

При доказательстве теоремы 5 наряду с другими соображениями используется метод работы ⁽¹¹⁾ А. М. Олевского.

Введем обозначение $r_m(x; E) \equiv r_m(x) \cdot \gamma(x; E)$, где $r_m(x)$ — m -ая функция Радемахера, а $\gamma(x; E)$ — характеристическая функция множества E ($E \subset [0,1], |E| > 0$). Функции типа $r_m(x; E)$ будем называть „усеченными“ функциями Радемахера.

Л е м м а 1. Пусть $\Delta \equiv [i/2^n, i+1/2^n]$ ($0 \leq i < 2^n$), а ряд $\sum_1^\infty a_n \omega_n(x)$ является рядом Фурье — Уолша функции $r_m(x; \Delta)$. Тогда $\sum_1^n |a_n \omega_n(x)| \leq 1$ для любых $x \in [0,1]$, m и Δ с указанными выше условиями.

Это утверждение является непосредственным следствием лемм 1, 2 и 3 нашей работы ⁽¹²⁾.

Используя теорему П. Л. Ульянова о том, что $\lim_n \sum_{l=1}^n r_l(x) = +\infty$,

а $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n r_i(x) = -\infty$ почти в каждой точке отрезка $[0,1]$, М. Б. Петровская построила ⁽¹³⁾ пример ряда $\sum_1^\infty r_n(x; E_n)$ (формулируется частный случай), сходящегося к нулю почти всюду на $[0,1]$.

Точно так же можно построить ряд $\sum_1^\infty r_n(x; E_n)$ сходящийся п. в. на $[0,1]$ к числу -1 .

При этом $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ и на множествах $E_n^c \equiv [0,1] \setminus E_n$ выполняются соотношения:

$\sum_1^{n-1} r_i(x) = -1$, а $\sum_1^m r_i(x) > -1$ при $m < n-1$, т. е. на E_n^c число -1 достигается впервые на $n-1$ шаге.

Таким образом $\sum_1^\infty r_n(x; E_n) = \inf_m \sum_1^m r_n(x; E_n) = -1$ п. в. на $[0,1]$.

Отсюда вытекает

Лемма 2. Пусть $\varepsilon > 0$ и n — произвольное целое число (> 0). Тогда существуют множество $E \supset [0,1]$ и число N такие, что $|E| > 1 - \varepsilon$, и $\sum_{i=n}^N r_i(x; E_i) = -1$ на E , а частные суммы $\sum_{i=0}^m r_{N-i}(x; E_{N-i}) \leq 0$ на E при $0 \leq m \leq N-n$.

Заметим, что в применении к системе Уолша удобно полином из леммы 2 рассматривать как полином по системе Хаара.

Идея нумерации в обратном порядке заимствована нами из работы ⁽²⁾ А. М. Олевского.

Пусть $f_n(x)$ — ступенчатые функции на $[0,1]$ и пусть $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \dots, \delta_{k_n}^{(n)}$, занумерованные слева направо носители ступенек функции $f_n(x)$, причем любой $\delta_i^{(n)}$ является интервалом типа $(s/2^p, s+1/2^p)$, $0 \leq s < 2^p$. Далее предполагается, что при любых l, n, m ($n < m$; $l \leq k_m$) существует такое i ($\leq k_n$), что $\delta_i^{(n)} \supset \delta_l^{(m)}$.

Пусть $f_n(x) = a_i^{(n)}$ при $x \in \delta_i^{(n)}$, а $P_i^{(n)}(x)$ означают тождественный нуль на $[0,1]$, если $a_i^{(n)} = 0$, а в противном случае, полиномы по системе Хаара, определяемые следующим образом:

$$P_i^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin \delta_i^{(n)} \\ a_i^{(n)} & \text{при } x \in E_i^{(n)}, E_i^{(n)} \subset \delta_i^{(n)}, |E_i^{(n)}| > (1-2^{-n}) \cdot |\delta_i^{(n)}| \\ \geq a_i^{(n)} & \text{при } x \in [0,1], \text{ если } a_i^{(n)} < 0 \\ \leq a_i^{(n)} & \text{при } x \in [0,1], \text{ если } a_i^{(n)} > 0, \end{cases}$$

причем, если эти полиномы пронумеровать в порядке

$$P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_{k_1}^{(1)}, P_1^{(2)}, \dots, P_{k_2}^{(2)}, P_1^{(3)}, \dots, P_{k_3}^{(3)}, \dots$$

то использованные функции Хаара в этой последовательности будут встречаться в том же порядке, что и в системе Хаара.

Лемма 3. Чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^{k_n} P_i^{(n)}(x) \tag{1}$$

рассмотренный как ряд по системе Хаара сходилась п. в. на $[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_1^{\infty} |f_n(x)| < \infty \quad \text{п. в. на } [0,1] \quad (2)$$

Отметим, что при доказательстве теорем данной работы используется только одна сторона (достаточность) утверждения леммы 3.

Нетрудно убедиться в том, что для доказательства достаточности условие (2) без ограничения общности можно заменить на ус-

ловие $\sum_1^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$. Далее в силу определения полиномов $P_i^{(n)}$

верно неравенство $\|\sum_{i=1}^{k_n} P_i^{(n)}\|_1 \leq 2 \cdot \|f_n\|_1$ и следовательно

$\sum_{n=1}^{\infty} \|\sum_{i=1}^{k_n} P_i^{(n)}\|_1 < \infty$, а так как система Хаара — базис в L_1 , то ряд (1)

сходится в $L_1(0,1)$, а следовательно и п. в. на $(0,1)$.

Отметим также, что достаточность утверждения леммы 3 вытекает непосредственно из теоремы Ф. Г. Арутюняна⁽¹⁾, гласящей, что ес-

ли $\overline{\lim}_n \sum_{i=1}^n a_i \gamma_i(x) < \infty$ на E , $|E| > 0$, то ряд $\sum_1^{\infty} a_i \gamma_i(x)$ сходится п. в. на E .

Необходимость вытекает из следующих соображений: если ряд (1) сходится п. в., то колебания частных сумм внутри полиномов

$\sum_{i=1}^{k_n} P_i^{(n)}(x)$ „уменьшаются“, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{k_n} \delta_i^{(n)} \cdot P_i^{(n)}(x))$ (где $\delta_i^{(n)} = \text{sign} a_i^{(n)}$,

будет сходиться п. в. к $+\infty$, следовательно и ряд (1) также, что противоречит теореме А. А. Талаляна и Ф. Г. Арутюняна⁽¹⁾.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Ի. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

Ֆունկցիաների ներկայացում օրթոգոնալ շարքերով

Հոդվածի հիմնական պնդումը կայանում է նրանում, որ Ուոլշի սիստեմը $և C[0,1]$ -ում բազիսները կարելի է տեղափոխել այնպես, որ նոր սիստեմով գոյություն ունենան շարքեր, որոնք ներկայացնեն նույնաբար անվերջ ֆունկցիան:

Ավելին՝ կամայական $f(x)$ ֆունկցիայի համար, որոշված $և շարժելի [0,1]$ հատվածի վրա, գոյություն ունի շարք այդպիսի տեղափոխված սիստեմով, որը զուգամիտում է համարյա ամենուրեք $[0,1]$ հատվածի վրա այդ $f(x)$ ֆունկցիային, բայց որում եթե $f(x)$ -ը անընդհատ է, ապա նրան ներկայացնող շարքը կարելի է բնորոշել այնպես, որ մասնական գումարների հաջորդականությունը լինի ներքեֆց սահմանափակ հաստատունով, սակայն այդ շարքը ֆուրյեի շարք չհանդիսանա:

ЛИТЕРАТУРА — Ч Р Ц Ч Ш Ъ П Р Ю З П Р Ъ

- ¹ Р. И. Осипов, А. А. Талалян, Матем. заметки, т. 2, вып. 5 (1967). ² А. М. Олевский, Матем. сб., 77, № 2 (1968). ³ Р. И. Овсепян, Матем. заметки, т. II, вып. 5, (1972). ⁴ А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян, Матем. сб., 66, № 3, (1965). ⁵ Ф. Г. Арутюнян, Тезисы кратких научных сообщений. Моск. Международ. Конгресса математиков, Москва, изд-во «Наука», 1966, стр. 32. ⁶ Р. И. Осипов, Тезисы кратких научных сообщений Моск. Междунар. Конгресса математиков. Москва, изд-во «Наука», 1966, стр. 72. ⁷ Р. С. Давтян, ИАН Арм. ССР, сер. матем., 6 № 1 (1971). ⁸ А. А. Талалян, ДАН СССР, 138, № 2 (1961). ⁹ F. Schipp, Annals. Univers. Sci. Bud. XII (1969). ¹⁰ Y. Katznelson, Bull. Amer. Math. Soc., 71 (1965). ¹¹ А. М. Олевский, Матем. сб., 71 (113), № 3 (1966). ¹² Р. И. Осипов, ИАН Арм. ССР, сер. матем., 1, № 4 (1966). ¹³ М. Б. Петровская, ИАН СССР, сер. матем., 28, № 4 (1964). ¹⁴ Ф. Г. Арутюнян, ДАН Арм. ССР, ХП, № 3, (1966).