ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ТОМ 61 № 2 2026

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

том 61 №2 2026

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

Известия НАН Армении, Математика.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал ``Известия НАН Армении, Математика'' публикует оригинальные статьи на русском и английском языках, в следующих основных направлениях: вещественный и комплексный анализ, приближения, краевые задачи, интегральная и стохастическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и статистика, интегральные уравнения, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк), а также список ключевых слов.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес и адрес электронной почты.
4. Одновременно с распечатанным экземпляром статьи в редакцию желательно предоставлять PDF файл по электронной почте: sart@ysu.am.
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt. Объем статьи не должен превышать 20 страниц формата А4.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края строки, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами EPS, JPG.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи.
   - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
   - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
   - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы , место и год издания.
9. Адрес для переписки: Редакция журнала ``Известия НАН Армении, Математика'', пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения. E-mail: sart@ysu.am, URL: http://www.maik.ru
10. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале ``Journal of Contemporary Mathematical Analysis''. URL: http://www.springer.com.

Заказ N1437. Тираж 150. Подписано к печати 25.03.26.
Печ. л. 4. Бумага офсетная. Цена договорная.
Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24

Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 2, 2026, стр. 3 – 16.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ L^p

С. АГЕКЯН

Институт математики Национальной академии наук Республики Армения
Ереванский государственный университет
E-mail: *smbat.aghekyan@gmail.com*

Аннотация. В работе исследуется краевая задача Римана–Гильберта в верхней полуплоскости в весовом пространстве $L^p(\rho)$, где $1 < p < \infty$, а вес ρ имеет бесконечно много нулей. Получены необходимые и достаточные условия нормальной разрешимости и нетеровости соответствующего оператора, что расширяет классическую теорию конечного индекса на случай весов с бесконечным числом нулей. Выведены явные формулы решений как для однородной, так и для неоднородной задач, с особым вниманием к случаю отрицательного индекса.

MSC2020 numbers: 41A05; 41A63; 14H50.

Ключевые слова: задача Римана–Гильберта; каноническая факторизация; весовые пространства L^p; формула Сохоцкого–Племеля; бесконечный индекс.

1. Введение

В настоящей работе изучается краевая задача Римана–Гильберта в верхней и нижней полуплоскостях $\Pi^{\pm}$ для функций полиномиального роста в весовых пространствах $L^p(\rho)$ при $1 < p < \infty$, где вес

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x - x_k}{x + i} \right|^{\alpha_k}, \qquad 0 < \alpha_k < 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty,$$

имеет бесконечно много нулей на вещественной оси. Такие веса естественным образом возникают в задачах с предписанной структурой особенностей и приводят к тонким вопросам, связанным с нормальной разрешимостью и структурой решений однородной задачи.

В качестве отправной точки рассматривается граничное условие на действительную часть

$$\lim_{y \to +0} \left\| \operatorname{Re}\{a(x)\Phi(x+iy)\} - f(x) \right\|_{L^p(\rho)} = 0, \tag{1.1}$$

где $a \in C^{\delta}(\mathbb{R})$, $a(x) \neq 0$, а Φ аналитична в $\Pi^{+} \cup \Pi^{-}$. Следуя классической редукции Мусхелишвили [1], мы используем симметрию $\Phi_*(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}$ для преобразования (1.1) в задачу Римана с коэффициентом скачка

$$\widetilde{a}(x) = -\frac{\overline{a(x)}}{a(x)} = \frac{S^{+}(x)}{S^{-}(x)}.$$

Здесь $\mu := \operatorname{ind} a(x)$ обозначает индекс функции a, и

$$\kappa := \operatorname{ind} \widetilde{a} = -2\mu \in \mathbb{Z}.$$

Соответствующая факторизация, а также канонические функции $S^{\pm}$, будут введены в разделе 5. Это позволяет нам использовать и адаптировать метод факторизации и весовые оценки, развитые в наших предыдущих работах по задаче Римана в $L^p(\rho)$ с бесконечно многими нулями [2] – [5], см. также [6, 7] для родственных весовых задач.

Основные результаты. Пусть $T_p := \{x_k : \alpha_k > (p-1)/p\}$ обозначает множество «сильных» нулей веса ρ.

- *Однородная задача.* Мы показываем, что подпространство *самосопряжённых* решений однородной задачи (то есть класс решений, существенный для (1.1)) нетривиально тогда и только тогда, когда $\mu = 0$; в этом случае

$$\Phi_0(z) = S(z) \sum_{x_k \in T_p} \frac{A_k}{x_k - z}, \qquad A_k \in \mathbb{R},$$

  тогда как при $T_p = \varnothing$ обязательно $\Phi \equiv 0$. Это уточняет описание, полученное для задачи Римана, за счёт выделения симметричного подпространства, диктуемого постановкой задачи Римана–Гильберта.
- *Неоднородная задача.* При $\kappa = -2\mu \geq 0$ ($\mu \leq 0$) мы строим частные решения с помощью локализованных интегралов типа Коши, адаптированных к нулям $\{x_k\}$. Более точно, если

$$\Phi_1(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{S(z)}{2\pi i\,(x_k - z)} \int_{X_k} \frac{\widetilde{f}(t)\,(x_k - t)}{S^{+}(t)(t - z)}\,dt, \qquad \widetilde{f} = \frac{2f}{a},$$

  то всякое решение задачи Римана–Гильберта представимо в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \tfrac{1}{2}\big(\Phi_1(z) + \Phi_1^*(z)\big),$$

  где Φ_0 есть самосопряжённое решение однородной задачи, описанное выше, а $\Phi_1^*(z) := \overline{\Phi_1(\overline{z})}$. При $\kappa < 0$ ($\mu > 0$) задача Римана–Гильберта разрешима тогда и только тогда, когда выполнено конечное число моментных условий; в этом случае самосопряжённое решение единственно и также выражается через тот же ряд интегралов типа Коши (в отличие от собственно задачи Римана, здесь не требуется система Вандермонда).

Метод. Исследование основано на канонической факторизации, формуле Сохоцкого–Племеля и весовых оценках в $L^p(\rho)$, включая разложение по интервалам X_k, определяемым нулями ρ. При естественных условиях разделённости и суммируемости, наложенных на последовательность $\{x_k\}$ (см. (2.2)-(2.3)), эти средства обеспечивают необходимые оценки и предельные соотношения, требуемые для нормальной разрешимости и явного построения решений.

Структура работы. В разделе 2 напоминаются определения весового пространства $L^p(\rho)$ и основные предположения о последовательности $\{x_k\}$. В разделе 3 формулируется задача Римана–Гильберта. В разделе 4 описываются свойства симметрии функции $\Phi^*(z)$, используемые в дальнейшем. В разделе 5 задача Римана–Гильберта переписывается в форме, удобной для применения результатов теории задач Римана. В разделе 6 представлены основные результаты для однородного и неоднородного случаев, вместе с явными формулами решений. Наконец, в разделе 7 содержатся заключительные замечания.

2. Весовое пространство $L^p(\rho)$

Пусть $1 < p < \infty$ и пусть $\rho : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ – весовая функция вида

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x - x_k}{x + i} \right|^{\alpha_k}, \qquad 0 < \alpha_k < 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty, \tag{2.1}$$

где $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ – последовательность попарно различных вещественных чисел, а α_k – фиксированные положительные показатели. Произведение в (2.1) сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R} \setminus \{x_k\}$ и удовлетворяет условию $\rho(x) > 0$ для всех $x \neq x_k$.

Определение 2.1. *Весовым пространством Лебега* $L^p(\rho)$ называется множество измеримых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\|f\|^p_{L^p(\rho)} := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, \rho(x) \, dx < \infty.$$

Точки x_k будем называть *нулями* веса ρ и различать два множества:

$$T_p := \{x_k \ : \ \alpha_k > (p-1)/p\}, \qquad T'_p := \{x_k \ : \ \alpha_k \leq (p-1)/p\}.$$

Множество T_p состоит из «сильных» нулей веса ρ, которые накладывают дополнительные условия на граничные значения аналитических функций в $L^p(\rho)$ (см. [2, 5]).

Вес ρ в (2.1) имеет бесконечно много нулей, что приводит к нетривиальной структуре пространства $L^p(\rho)$. В частности:

- При стандартных предположениях, обеспечивающих ограниченность сингулярного интеграла Коши (см., например, [8, 9, 10, 7, 2]), преобразование Коши
$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt$$
переводит $L^p(\rho)$ в класс аналитических функций в $\Pi^{\pm}$, имеющих нетангенциальные граничные пределы в $L^p(\rho)$.

На протяжении всей работы мы также будем предполагать выполнение двух стандартных условий разделённости и суммируемости для $\{x_k\}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \ln|x_0 - x_k| > -\infty, \tag{2.2}$$

$$|x_k - x_j| > c\,|x_k - x_0|, \qquad j \neq k, \tag{2.3}$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ фиксировано, а $c > 0$ не зависит от j, k. Условия (2.2)-(2.3), введённые и исследованные в [2], обеспечивают сходимость локальных разложений в окрестности точек x_k и равномерную ограниченность соответствующих операторов сингулярного интегрирования в $L^p(\rho)$.

3. Задача Римана–Гильберта

В этом разделе мы изучаем краевую задачу Римана–Гильберта в полуплоскости в весовом пространстве $L^p(\rho)$, $1 < p < \infty$. Начнём с её точной формулировки.

Определение 3.1. Пусть $\Pi^{\pm}$ обозначают верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной плоскости. Через A обозначим класс функций Φ, аналитических в $\Pi^+ \cup \Pi^-$ и удовлетворяющих условию полиномиального роста

$$|\Phi(z)| \leq C|z|^{n_0}, \qquad |\Im z| \geq y_0 > 0,$$

для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$, любого фиксированного $y_0 > 0$ и константы $C = C(y_0) > 0$.

3.1. **Задача** RH_p**.** Пусть $f \in L^p(\rho)$, $1 < p < \infty$. Требуется найти функцию $\Phi(z) \in A$, удовлетворяющую граничному условию

$$\lim_{y \to +0} \left\| \operatorname{Re}\{a(x)\Phi(x+iy)\} - f(x) \right\|_{L^p(\rho)} = 0, \tag{3.1}$$

где $\rho(x)$ задана формулой (2.1), а $a(x) \neq 0$ есть функция из $C^{\delta}(\mathbb{R})$ для некоторого $\delta > 0$.

3.2. **Задача R_p.** Соответствующая *задача Римана* в $L^p(\rho)$ исследовалась в [2] и имеет следующую формулировку.

Задача R_p. Пусть $f \in L^p(\rho)$, $1 < p < \infty$. Найти функцию $\Phi \in A$, удовлетворяющую

$$\lim_{y\to+0} \left\|\Phi^+(x+iy) - a(x)\,\Phi^-(x-iy) - f(x)\right\|_{L^p(\rho)} = 0, \tag{3.2}$$

где $\Phi^{\pm}$ обозначают нетангенциальные граничные значения функции Φ из $\Pi^{\pm}$. Здесь $\rho(x)$ задана формулой (2.1), а $a(x) \neq 0$ принадлежит $C^{\delta}(\mathbb{R})$ при некотором $\delta > 0$.

4. Функция $\Phi^*(z)$ и свойства симметрии

Пусть $\Phi(z)$ определена при $z \in \Pi^+$. Следуя [1], определим её *сопряжённое отражение* формулой

$$\Phi_*(z) := \overline{\Phi(\overline{z})}, \qquad z \in \Pi^-. \tag{4.1}$$

Таким образом, Φ_* определена в Π^- и является зеркальным отражением функции Φ относительно вещественной оси. Формулу (4.1) можно эквивалентно записать в виде

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi}(z),$$

где черта обозначает комплексное сопряжение значений функции.

4.1. **Основные свойства.** Напомним несколько стандартных фактов о голоморфных и мероморфных функциях, адаптированных из работы Мусхелишвили [1].

(1) Если $\Phi(z)$ голоморфна (соответственно, мероморфна) в Π^+, то функция $\Phi_*(z)$, определённая формулой (4.1), голоморфна (соответственно, мероморфна) в Π^-.

Более того, если

$$\Phi(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n},$$

то $\Phi_*(z)$ получается заменой всех коэффициентов на их комплексно–сопряжённые.

(2) Пусть $\Phi^+(x) := \lim_{\substack{z\to x\\ z\in\Pi^+}} \Phi(z)$ для $x \in \mathbb{R}$. Тогда граничные значения Φ_* из Π^- удовлетворяют соотношению

$$\Phi_*^-(x) = \overline{\Phi^+(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Это следует из того, что при $z \to x$ из Π^- имеем $\overline{z} \to x$ из Π^+.

Следовательно, если функция $\Phi(z)$ определена как

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi(z), & z \in \Pi^+, \\ \Phi_*(z), & z \in \Pi^-, \end{cases}$$

где Φ и Φ_* аналитичны в соответствующих полуплоскостях, то

$$\Phi^-(t) = \overline{\Phi^+(t)}, \qquad \Phi^+(t) = \overline{\Phi^-(t)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

(3) Если $\Psi(z)$ есть интеграл типа Коши

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt,$$

то

$$\Psi_*(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\varphi(t)}}{t - z}\, dt,$$

где Ψ_* задаётся формулой (4.1).

5. Переписывание задачи Римана–Гильберта

Напомним, что

$$\mathrm{Re}\{a(x)\Phi(x+iy)\} = \tfrac{1}{2}\big(a(x)\Phi(x+iy) + \overline{a(x)\Phi(x+iy)}\big).$$

Следовательно, граничное условие (3.1) можно записать в виде

$$\lim_{y\to+0} \Big\| a(x)\Phi(x+iy) + \overline{a(x)\Phi(x+iy)} - 2f(x) \Big\|_{L^p(\rho)} = 0. \tag{5.1}$$

Из (4.1) и (4.2) следует, что граничные значения Φ на $\mathbb{R}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \Phi^+(x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \Phi^-(x) = \overline{\Phi}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5.2}$$

где Φ^+ и Φ^- обозначают нетангенциальные граничные значения из Π^+ и Π^- соответственно.

Подставляя (5.2) в (5.1), получаем эквивалентную форму

$$\lim_{y\to+0} \Big\| \Phi^+(x+iy) + \frac{\overline{a(x)}}{a(x)}\, \Phi^-(x-iy) - \frac{2f(x)}{a(x)} \Big\|_{L^p(\rho)} = 0. \tag{5.3}$$

Таким образом, задача Римана–Гильберта (3.1) сводится к задаче Римана типа (3.2) с коэффициентом и свободным членом

$$\widetilde{a}(x) = -\frac{\overline{a(x)}}{a(x)}, \qquad \widetilde{f}(x) = \frac{2f(x)}{a(x)}.$$

Пусть $\mu = \operatorname{ind} a(x)$. Тогда, поскольку

$$\kappa = \operatorname{ind} \widetilde{a} = -2\mu, \qquad x \in \mathbb{R},$$

введём

$$a_1(x) = \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{-2\mu} \widetilde{a}(x),$$

и определим

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln a_1(t)}{t-z}\,dt.$$

Тогда канонические множители имеют вид

$$S^+(z) = \exp\{\Gamma(z)\}, \quad z \in \Pi^+,$$

$$S^-(z) = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{-2\mu} \exp\{\Gamma(z)\}, \quad z \in \Pi^-,$$

и удовлетворяют факторизации [1]

$$\widetilde{a}(x) = \frac{S^+(x)}{S^-(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, поскольку $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(z)$ для $z \in \Pi^+ \cup \Pi^-$, каноническая функция $S(z)$ удовлетворяет соотношению симметрии

$$\overline{S(z)} = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-2\mu} S(z).$$

6. Основные результаты

Обозначим

$$T_p = \left\{x_k : \alpha_k > \tfrac{p-1}{p}\right\}.$$

Теорема 6.1 (Однородная задача RH_p)**.** *Пусть $T_p \neq \emptyset$. Если $\mu = 0$, то общее решение однородной задачи RH_p ($f \equiv 0$) представимо в виде*

$$\Phi_0(z) = S(z) \sum_{x_k \in T_p} \frac{A_k}{x_k - z},$$

где $A_k \in \mathbb{R}$. В противном случае однородная задача RH_p не имеет нетривиальных решений.

Замечание 6.1. Если $T_p = \emptyset$, то $\Phi \equiv 0$ при всех μ.

Доказательство теоремы 6.1. Мы приведём полное доказательство, учитывающее локальное препятствие в нулях веса ρ, глобальную форму мероморфного продолжения и условие самосопряжённости.

Редукция и мероморфное продолжение. Согласно разделу 5, однородная задача RH_p ($f \equiv 0$) сводится к однородной задаче Римана с коэффициентом скачка $\widetilde{a}(x) = -\overline{a(x)}/a(x)$. Пусть $S^{\pm}$ – канонические множители, соответствующие $\widetilde{a}$, и положим

$$S(z) = \begin{cases} S^+(z), & z \in \Pi^+, \\ S^-(z), & z \in \Pi^-. \end{cases}$$

Определим $\phi(z) := \Phi(z)/S(z)$. На $\mathbb{R}$ соотношение $S^+(x) = \widetilde{a}(x)S^-(x)$ даёт $\phi^+(x) = \phi^-(x)$ почти всюду, поэтому ϕ продолжается мероморфно через $\mathbb{R}$ в функцию на $\mathbb{C}$.

Локальное препятствие в точках x_k и множество T_p. Пусть x_k – нуль веса ρ. В окрестности x_k можно записать

$$\rho(x) \asymp |x - x_k|^{\alpha_k} \rho_k(x),$$

где ρ_k гладка и строго положительна, а $\alpha_k > 0$. Предположим, что ϕ имеет простой полюс в точке x_k. Тогда главная часть Φ вблизи x_k содержит ненулевую кратную функции

$$r_k(z) := \frac{S(z)}{x_k - z}.$$

Для $y > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ запишем

$$\begin{aligned} r_k(x+iy) - \widetilde{a}(x)\, r_k(x-iy) &= \frac{(x_k - x)\big[S^+(x+iy) - \widetilde{a}(x)S^-(x-iy)\big]}{(x_k - x)^2 + y^2} \\ &\quad + \frac{i\,y\big[S^+(x+iy) + \widetilde{a}(x)S^-(x-iy)\big]}{(x_k - x)^2 + y^2} \\ &=: R_1(x,y) + R_2(x,y). \end{aligned}$$

(i) Оценка R_1. Стандартные весовые оценки для канонических множителей в $L^p(\rho)$ (см. [2]) дают $\|R_1(\cdot,y)\|_{L^p(\rho)} \le C$ для всех достаточно малых $y > 0$.

(ii) Нижняя оценка для R_2. Зафиксируем малое $\delta > 0$. Из непрерывности функции $S^+(x+iy) + \widetilde{a}(x)S^-(x-iy)$ и компактности следует существование такой константы $c_1 > 0$ (не зависящей от y), что

$$\big|S^+(x+iy) + \widetilde{a}(x)S^-(x-iy)\big| \ge c_1 \quad \text{при } 0 < y \le y_0,\ |x - x_k| < \delta.$$

Используя также неравенство $\rho(x) \ge c_0\,|x - x_k|^{\alpha_k}$ при $|x - x_k| < \delta$, получаем

$$\|R_2(\cdot,y)\|^p_{L^p(\rho)} \ \gtrsim\ \int_{|x-x_k|<\delta} \frac{y^p\,|x-x_k|^{\alpha_k}}{\big((x-x_k)^2 + y^2\big)^p}\,dx.$$

После замены $x - x_k = yt$ это выражение принимает вид

$$= y^{\,\alpha_k - p + 1} \int_{|t|<\delta/y} \frac{|t|^{\alpha_k}}{(t^2+1)^p}\,dt.$$

Поскольку интеграл по t ограничен снизу положительной константой (достаточно ограничиться областью $1 \le |t| \le 2$), получаем

$$\|R_2(\cdot,y)\|_{L^p(\rho)} \ \gtrsim\ y^{\,(\alpha_k - p + 1)/p}.$$

(iii) Асимптотическое поведение при $1 < p < \infty$. Если $\alpha_k \le \frac{p-1}{p}$, то

$$\alpha_k - p + 1 < (p-1) - p + 1 = 0.$$

Следовательно,

$$\|R_2(\cdot,y)\|_{L^p(\rho)} \ \gtrsim \ y^{\,(\alpha_k-p+1)/p}$$

не стремится к нулю при $y\downarrow 0$ и, более того, расходится, когда $\alpha_k \le \frac{p-1}{p}$. Поэтому для любого $1<p<\infty$ никакая ненулевая кратная функции r_k не может удовлетворять однородному условию скачка, если $\alpha_k \le \frac{p-1}{p}$.

Объединяя пункты (i)-(iii), заключаем, что

$$\|R_1(\cdot,y)+R_2(\cdot,y)\|_{L^p(\rho)} \not\to 0 \quad \text{при } y\downarrow 0$$

всякий раз, когда $\alpha_k \le \frac{p-1}{p}$. Следовательно, главная часть r_k не может удовлетворять однородному скачку ни в одной точке x_k с $\alpha_k \le \frac{p-1}{p}$. Эквивалентно,

$$\phi \text{ голоморфна в каждой точке } x_k \notin T_p, \text{ где } T_p := \{x_k : \alpha_k > (p-1)/p\}.$$

Поскольку $\sum_k \alpha_k < \infty$, лишь конечное число показателей α_k превосходит $(p-1)/p$, то множество T_p конечно. Поэтому любые особенности функции ϕ на $\mathbb{R}$ могут быть лишь (не более чем простыми) полюсами в точках множества T_p.

Глобальная форма и исключение полиномиальной части. Поскольку $\Phi\in A$ и S имеет не более чем полиномиальный рост, функция ϕ также имеет полиномиальный рост на бесконечности. Следовательно,

$$\phi(z) = P(z) + \sum_{x_k\in T_p} \frac{A_k}{x_k - z},$$

где P – многочлен, а сумма конечна. Поэтому

$$\Phi(z) = S(z)P(z) \ + \ S(z)\sum_{x_k\in T_p} \frac{A_k}{x_k - z}.$$

Если $T_p=\varnothing$, то $\Phi = S\,P$. Из аргумента единственности для самосопряжённой однородной задачи из работы [2] следует, что этот полиномиальный множитель должен обращаться в нуль; значит, $P\equiv 0$. Следовательно, в общем случае

$$\Phi_0(z) = S(z)\sum_{x_k\in T_p} \frac{A_k}{x_k - z}.$$

Самосопряжённость и индекс μ. В постановке RH_p граничные значения удовлетворяют условию $\Phi^-(x)=\overline{\Phi^+(x)}$ на $\mathbb{R}$. Используя каноническую симметрию (раздел 5), $\overline{S^+(x)} = ((x-i)/(x+i))^{-2\mu} S^-(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$, получаем

$$S^-(x)\sum_{x_k\in T_p}\frac{A_k}{x_k-x} \ = \ \Big(\frac{x-i}{x+i}\Big)^{-2\mu} S^-(x)\sum_{x_k\in T_p}\frac{\overline{A_k}}{x_k-x}.$$

Так как $(x_k-x)^{-1}\in\mathbb{R}$ при $x\ne x_k$ и $S^-(x)\ne 0$ почти всюду, заключаем, что

$$\sum_{x_k\in T_p}\frac{A_k}{x_k-x} \ = \ \Big(\frac{x-i}{x+i}\Big)^{-2\mu}\sum_{x_k\in T_p}\frac{\overline{A_k}}{x_k-x} \quad \text{почти всюду на } \mathbb{R}.$$

Если $\mu \neq 0$, то унимодулярный множитель непостоянен, и это вынуждает все A_k быть нулевыми, а значит $\Phi \equiv 0$. Если $\mu = 0$, множитель равен 1, и потому $A_k = \overline{A_k}$, то есть $A_k \in \mathbb{R}$.

Заключение. Для $1 < p < \infty$ однородные самосопряжённые решения имеют в точности вид

$$\Phi_0(z) = S(z) \sum_{x_k \in T_p} \frac{A_k}{x_k - z}, \qquad A_k \in \mathbb{R}.$$

При $\mu \neq 0$ существует только тривиальное решение. □

Сравнение с ранее известными результатами. Проведённый анализ показывает, что для всех $1 < p < \infty$ однородная задача Римана–Гильберта допускает лишь конечное число линейно независимых самосопряжённых решений, соответствующих конечному множеству $T_p = \{x_k : \alpha_k > (p-1)/p\}$. Напротив, в случае $p = 1$, исследованном Г. М. Айрапетяном [5], однородная задача имеет бесконечно много решений. При $p \downarrow 1$ порог $(p-1)/p$ убывает к нулю, и число допустимых полюсов стремится к бесконечности, что приводит к поведению, характерному для случая $p = 1$.

Основные предположения. На протяжении всей теории неоднородной задачи мы предполагаем, что нули $\{x_k\}$ веса ρ образуют дискретную последовательность, которая может иметь точку накопления только в некоторой конечной точке x_0, и что выполнены условия (2.2)-(2.3). Эти предположения будут использоваться в Теоремах 6.2 и 6.3.

Теорема 6.2 (Неоднородная задача RH_p; $\kappa \geq 0$)**.** *Пусть $f \in L^p(\rho)$, $T_p \neq \emptyset$, и последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям* (2.2)-(2.3)*. Предположим, что*

$$\kappa = \operatorname{ind} \widetilde{a} = -2\mu \geq 0 \qquad (\textit{эквивалентно, } \mu \leq 0).$$

Тогда всякое решение неоднородной задачи RH_p можно записать в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \tfrac{1}{2}\big[\Phi_1(z) + \Phi_1^*(z)\big],$$

где Φ_0 – общее самосопряжённое решение соответствующей однородной задачи (Теорема 6.1), $\Phi_1^*(z) := \overline{\Phi_1(\overline{z})}$, и

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(z), \tag{6.1}$$

где

$$\Phi_k(z) = \frac{S(z)}{2\pi i\,(x_k - z)} \int_{X_k} \frac{\widetilde{f}(t)\,(x_k - t)}{S^+(t)(t-z)}\,dt, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.2}$$

а X_k – положительно ориентированный малый контур, охватывающий x_k и не содержащий других точек x_j.

Теорема 6.3 (Неоднородная задача RH_p; $\kappa < 0$)**.** *Пусть $f \in L^p(\rho)$, $T_p \neq \emptyset$, и последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям* (2.2)-(2.3)*. Если $\kappa = \operatorname{ind} \widetilde{a} < 0$, то неоднородная задача Римана–Гильберта RH_p разрешима тогда и только тогда, когда выполнены* моментные условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{f}(t)}{S^{+}(t)} \frac{dt}{(t+i)^j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, -\kappa, \tag{6.3}$$

где $S^{\pm}$ – канонические множители, соответствующие функции $\widetilde{a}(x) = -\overline{a(x)}/a(x)$, введённые в разделе 5.

Если эти условия выполнены, то решение единственно и имеет вид

$$\Phi(z) \;=\; \Phi_1(z), \qquad \Phi_1(z) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(z),$$

где

$$\Phi_k(z) \;=\; \frac{S(z)}{2\pi i\,(x_k - z)} \int_{X_k} \frac{\widetilde{f}(t)\,(x_k - t)}{S^{+}(t)(t - z)}\,dt, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

а X_k – положительно ориентированный малый контур, охватывающий x_k и не содержащий других точек x_j.

Замечание 6.2. Операция со звёздочкой $\Phi^*(z) := \overline{\Phi(\overline{z})}$ играет здесь принципиальную роль: она сохраняет аналитичность в Π^-, обеспечивая самосопряжённость решений. Именно поэтому общее решение в Теореме 6.2 записывается в виде $\frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_1^*)$.

Схема доказательства Теоремы 6.2. Первым шагом является сведение исходной задачи RH_p к стандартной задаче Римана с коэффициентом $\widetilde{a}(x) = -\overline{a(x)}/a(x)$ и свободным членом $\widetilde{f} = 2f/a$, как описано в разделе 5.

Второй шаг, а именно решение этой задачи Римана с помощью канонической факторизации и интегралов типа Коши в $L^p(\rho)$, уже был установлен в [2]. В частности, при предположениях (2.2)-(2.3), представление (6.2)-(6.1) частного решения Φ_1 дословно следует из [2]. Добавляя общее самосопряжённое решение Φ_0 однородной задачи (Теорема 6.1), получаем требуемую форму. □

Схема доказательства Теоремы 6.3. Здесь снова первым шагом является редукция к задаче Римана с коэффициентом $-\overline{a}/a$, выполненная в разделе 5.

На втором шаге, когда $\kappa = -2\mu < 0$, разрешимость и единственность неоднородной задачи Римана были исследованы в [2]. Там было показано, что задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнены моментные условия (6.3), обеспечивающие устранимость особенности на бесконечности. В этом случае решение единственно и задаётся формулами (6.1)-(6.2), тогда как единственность следует из того, что однородная задача имеет только тривиальное решение (Теорема 6.1). □

Следствие 6.1 (Задача Дирихле как частный случай)**.** *Если* $a(x) \equiv 1$*, то* $\kappa = \operatorname{ind} \frac{\overline{a}}{a} = 0$*, следовательно,* $\mu = 0$ *и канонические множители удовлетворяют* $S^{\pm} \equiv 1$*. В этом случае* RH_p *сводится к задаче Дирихле для аналитических функций в верхней полуплоскости с весом* ρ*:*

$$\lim_{y \to +0} \big\| \operatorname{Re} \Phi(x+iy) - f(x) \big\|_{L^p(\rho)} = 0.$$

Частное решение можно представить в виде ряда

$$\Phi_D(z) \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{kD}(z), \tag{6.4}$$

где

$$\Phi_{kD}(z) \; = \; \frac{1}{\pi i \, (x_k - z)} \int_{X_k} \frac{f(t)\,(x_k - t)}{t - z} \, dt, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.5}$$

а X_k *– положительно ориентированный малый контур, охватывающий* x_k*.*

Если $T_p = \emptyset$*, то это решение единственно с точностью до добавочной мнимой константы. Если* $T_p \neq \emptyset$*, то полное семейство решений получается добавлением однородной части из Теоремы 6.1:*

$$\Phi(z) = \Phi_D(z) \; + \sum_{x_k \in T_p} \frac{A_k}{x_k - z}, \qquad A_k \in \mathbb{R}.$$

7. Заключение

В настоящей работе исследована краевая задача Римана–Гильберта в весовом пространстве $L^p(\rho)$, где вес ρ имеет бесконечно много нулей, а коэффициент $a(x)$ является не обращающейся в нуль гёльдеровской функцией. Путём сведения задачи к стандартной задаче Римана в верхней полуплоскости получены необходимые и достаточные условия разрешимости, а также явные представления решений.

Для однородного случая показано, что нетривиальные самосопряжённые решения существуют только при $\mu = 0$, и в этом случае общее решение задаётся мероморфной суммой по множеству особенностей T_p с вещественными вычетами. Если $T_p = \varnothing$, единственное решение тривиально.

Для неоднородного случая, при выполнении условий разделённости и суммируемости (2.2)-(2.3) на множестве нулей веса ρ, получены явные представления частных решений в терминах интегралов типа Коши и описано их сочетание с однородным решением. Когда $\kappa = -2\mu < 0$, разрешимость дополнительно требует выполнения ортогональных условий моментного типа, что согласуется с классической теорией задач Римана.

Эти результаты расширяют более ранние исследования задач Римана с конечным индексом на случай весов с бесконечным индексом, и используемый подход может быть адаптирован к родственным краевым задачам для аналитических функций в более общих областях.

Все результаты сформулированы для $1 < p < \infty$, что обеспечивает необходимые весовые интегральные оценки и свойства канонических множителей.

Abstract. We study a Riemann–Hilbert boundary value problem in the upper half-plane within the weighted space $L^p(\rho)$, where $1 < p < \infty$ and the weight ρ admits infinitely many zeros. Necessary and sufficient conditions are obtained for normal solvability and for the associated operator to be Noetherian, extending the classical finite-index theory to weights with infinitely many zeros. Explicit solution formulas are derived for both homogeneous and inhomogeneous problems, with special attention to the case of negative index.

Список литературы

[1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., Наука (1968).
[2] S. A. Aghekyan, “On a Riemann boundary value problem in the space of p-summable functions with infinite index”, J. Contemp. Math. Anal., **57**, 3 – 11 (2022).
[3] H. M. Hayrapetyan and S. A. Aghekyan, “On a Riemann boundary value problem for weighted spaces in the half-plane”, Armenian Journal of Mathematics, **11**, no. 7, 1 – 14 (2019).
[4] H. M. Hayrapetyan, S. A. Aghekyan, and A. D. Ohanyan, “On a Riemann Boundary Value Problem with Infinite Index in the Half-plane”, Springer Proc. Math. Stat., **1**, 221– 241 (2021).
[5] H. M. Hayrapetyan, “On a boundary value problem with infinite index”, Springer Proc. Math. Stat., **291**, 388 – 398 (2018).
[6] B. V. Khvedelidze, “The method of Cauchy type integrals in discontinuous boundary value problems of the theory of holomorphic functions of a single complex variable [in Russian], Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. VINITI, **7**, 5 – 162 (1975).
[7] K. S. Kazaryan, F. Soria, I. M. Spitkovskiĭ, “The Riemann boundary problem in spaces with a weight that admits singularities”, Dokl. Math. **55**, 717 – 719 (1997).
[8] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., Физматгиз (1977).
[9] И. Б. Симоненко, “Краевая задача Римана для пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах с весами”, Изв. АН СССР. Сер. мат. **28**, 277 – 306 (1964).
[10] И. Б. Симоненко, “Краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами”, Докл. АН СССР, **163**, no. 4, 746 –749 (1965).
[11] Б. В. Хведелидзе, “О римановo–приваловской разрывной задаче для нескольких функций”, Докл. АН СССР **17**, no. 10, 865 – 872 (1956).

[12] Н. Е. Товмасян и А. Г. Бабаян, “Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в полупространстве в классе функций полиномиального роста”, Неклассические уравнения математической физики, Новосибирск, 273 – 282 (2007).
[13] N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific, Singapore (1994).
[14] А. П. Солдатов, “Методы теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай”, Матем. сб. **182**, no. 5, 1070 – 1100 (1991).
[15] K. S. Kazaryan, “Summability of generalized Fourier series and Dirichlet's problem in $L^p(d\mu)$ and weighted H^p spaces $(p > 1)$”, Anal. Math. **13**, 173 – 197 (1987).
[16] Г. М. Айрапетян, В. А. Бабаян, “О задаче Дирихле в пространстве непрерывных функций с весом”, Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика, **112**, no. 17, 5 – 16 (2001).
[17] Г. М. Айрапетян и П. Э. Меликсетян, “Задача Гильберта в полуплоскости в пространствах с весом”, Изв. НАН Армении. Математика **38**, no. 6, 17 – 32 (2003).
[18] Г. М. Айрапетян и В. Петросян, “Задача Гильберта в полуплоскости в смысле сходимости в L^1”, Изв. НАН Армении, Математика **32**, no. 5, 18 – 31 (1997).
[19] H. M. Hayrapetyan and S. A. Aghekyan, “On a Riemann boundary value problem in the half-plane in the class of weighted continuous functions”, J. Contemp. Math. Anal., **54**, 79 – 89 (2019).
[20] S. A. Aghekyan, “On a Hilbert problem in the half-plane in the class of continuous functions”, Proceedings of the Yerevan State University A: Physical and Mathematical Sciences **50**, no. 2, 9 – 14 (2016).

Поступила 23 августа 2025

После доработки 28 ноября 2025

Принята к публикации 07 декабря 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 2, 2026, стр. 17 – 28.

КОНТИНУУМ НЕИЗОМОРФНЫХ ГРУПП С ТРЕМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ ВЕРОЯТНОСТНЫМ ТОЖДЕСТВОМ $x^n = 1$

В. С. АТАБЕКЯН, А. А. БАЙРАМЯН, В. Г. МИКАЕЛЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *avarujan@ysu.am; arman.bayramyan@ysu.am; vmikaelian@ysu.am*

Посвящается 95-летию со дня рождения С. И. Адяна

Аннотация. В данной статье мы строим континуальное семейство неизоморфных групп с тремя образующими, в которых тождество $x^n = 1$ выполняется с вероятностью 1, при этом не являясь тождеством ни в одной из этих групп. Это решает недавний вопрос о связи между вероятностным и универсальным выполнением групповых тождеств. Наша конструкция использует n-периодические произведения циклических групп порядка n и относительно свободных групп с двумя образующими, удовлетворяющих тождествам вида $[x^{pn}, y^{pn}]^n = 1$. Мы доказываем, что в каждом из этих произведений вероятность выполнения тождества $x^n = 1$ равна 1, несмотря на то, что это тождество не выполняется во всей группе ни для одной из них.

MSC2020 numbers: 20P05; 20F69; 20F50.

Ключевые слова: вероятностное тождество; вероятностный закон; группа с n-кручением; n-периодическое произведение; асимптотический бернсайдовый закон.

1. Введение

Взаимосвязь между теорией групп и теорией вероятностей стала активно развивающейся областью исследований в современной алгебре. Одним из применений теории вероятностей в теории групп является изучение вероятностных утверждений, которые дают альтернативные характеризации групп. Одним из самых ранних подобных результатов является следующее наблюдение: если вероятность того, что два случайно выбранных элемента конечной (или компактной) группы коммутируют, больше $\frac{5}{8}$, то группа абелева (см. [1]). Связанный с этим результат утверждает, что если G — конечная группа, в которой вероятность того, что два случайно выбранных элемента порождают разрешимую подгруппу, превышает $\frac{11}{30}$, то сама группа G разрешима [2].

[1]Работа В. С. Атабекяна и В. Г. Микаеляна поддержана Комитетом по высшему образованию и науке РА, исследовательский проект № 25RG-1A187, работа А. А. Байрамяна поддержана Комитетом по высшему образованию и науке РА, исследовательский проект № 23AA-1A028 и исследовательский проект № 23RL-1A027.

Подобные результаты можно обобщить, введя вероятностные меры на конечно порожденных группах. Естественный подход заключается в том, чтобы зафиксировать систему образующих и рассмотреть последовательность равномерных мер на шарах радиуса k графа Кэли группы, а затем перейти к пределу при $k \to \infty$. Ниже мы приводим общее определение для конечно порожденных групп, следуя [3].

Пусть $M = \{\mu_k\}$ — последовательность вероятностных мер на конечно порожденной группе G, и пусть w — произвольное слово в свободной группе F_m ранга m. Мы определяем вероятность того, что в G выполняется групповое тождество (закон) $w = 1$ относительно последовательности мер M, как число

$$\mathbb{P}_M(w = 1 \text{ в } G) = \limsup_{k\to\infty} \mu_k(\{(g_1, \dots, g_m) \in G^m \ : \ w(g_1, \dots, g_m) = 1\}). \tag{1.1}$$

Если

$$\mathbb{P}_M(w = 1 \text{ в } G) = 1,$$

то мы говорим, что слово w является M-вероятностным групповым тождеством (почти тождеством) для группы G. Значение вероятности $\mathbb{P}_M(w = 1 \text{ в } G)$ несет определенную информацию о группе G. Например, как показано в [4] и [3] соответственно, если $\mathbb{P}([x, y] = 1 \text{ в } G) > 0$ или $\mathbb{P}(x^2 = 1 \text{ в } G) > 0$, то группа является виртуально абелевой (см. также [5]). Подробный обзор результатов по этой теме можно найти в [3].

В [3] сформулирован следующий вопрос (см. Вопрос 13.3): Пусть $w \in F_m$ — произвольное слово, G — конечно порожденная группа с системой образующих S, и $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \dots, R_n^{(d)}$ — независимые случайные блуждания на G относительно S. Если

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(w(R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \dots, R_n^{(d)}) = 1 \text{ в } G\big) = 1,$$

следует ли из этого, что $w = 1$ является тождеством в G?

Согласно известной работе С.И. Адяна [6], для всех $m \geq 2$ и нечетных $n \geq 665$ симметричное случайное блуждание на свободных бернсайдовых группах $B(m, n)$ невозвратно. На основании этого результата потенциальный контрпример к поставленной проблеме можно искать среди класса групп, заданных соотношениями вида $A^n = 1$.

Этот вопрос рассматривался в [7] и [8], где авторы, используя разные подходы, строят конечно порожденные контрпримеры к поставленной задаче. В частности, в [8] построена группа с тремя образующими, в которой $x^n = 1$ является вероятностным тождеством для всех достаточно больших нечетных n, но которая содержит бесконечную циклическую подгруппу. Это означает, что тождество $x^n = 1$ не выполняется во всей группе.

В данной работе мы усилим этот результат, построив континуальное семейство неизоморфных групп с тремя образующими, каждая из которых обладает тем свойством, что вероятность выполнения тождества $x^n = 1$ равна 1. В то же время это тождество не выполняется ни в одной из этих групп. В качестве вероятностных мер на G мы зафиксируем естественную последовательность вероятностных мер на графе Кэли группы G. Пусть $B_{G,S}(k)$ обозначает шар радиуса k в графе Кэли с центром в единичном элементе группы G относительно некоторого фиксированного симметричного множества образующих S, и пусть $M = \mu_k$, где μ_k — равномерное распределение на $B_{G,S}(k)$, что означает $\mu_k(g) = \frac{1}{|B_{G,S}(k)|}$, если $g \in B_{G,S}(k)$, и $\mu_k(g) = 0$ в противном случае.

Наш подход основан на двух конструкциях, предложенных С.И. Адяном: понятии n-периодического произведения, развитом в [9], и бесконечной системе независимых групповых тождеств, построенной в [10] и [11, Гл. VII]. Более конкретно, мы рассматриваем систему тождеств вида $\{[x^{pn}, y^{pn}]^n = 1\}$, где $n \geq 1003$ — фиксированное нечетное число, а p пробегает фиксированное множество $\mathcal{P}$ простых чисел. Пусть $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$ обозначает свободную группу ранга 2 со свободными образующими b_1, b_2 в многообразии групп, удовлетворяющих всем тождествам $\{[x^{pn}, y^{pn}]^n = 1\}$ для $p \in \mathcal{P}$. Согласно результату С.И. Адяна [11], для различных множеств простых чисел $\mathcal{P}$ группы $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$ неизоморфны. Далее мы рассматриваем n-периодическое произведение $\mathbb{A}_\mathcal{P} = \mathbb{F}(n, \mathcal{P}) *^{\mathbf{n}} Z_n$, где Z_n — циклическая группа порядка n с образующей a. Очевидно, что $\mathbb{A}_\mathcal{P}$ является группой с тремя образующими.

Теперь сформулируем наш основной результат:

Теорема 1.1. *Для любого достаточно большого фиксированного нечетного числа n выполняется следующее:*

- (i) *В группе $\mathbb{A}_\mathcal{P} = \mathbb{F}(n, \mathcal{P}) *^{\mathbf{n}} Z_n$ тождество $x^n = 1$ является M-вероятностным тождеством.*
- (ii) *В группе $\mathbb{A}_\mathcal{P}$ тождество $x^n = 1$ не выполняется.*
- (iii) *Существует континуальное семейство неизоморфных групп с тремя образующими вида $\mathbb{A}_\mathcal{P} = \mathbb{F}(n, \mathcal{P}) *^{\mathbf{n}} Z_n$, соответствующих различным подмножествам $\mathcal{P}$ простых чисел.*

Группы $\mathbb{A}_\mathcal{P}$ в Теореме 1.1 дают отрицательный ответ на упомянутый выше вопрос в значительно усиленной форме.

Статья организована следующим образом. В Разделе 2 мы описываем ключевые свойства групп $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$, которые составляют основу нашей конструкции. Раздел 3 содержит обзор некоторых соответствующих фактов о n-периодических произведениях. В Разделе 4 мы демонстрируем необходимые свойства n-кручёных групп. В Разделе 5 приводится оценка роста для свободных бернсайдовых групп с тремя образующими, что является важнейшим элементом в доказательстве основной теоремы. В Разделе 6 мы объединяем эти инструменты для доказательства основной теоремы.

Настоящие результаты связаны с работами [12, 13, 14], в которых мы нашли континуум разрешимых нехопфовых (неметанильпотентных) групп с тремя образующими, которые порождают различные многообразия групп. Это широкий класс групп, для которых проблема 16 Хигмана из [15] имеет положительный ответ.

На протяжении всей статьи предполагается, что n — достаточно большое нечетное число. Для каждого результата мы указываем диапазон n, при котором он справедлив.

2. Бесконечная независимая система групповых тождеств от двух переменных

Проблема конечного базиса, поставленная Б. Нейманом в 1937 году, заключается в том, существуют ли бесконечные независимые системы групповых тождеств, т.е. системы, в которых ни одно соотношение не является следствием остальных. В 1969 году С.И. Адян построил примеры таких систем от двух переменных, тем самым разрешив эту проблему [10]. Этот результат позже был включен в его монографию 1975 года [11], где он показал, что для любого нечетного $n \geq 1003$ следующее семейство тождеств от двух переменных является независимым:

$$\{[x^{pn}, y^{pn}]^n = 1\}, \tag{2.1}$$

где параметр p пробегает все простые числа (см. [11, Глава VII], Теорема 2.1). Из этого результата следует, что для любого нечетного $n \geq 1003$ существует континуум различных многообразий $\mathcal{A}_n(\mathcal{P})$, соответствующих различным подмножествам $\mathcal{P}$ множества простых чисел. Следовательно, относительно свободные группы $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$ ранга 2 в многообразиях $\mathcal{A}_n(\mathcal{P})$ для различных множеств $\mathcal{P}$ неизоморфны. Дополнительные свойства этих групп изучались в [16]. Как показано в [11, Раздел 2, Глава VII] (см. также [16]), группа имеет следующее копредставление:

$$\mathbb{F}(n, \mathcal{P}) = \left\langle b_1, b_2 \mid A^n = 1, A \in \mathcal{E} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha \right\rangle, \tag{2.2}$$

где слова $A \in \mathcal{E}_\alpha$ выбираются особым образом и называются отмеченными элементарными периодами (подробное определение элементарных периодов, множеств $\mathcal{K}_\alpha, \overline{\mathcal{M}}_\alpha$ и т.д. см. в [10], [11], [16]).

Для простоты мы будем обозначать $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$ через $\mathbb{F}$ для фиксированной пары $(n, \mathcal{P})$.

Следующие три леммы были установлены в [16] ($n \geq 1003$):

Лемма 2.1 (Лемма 8, [16])**.** *Для любого слова X, не равного 1 в группе $\mathbb{F}$, существуют такие слова T и A, что $X = TA^rT^{-1}$ в $\mathbb{F}$ для некоторого целого r, где $A \in \mathcal{E}$ или A является неотмеченным элементарным периодом некоторого ранга, и A^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$.*

Лемма 2.2 (Лемма 4, [16])**.** *Если A — отмеченный элементарный период некоторого ранга γ, и A^q входит в некоторое слово из класса $\mathcal{K}_{\gamma-1}$, то A имеет порядок n в группе $\mathbb{F}$.*

Лемма 2.3 (Лемма 5, [16])**.** *Если A — неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ, и A^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$, то A имеет бесконечный порядок в $\mathbb{F}$.*

Из Лемм 2.1, 2.2 и 2.3 непосредственно следует:

Лемма 2.4. *Каждый элемент группы $\mathbb{F}$ сопряжен либо со степенью элемента бесконечного порядка, либо со степенью элемента порядка n.*

3. n-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Понятие n-периодических произведений групп было введено Адяном в [9]. Он показал, что операция n-периодического произведения с нечетным показателем $n \geq 665$ обладает несколькими важными свойствами: она точна, ассоциативна и удовлетворяет свойству наследственности для подгрупп. Эти свойства также характерны для прямых и свободных произведений, что дает решение известной проблемы Мальцева (подробности см. также в [17]). Эта операция, обозначаемая $\prod_{i\in I}^{\mathbf{n}} G_i$, определяется для нечетных $n \geq 665$ как факторгруппа свободного произведения заданного семейства групп $\{G_i\}$ по специфической нормальной подгруппе, определяемой системой соотношений вида $A^n = 1$.

Следующие две леммы из [9] раскрывают ключевые свойства n-периодических произведений для нечетных $n \geq 665$.

Лемма 3.1 (Теорема 1, [9])**.** *Группы $G_i, i \in I$ канонически вкладываются в $\prod_{i\in I}^{\mathbf{n}} G_i$ в качестве подгрупп.*

Лемма 3.2 (Теорема 7, [9])**.** *Для каждого элемента* $x \in \prod_{i\in I}^{\mathbf{n}} G_i$*, либо* $x^n = 1$ *в* $\prod_{i\in I}^{\mathbf{n}} G_i$*, либо* x *сопряжен с элементом некоторой подгруппы* G_i *группы* $\prod_{i\in I}^{\mathbf{n}} G_i$*.*

Как показано в [18], утверждение Леммы 3.2 является характеристическим для n-периодических произведений, т.е. n-периодическое произведение заданного семейства групп однозначно определяется свойствами, указанными в Лемме 3.2.

4. n-КРУЧЁНЫЕ ГРУППЫ

Пусть S — групповой алфавит, $\mathcal{R}$ — множество слов в этом алфавите, и пусть $n > 1$ — фиксированное натуральное число. Рассмотрим группу G, заданную копредставлением

$$G = \langle S \mid R^n = 1,\ R \in \mathcal{R}\rangle. \tag{4.1}$$

Определение 4.1. Мы говорим, что группа (4.1) является n-кручёной группой (см. [19], Определение 1.1) или частичной бернсайдовой группой периода n (см. [20], Определение I.1), если для любого элемента $y \in G$ либо $y^n = 1$, либо y имеет бесконечный порядок.

Простейшими примерами n-кручёных групп являются циклическая группа порядка n и бесконечная циклическая группа. Также ясно, что свободные бернсайдовы группы и абсолютно свободные группы любого ранга являются n-кручёными группами для любого натурального n.

Из равенства (2.2) следует, что каждая из групп $\mathbb{F}(n,\mathcal{P})$ имеет копредставление вида (4.1). Следовательно, из Определения 4.1 и Леммы 2.4 мы заключаем:

Лемма 4.1. *Группы* $\mathbb{F}(n,\mathcal{P})$ *являются* n*-кручёными группами.*

Следующее утверждение было доказано в [19].

Лемма 4.2 (Теорема 1.1, [19])**.** n*-периодическое произведение любого семейства* n*-кручёных групп само является* n*-кручёной группой* ($n \geq 665$)*.*

Объединяя Определение 4.1 с леммами 4.1 и 4.2, получаем:

Лемма 4.3. *Группы* $\mathbb{A}_{\mathcal{P}} = \mathbb{F}(n,\mathcal{P}) *^{\boldsymbol{n}} Z_n$ *являются* n*-кручёными группами* ($n \geq 1003$)*.*

Пусть G — произвольная n-кручёная группа (т.е. частичная бернсайдова группа периода n), где n — достаточно большое нечетное число (например,

$n > 10^{100}$). Согласно Предложению III.4 в [20], любая частичная бернсайдова группа G периода n может быть аксиоматически задана в виде $G = B_C(S, n) = \langle S \mid R^n = 1,\, R \in C\rangle$, где C — некоторое частичное бернсайдово множество в алфавите S (см. Определения II.45 и II.46, [20]). С другой стороны, согласно Теореме III.3 в [20], G также допускает специальное градуированное копредставление вида

$$G = G_C(\infty) = \langle S \mid A^n = 1,\, A \in R\rangle, \tag{4.2}$$

которое известно как минимальное частичное бернсайдово задание (MPBP) группы G (см. Определение II.47, [20]).

Для группы $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ зафиксируем систему образующих $S = \{a^{\pm 1}, b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}\}$ и рассмотрим соответствующее MPBP (4.2). Поскольку все утверждения в Главах II–IV работы [20] справедливы для частичных бернсайдовых групп, они также применимы к $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$. Обозначим через $S' = \{b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}\}$ систему образующих группы $\mathbb{F}$.

Нам понадобятся Леммы 4.4–4.9, доказанные в [20] на основе монографии [21] для произвольных частичных бернсайдовых групп. Мы приводим их здесь специально для группы $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$.

Лемма 4.4 (Лемма IV.3, [20]). *Пусть W — произвольное слово в алфавите S. Предположим, что U — кратчайшее слово такое, что W сопряжено с некоторой степенью U в группе $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$. Если буква $s \in S$ встречается в U, то она также должна встречаться в W.*

Лемма 4.5 (Лемма II.49 [20] (см. также Лемму 18.1, [21])). *Каждое слово сопряжено в ранге $i \geq 0$ со степенью некоторого периода ранга $j \leq i$ или со степенью простого слова в ранге i.*

Лемма 4.6 (Предложение III.9 [20]). *Если слово X, представляющее нетривиальный элемент $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$, сопряжено в $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ со степенью периода U, то $|U| \leq |X|$.*

Лемма 4.7 (Теорема II.57 [20] (см. также Лемму 19.5, [21])). *Пусть p — участок контура приведенной диаграммы D, метка которого является A-периодической, где A — простое слово в ранге $r(D)$ или период ранга $k \leq r(D)$, причем в последнем случае в D нет клеток ранга k, A-совместимых с p. (Если p — циклический участок, то мы дополнительно требуем, чтобы $Lab(p) = A^m$ для некоторого целого m). Тогда p является гладким участком ранга $|A|$ на контуре D.*

Лемма 4.8 (Теорема II.26 [20] (см. также Теорему 17.1[21]))**.** *Пусть D — круговая A-карта с контуром qt или кольцевая A-карта с контурами q и t. Если q — гладкий участок, то $\overline{\beta}|q| \leq |t|$ (равенство достигается тогда и только тогда, когда $|q| = |t| = 0$).*

Лемма 4.9 (Лемма II.28 [20] (см. также Лемму 17.1 [21]))**.** *Пусть D — кольцевая A-карта с контурами p и q. Тогда существует путь t, соединяющий вершины o_1 и o_2 путей p и q соответственно, такой что $|t| < \gamma(|p| + |q|)$.*

Следующее утверждение непосредственно следует из Леммы 4.4.

Лемма 4.10. *Пусть V — слово в алфавите S в группе $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$, и предположим, что V сопряжено с некоторым словом W в алфавите S'. Пусть U — кратчайшее слово такое, что V сопряжено со степенью U в $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$. Тогда слово U является словом в алфавите S'.*

Доказательство. Если U — кратчайшее слово такое, что V сопряжено со степенью U в $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$, то U также является кратчайшим словом, таким что W сопряжено со степенью U в $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$. По Лемме 4.4, любая буква $s \in S$, входящая в U, должна входить и в W. Поскольку W содержит только буквы из множества $S' = \{b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}\}$, отсюда следует, что U также является словом в алфавите $\{b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}\}$. □

Лемма 4.11. *Пусть V — слово в алфавите S, и предположим, что V сопряжено с некоторым словом W в алфавите S' в группе $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$. Тогда существует циклический сдвиг V_1 слова V, такой что*

$$V_1 = TU^kT^{-1},$$

где U — слово в алфавите S', и выполняются следующие неравенства:

$$\overline{\beta}|U^k| < |V| \quad \text{и} \quad |T| < \gamma(|V| + |U^k|).$$

Доказательство. Пусть U_1 — кратчайшее слово такое, что V сопряжено со степенью U_1 в $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$. По Лемме 4.10, U_1 является словом в алфавите $\{b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}\}$. По Лемме 4.5, слово U_1 сопряжено с U^t для некоторого слова U, где U является либо элементарным периодом некоторого ранга, либо словом, простым во всех рангах. В первом случае из Леммы 4.6 следует $|U| \leq |U_1|$; во втором случае неравенство $|U| \leq |U_1|$ следует из определения простого слова. Поскольку U_1 — кратчайшее слово такое, что V сопряжено со степенью U_1, мы должны иметь $|U| = |U_1|$. Следовательно, по Лемме 4.10, U также является словом в алфавите $\{b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}\}$.

Рассмотрим минимальную кольцевую диаграмму Δ с граничными путями p и q, помеченными U^k и V^{-1} соответственно. По Лемме 4.7, путь p является гладким. Таким образом, по Лемме 4.8 имеем:

$$\overline{\beta}|p| = \overline{\beta}|U^k| < |V|.$$

По Лемме 4.9, диаграмму Δ можно разрезать вдоль пути t от точки o_1 на p до точки o_2 на q, получив дисковую диаграмму с граничной меткой

$$V_1 = TU_2^k T^{-1},$$

где V_1 — циклический сдвиг V, U_2 — циклический сдвиг U, а T — метка пути t. Более того,

$$|T| = |t| < \gamma(|p| + |q|) = \gamma(|V| + |U^k|).$$

Без потери общности можно считать, что $U_2 = U$, так как любой циклический сдвиг слова над S' по-прежнему является словом над S'. □

Пусть $B_{\mathbb{A}_\mathcal{P}}(r)$ обозначает шар радиуса r в графе Кэли группы $\mathbb{A}_\mathcal{P}$ относительно системы образующих S, а $B_\mathbb{F}(r)$ обозначает шар радиуса r в графе Кэли группы $\mathbb{F}$ относительно ее системы образующих S'.

Из Леммы 4.11 следует:

Лемма 4.12. *Пусть V — слово в алфавите $S^{\pm 1}$ в группе $\mathbb{A}_\mathcal{P}$, и предположим, что V сопряжено со словом W в алфавите S'. Тогда $V = XTU^kT^{-1}X^{-1}$, где:*

- *U^k представляет элемент $u \in B_\mathbb{F}\left(\frac{1}{\overline{\beta}}|V|\right)$,*
- *T представляет элемент $z \in B_{\mathbb{A}_\mathcal{P}}(\gamma(1 + \frac{1}{\overline{\beta}})|V|)$,*
- *X является префиксом или суффиксом слова V.*

Мы используем принцип наименьшего параметра (LPP) (см. страницы 165–166 [21] или страницы 8–9 [20]). Учитывая, что слово длины r имеет ровно r циклических сдвигов, из Леммы 4.12 вытекает следующий результат:

Лемма 4.13. *Пусть d_r — количество слов V длины $\leq r$ в алфавите S в группе $\mathbb{A}_\mathcal{P}$, которые сопряжены с некоторым словом W в алфавите S'. Тогда*

$$d_r < r \cdot \left|B_\mathbb{F}\left(\frac{1}{\overline{\beta}}r\right)\right| \cdot |B_{\mathbb{A}_\mathcal{P}}(3\gamma r)|.$$

5. О росте свободной бернсайдовой группы ранга 3

Пусть G — группа, порожденная конечным множеством S. Функция роста группы G относительно S, обозначаемая $\gamma_{G,S}(s)$, — это число элементов $g \in G$, которые можно представить как произведение не более чем s образующих из S или их обратных. Через $\gamma_{B(m,n)}(s)$ и $\gamma_{F_m}(s)$ мы обозначаем функции роста свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ и абсолютно свободной группы F_m ранга m относительно их свободных образующих.

Хорошо известным результатом С.И. Адяна является то, что для нечетных $n \geq 665$ и $m > 1$ свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ имеет экспоненциальный рост [11, Гл. VI, Теорема 2.15]. Более того, этот рост является равномерным — более сильное свойство, которое выполняется для всех конечных систем образующих (см. [22], [23], [18]).

Для основного результата этой статьи нам требуется явная нижняя оценка функции роста $B(3,n)$. Она может быть выведена из общей оценки, установленной в [24]. Основная теорема этой статьи дает нижнюю границу функции роста $B(m,n)$ для любого ранга $m \geq 2$. В частности, показано, что

$$\gamma_{B(m,n)}(s) > \frac{m}{m-1}(2m-1-\alpha)^s - 1$$

для любого $\alpha \in (0,1)$, удовлетворяющего условию $2m(2m-1) < \alpha(2m-1-\alpha)^8$.

Подстановка $m = 3$ и $\alpha = 0.1$ в неравенство дает необходимую нам конкретную границу. Это приводит к следующей лемме.

Лемма 5.1 (см. Теорему 1, [24])**.** *Для всех нечетных $n \geq 665$ и натуральных s*

$$\gamma_{B(3,n)}(s) > \frac{3}{2}(4.9)^s - 1.$$

6. Доказательство Теоремы 1.1

Доказательство Утверждения 2 Теоремы 1.1. Тождество $x^n = 1$ не выполняется в группе $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$, поскольку оно не выполняется в ее подгруппе $\mathbb{F}$.

Доказательство Утверждения 1 Теоремы 1.1. Докажем, что $x^n = 1$ является M-вероятностным тождеством в группе $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$.

Мы можем оценить $\gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}},S}(r)$ и $\gamma_{\mathbb{F},S'}(r)$ сверху, используя функции роста $\gamma_{F_3}(r)$ и $\gamma_{F_2}(r)$ свободных групп F_3 и F_2 ранга 3 и 2 относительно их свободных образующих:

$$\gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}},S}(r) \leq \gamma_{F_3}(r) = 1 + \frac{3(5^r-1)}{2} < \frac{3}{2}\cdot 5^r, \tag{6.1}$$

$$\gamma_{\mathbb{F},S'}(r) \leq \gamma_{F_2}(r) = 2\cdot 3^r - 1 < 2\cdot 3^r. \tag{6.2}$$

С другой стороны, $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ допускает гомоморфизм на свободную бернсайдову группу $B(3,n)$, так как $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ является n-кручёной группой с тремя образующими (см. (4.1)). Следовательно, $\gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}(r)$ не меньше, чем $\gamma_{B(3,n)}(r)$. Используя оценку для $\gamma_{B(3,n)}$, полученную в Разделе 5, мы имеем:

$$\frac{3}{2}\cdot(4.9)^r - 1 < \gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}},S}(r) < \frac{3}{2}\cdot 5^r.$$

Из Леммы 4.12 получаем следующую оценку для числа d_r слов V длины $\le r$ в алфавите S, сопряженных в группе $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ с некоторым словом W в алфавите S':

$$d_r \le r \cdot \gamma_{\mathbb{F},S'}(\overline{\beta}^{-1} r) \cdot \gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}},S}(3\gamma r).$$

Учитывая (6.1) и (6.2), получаем:

$$d_r < r \cdot 2 \cdot 3^{\overline{\beta}^{-1} r} \cdot \frac{3}{2} \cdot 5^{3\gamma r} = 3r(3^{\overline{\beta}^{-1}} 5^{3\gamma})^r.$$

Используя принцип наименьшего параметра (LPP), мы выбираем параметры β и γ достаточно малыми, чтобы выполнялось неравенство $3^{\overline{\beta}^{-1}} 5^{3\gamma} < 4$ (напомним, что $\overline{\beta} = 1 - \beta$). Тогда

$$\frac{d_r}{\gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}},S}(r)} < \frac{3 \cdot r \cdot 4^r}{\frac{3}{2} \cdot (4.9)^r - 1} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, Утверждение 1 Теоремы 1.1 доказано.

Доказательство Утверждения 3 Теоремы 1.1. Предположим, что для некоторых $\mathcal{P} \ne \mathcal{P}'$ группы $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ и $\mathbb{A}_{\mathcal{P}'}$ изоморфны. Тогда, по Лемме 3.1, группа $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{F}(n, \mathcal{P}')$. Иными словами, $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ содержит два элемента u_1', u_2', порождающих подгруппу, изоморфную $\mathbb{F}(n, \mathcal{P}')$. Более того, поскольку для $\mathcal{P}' \ne \mathcal{P}''$ группы $\mathbb{F}(n, \mathcal{P}')$ и $\mathbb{F}(n, \mathcal{P}'')$ неизоморфны, соответствующие пары образующих (u_1', u_2') и (u_1'', u_2'') различны ($\langle u_1', u_2' \rangle \simeq \mathbb{F}(n, \mathcal{P}')$, $\langle u_1'', u_2'' \rangle \simeq \mathbb{F}(n, \mathcal{P}'')$). В счетной группе $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ множество различных пар элементов (u_1', u_2') счетно. Следовательно, множество групп, изоморфных данной группе $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$, не более чем счетно. Так как множество неизоморфных групп $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$ для различных подмножеств $\mathcal{P}$ множества простых чисел несчетно (см. [11, Глава VII], Предложение 2.17), то отсюда следует, что множество неизоморфных групп $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ для различных $\mathcal{P}$ также несчетно.

Abstract. In this paper, we construct a continuum family of non-isomorphic 3-generator groups in which the identity $x^n = 1$ holds with probability 1, while failing to hold universally in each group. This resolves a recent question about the relationship between probabilistic and universal satisfaction of group identities. Our construction uses n-periodic products of cyclic groups of order n and two-generator relatively free groups satisfying identities of the form $[x^{pn}, y^{pn}]^n = 1$. We prove that in each of these products, the probability of satisfying $x^n = 1$ is equal to 1, despite the fact that the identity does not hold throughout any of these groups.

Список литературы

[1] W. H. Gustafson, “What is the Probability that Two Group Elements Commute?”, The American Mathematical Monthly, **80** (9), 1031 – 1034 (1973). https://doi.org/10.1080/00029890.1973.11993437
[2] R. M. Guralnick, J. S. Wilson, “The probability of generating a finite soluble group”, Proc. London Math. Soc. (3), **81**, no. 2, 405 – 427 (2000).
[3] G. Amir, G. Blachar, M. Gerasimova, G. Kozma, Probabilistic Laws on Infinite Groups (arXiv:2304.09144) (2023). arXiv. http://arxiv.org/abs/2304.09144
[4] C. H. Matthew, H. Tointon, “Commuting probabilities of infinite groups”, Journal of the London Mathematical Society, **101** (3), 1280 – 1297 (2020).
[5] Y. Antolın, A. Martino, E. Ventura, “Degree of commutativity of infinite groups”, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2), 479 – 485 (2017).
[6] S. I. Adian, “Random walks on free periodic groups”, Math. USSR-Izv., **21**, 3, 425 – 434 (1983).
[7] G. Goffer, B. E. Greenfeld, A. Yu. Olshanskii, Asymptotic Burnside Laws, (2024). https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.09630
[8] V. S. Atabekyan, A. A. Bayramyan, “Probabilistic identities in n-Torsion groups”, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **59**, no. 6, 455 – 459 (2024).
[9] S. I. Adian, “Periodic products of groups”, Proc. Steklov Inst. Math., **142**, 1 – 19 (1979).
[10] S. I. Adian, “Infinite irreducible systems of group identities”, Math. USSR-Izv., **4**: 4, 721 – 739 (1970).
[11] S. I. Adian, The Burnside Problem and Identities in Groups, Springer-Verlag (1979).
[12] V. H. Mikaelian, “On finitely generated soluble non-Hopfian groups, an application to a problem of Neumann”, International Journal of Algebra and Computation, **17**, 5 – 6, 1107 – 1113 (2007).
[13] V. H. Mikaelian, “On finitely generated soluble non-Hopfian groups”, Journal of Mathematical Sciences (Springer), **166**, no. 6, 743 – 755 (2010).
[14] V. S. Atabekyan, V. H. Mikaelian, “On Benign Subgroups Constructed by Higman’s Sequence Building Operation”, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **59** (1), 1 – 12 (2024).
[15] H. Neumann, Varieties of Groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer, Berlin (1967).
[16] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “On free groups in the infinitely based varieties of S. I. Adian”, Izv. RAN. Ser. Mat., **81**, no. 5, 3 – 14 (2017).
[17] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Periodic product of groups”, Journal of contemporary mathematical analysis, **52**, (3), 111 – 117 (2017).
[18] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Characteristic properties and uniform non-amenability of n-periodic products of groups”, Izv. Math., **79** 6, 1097 – 1110 (2015).
[19] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “n-torsion groups”, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **54** (6), 319 – 327 (2019).
[20] N. S. Boatman, Partial-Burnside Groups (Dissertation), (2012). http://hdl.handle.net/1803/14921
[21] A. Yu. Ol’shanskii, “Geometry of defining relations in groups, Translated from the 1989 Russian original by Yu. A. Bakhturin”, Mathematics and its Applications (Soviet Series), **70**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1991).
[22] V. S. Atabekyan, “Uniform non-amenability of subgroups of free Burnside groups of odd period”, Math. Notes, **85** 4, 496 – 502 (2009).
[23] V. S. Atabekyan, “Monomorphisms of free Burnside groups”, Math. Notes, **86** 4, 457 – 462 (2009).
[24] A. Bayramyan, “On growth of free Burnside groups”, Armen. J. Math., **17**, no. 8, 1 – 7 (2025).

Поступила 02 октября 2025

После доработки 02 октября 2025

Принята к публикации 10 декабря 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 2, 2026, стр. 29 – 44.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ДВОЙНЫХ РЯДАХ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Л. Н. ГАЛОЯН, А. А. САРГСЯН, Л. С. СИМОНЯН

Ереванский Государственный Университет[1]
E-mails: *levongaloyan@ysu.am; asargsyan@ysu.am, lusinesimonyan@ysu.am*

Аннотация. В работе построены асимптотически универсальные двойные ряды по мультипликативным системам неограниченного типа в классе интегрируемых функций двух переменных.

MSC2020 numbers: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: универсальный ряд; мультипликативная система; коэффициенты Фурье; сходимость.

1. Введение

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, χ_E характеристическая функция множества E, а T — квадрат $[0,1]^2$. Через $|E|$ будем обозначать меру Лебега плоского множества $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Через $M(E)$ будем обозначать класс всех вещественных измеримых функций на E, через $L^0(E)$ — класс всех вещественных измеримых функций, конечных почти всюду на E, а через $L^r(E)$, $r > 0$, — класс всех измеримых на E функций, для которых

$$\iint_E |f(x,y)|^r \, dx \, dy < \infty.$$

Пусть $f_k \in L^r(E)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где $r > 0$. Говорят, что ряд $\sum f_k$ сходится к функции f в пространстве $L^r(E)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \Big| \sum_{k=0}^{n} f_k(x,y) - f(x,y) \Big|^r \, dx \, dy = 0.$$

Под сходимостью в $L^0(E)$ и в $M(E)$ будем понимать сходимость почти всюду на множестве E.

Ряд $\sum f_k$ является универсальным в пространстве $L^r(E)$, $r \geq 0$, если для каждой функции $f \in L^r(E)$ существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_m\}$ такая, что подпоследовательность частичных сумм

$$S_{n_m} = \sum_{k=0}^{n_m} f_k$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА.

этого ряда сходится к функции f в пространстве $L^r(E)$.

Аналогично определяется унверсальность в пространстве $M(E)$.

Определение 1.1. *Будем говорить, что ненулевые члены двойной последовательности* $\{c_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ *расположены в убывающем порядке, если для всех* $k_1, k_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, *таких что*

$$k_2 \geq k_1, \quad s_2 \geq s_1, \quad c_{k_2,s_2} \cdot c_{k_1,s_1} \neq 0,$$

выполняется неравенство $c_{k_2,s_2}(f) \leq c_{k_1,s_1}(f)$.

Прямоугольные и сферические частичные суммы двойного ряда

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} f_{k,s}(x,y)$$

определяются соответственно как

$$S_{N,M}(x,y) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{s=0}^{M} f_{k,s}(x,y), \quad S_R(x,y) = \sum_{k^2+s^2 \leq R^2} f_{k,s}(x,y).$$

Следуя работам [10]–[12], приведём некоторые определения, касающиеся универсальных рядов в двумерном случае.

Определение 1.2. *Будем говорить, что двойной ряд* $\sum_{j,s} f_{j,s}$ *универсален в пространстве* $L^r(E)$ *по сферам, если для каждой функции* $f \in L^r(E)$ *существует последовательность возрастающих вещественных чисел* $\{R_k\}$, *такая что* $\lim_{k\to\infty} R_k = \infty$, *и выполняется равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \iint_E \left| \sum_{j^2+s^2 \leq R_k^2} f_{j,s}(x,y) - f(x,y) \right|^r dx\,dy = 0.$$

Определение 1.3. *Будем говорить, что двойной ряд* $\sum_{j,s} f_{j,s}$ *универсален в пространстве* $L^r(E)$ *по прямоугольникам, если для каждой функции* $f \in L^r(E)$ *существуют последовательности возрастающих натуральных чисел* $\{N_p\}_{p\geq 0}$ *и* $\{N'_q\}_{q\geq 0}$, *такие что*

$$\lim_{p,q\to\infty} \iint_E \left| \sum_{j=0}^{N_p} \sum_{s=0}^{N'_q} f_{j,s}(x,y) - f(x,y) \right|^r dx\,dy = 0.$$

Определение 1.4. *Будем говорить, что двойной ряд* $\sum f_{j,s}$ *асимптотически универсален в пространстве* $L^1(E)$ *по сферам (соответственно, по прямоугольникам), если существуют измеримые множества*

$$\{B_m\}_{m=1}^{\infty},$$

такие что

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_m \subset B_{m+1} \subset \cdots \subset E, \quad и \quad \lim_{m\to\infty} |B_m| = |E|,$$

и данный ряд является универсальным рядом в каждом пространстве $L^1(B_m)$, $m \in \mathbb{N}$ *по сферам (по прямоугольникам) .*

Отметим, что аналог определения 1.4 в одномерном случае (в несколько ослабленной форме) приведён в работе [3].

Приведённые обозначения и определения для функций и рядов будут применяться также и в одномерном случае.

Отметим, что существование одномерных рядов, универсальных в том или ином смысле в различных классах функций, изучалось многими математиками, и публикации по этой теме регулярно появляются в математической литературе. Основные результаты в этом направлении были получены Д. Е. Меньшовым, А. А. Талаляном и их учениками (см [1]-[12]). Ниже приведены результаты, имеющие непосредственное отношение к данной работе.

Первой работой, в которой были построены универсальные (в обычном смысле) тригонометрические ряды в классе $M([0, 2\pi])$, является работа Д. Е. Меньшова [1]. В работе А. А. Талаляна [2] доказано, что в классе $M([0, 1])$ существует универсальный ряд (с коэффициентами, стремящимися к нулю) вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x),$$

где $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная полная ортонормированная система в $L^2([0, 1])$.

В работах [5, 6] М. Г. Григорян, усилив теорему Меньшова, доказал, что существует интегрируемая функция, такая что после выбора подходящих знаков её коэффициентов Фурье по тригонометрической системе (соответственно, по системе Уолша) вновь полученный ряд является универсальным в классе всех измеримых функций.

Более того, в работах [7 – 9] было доказано (как по тригонометрической системе, так и по системе Уолша), что любую измеримую, почти всюду конечную функцию, путем изменения её значений на множестве сколь угодно малой меры, можно преобразовать в такую функцию, что после выбора соответствующих знаков для членов ряда Фурье изменённой функции полученный ряд становится универсальным рядом в классе всех вещественных измеримых функций на $M([0, 2\pi])$ (в случае системы Уолша — на $M([0, 1])$).

Для двойной системы Уолша $\{W_k(x)W_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ в работе [11] доказано следующее: для любого $\delta > 0$ существует измеримое множество $E \subset T$ с мерой

$|E| > 1 - \delta$, такое что для каждой функции $f \in L^1(E)$ можно найти числа

$$\{\delta_{k,s} : \delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=0}^{\infty}$$

и функцию $g \in L^1(T)$ с $g(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in E$, для которой ряд Фурье по двойной системе Уолша сходится как по сферам, так и по прямоугольникам, а её коэффициенты Фурье на спектре положительны и расположены в убывающем порядке. При этом двойной ряд

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} \delta_{k,s}\, c_{k,s}(g)\, W_k(x) W_s(y)$$

является универсальным рядом в классе $L^r(T)$, $r \in (0,1)$, по сферам (см. определения 1.1-1.3).

Аналогичный результат имеет место и для двойной тригонометрической системы (см. [12, 13]).

Было бы интересно узнать: имеет ли место аналогичный результат для системы Виленкина?

Напомним определение класса мультипликативных систем функций (см. [14], гл. 1, § 1.5).

Пусть $P = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность натуральных чисел, такая что $p_j \geq 2$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Определим

$$m_0 = 1, \qquad m_k = \prod_{j=1}^{k} p_j, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Легко заметить, что для каждой точки $x \in [0,1)$ и каждого $n \in [m_k, m_{k+1}) \cap \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, существуют числа $x_j, \alpha_j \in \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$ такие, что

$$n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j m_{j-1}, \qquad x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}.$$

Отметим, что точки вида $\frac{l}{m_k}$, где $0 \leq l \leq m_k - 1$, имеют два различных P-ичных разложения: конечное и бесконечное. Чтобы иметь дело только с однозначными разложениями, договоримся для таких точек использовать именно конечные разложения.

Для заданной последовательности $P = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ мультипликативная система $\mathbb{V} = \{V_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ определяется следующим образом:

$$V_0(x) \equiv 1, \qquad V_n(x) = \exp\Big(2\pi i \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \frac{x_j}{p_j}\Big), \tag{1.2}$$

где числа α_j и x_j — коэффициенты разложений n и x в P-ичной системе.

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^1 V_n(t)\,\overline{V_k(t)}\,dt = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n, \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\overline{a}$ обозначает комплексно-сопряжённое число к a.

Эти системы были введены Н. Я. Виленкиным в 1946 году (см. [15]) и поэтому часто называются также системами Виленкина.

В случае $\sup\{p_k\} < \infty$ система $\mathbb{V} = \{V_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ называется мультипликативной системой ограниченного типа. В противном случае, если $\sup\{p_k\} = \infty$, система называется системой неограниченного типа.

Хорошо известны некоторые частные случаи систем, соответствующих различным последовательностям $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$. В частности, если $P = \{2, 2, \dots\}$, то система $\mathbb{V}$ совпадает с системой Уолша–Пэли (см. [16], [17]). А если $P = \{a, a, \dots\}$, где $a > 2$ — простое число, то система $\mathbb{V}$ совпадает с системой Крестенсона–Леви (см. [18]).

В работах [13]–[20] для мультипликативных систем были получены важные результаты. В 1957 году К. Ватари [19] доказал, что система Виленкина ограниченного типа является базисом в пространстве $L^r([0,1])$ при $r > 1$. Затем, в 1976 году, В. Янг [20] установил базисность в $L^r([0,1])$ систем Виленкина произвольного типа.

Большинство результатов по мультипликативным системам получены для систем ограниченного типа. Многие утверждения до настоящего времени не имеют своих аналогов для систем неограниченного типа. В частности, неизвестно, верна ли для мультипликативных систем неограниченного типа теорема Карлесона [22], согласно которой ряд Фурье функции $f \in L^2([0, 2\pi])$ по тригонометрической системе сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. Поэтому изучение мультипликативных систем с точки зрения поведения последовательности $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ представляет самостоятельный интерес.

В настоящей статье для двойной мультипликативной системы (ограниченного или неограниченного типа) мы докажем следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Пусть $\mathbb{V} = \{V_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ — система Виленкина. Тогда существует двойной ряд вида*

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} \lambda_{k,s} V_k(x) V_s(y),$$

который является асимптотически универсальным в пространстве $L^1(T)$ как по сферам, так и по прямоугольникам.

Следует отметить, что многие классические одномерные результаты невозможно перенести на двумерный случай. Так, например, Феферман в работе [23] показал, что известные теоремы Л. Карлесона [22] и М. Рисса [24] не выполняются в двумерной постановке. В этом случае различные виды частичных сумм (сферические, прямоугольные, квадратные) существенно различаются по своим свойствам, таким как сходимость в L^p при $p \geq 1$, а также сходимость почти всюду. Следует также отметить, что до настоящего времени остаётся неизвестным, сходятся ли почти всюду сферические частичные суммы ряда Фурье непрерывной функции двух переменных по двойной системе Уолша, а также по двойной тригонометрической системе.

Пусть $f \in L^1(T)$. Коэффициенты Фурье функции f по двойной системе Виленкина $\{V_k(x)V_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ определяются следующим образом:

$$c_{k,s}(f) = \iint\limits_T f(x,y)\,\overline{V_k(x)V_s(y)}\,dx\,dy, \quad k,s = 0,1,2,\ldots \tag{1.4}$$

Положим

$$\operatorname{spec}(f) = \{(k,s) \mid c_{k,s}(f) \neq 0, \quad k,s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}. \tag{1.5}$$

Теорема 1.1 следует из более сильной теоремы:

Теорема 1.2. *Существуют ряд вида*

$$\Omega = \sum_{k,s=0}^{\infty} \lambda_{k,s}\,V_k(x)\,V_s(y)$$

по двойной системе Виленкина и измеримые множества $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_m \subset B_{m+1} \subset \cdots \subset T, \qquad \lim_{m\to\infty} |B_m| = 1,$$

и выполняются следующие условия:

- ***a.*** *Ненулевые значения* $\{|\lambda_{k,s}|\}_{k,s=0}^{\infty}$ *расположены в убывающем порядке (см. Определение 1.1), и* $\lim_{k,s\to\infty} \lambda_{k,s} = 0$.
- ***b.*** *Ряд* Ω *является универсальным в каждом пространстве* $L^1(B_m)$ *(*$m \in \mathbb{N}$*) как по сферам, так и по прямоугольникам.*
- ***c.*** *Для каждой функции* $f \in L^1(T)$ *и любого* $m \in \mathbb{N}$ *существует функция* $g_m \in L^1(T)$*, совпадающая с* f *на* B_m*, такая, что её коэффициенты Фурье удовлетворяют*

$$c_{k,s}(g_m) = \lambda_{k,s} \quad \textit{для всех } (k,s) \in \operatorname{spec}(g_m).$$

Замечание 1.1. *Пункт **b.** Теоремы 1.2 означает, что ряд Ω является асимптотически универсальным в пространстве $L^1(T)$ как по сферам, так и по прямоугольникам (см. Определение 1.4).*

Замечание 1.2. *Заметим, что не существует ряда вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\lambda_{k,s}\,V_k(x)V_s(y)$$

по двойной системе Виленкина, который был бы универсален в пространстве $L^1(T)$ по прямоугольникам. Действительно, пусть бы такой ряд существовал. Тогда для функции $g\in L^1(T)$ с $c_{1,1}(g)\neq 0$ должны были бы существовать последовательности $\{l_m\}$, $\{l'_m\}$, $\{n_m\}$, $\{n'_m\}$ такие, что

$$\lim_{m\to\infty}\iint_T\left|\sum_{k=0}^{l_m}\sum_{s=0}^{n_m}\lambda_{k,s}V_k(x)V_s(y)-g(x,y)\right|dx\,dy=0,$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint_T\left|\sum_{k=0}^{l'_m}\sum_{s=0}^{n'_m}\lambda_{k,s}V_k(x)V_s(y)-4g(x,y)\right|dx\,dy=0.$$

Отсюда, поскольку сильная сходимость в $L^1(T)$ влечёт за собой слабую сходимость (и учитывая (1.3) и (1.4)), получаем противоречие:

$$\lambda_{1,1}=\lim_{m\to\infty}\iint_T\left(\sum_{k=0}^{l_m}\sum_{s=0}^{n_m}\lambda_{k,s}V_k(x)V_s(y)\right)\overline{V_1(x)V_1(y)}\,dx\,dy$$

$$=\iint_T g(x,y)\overline{V_1(x)V_1(y)}\,dx\,dy=c_{1,1}(g),$$

и одновременно

$$\lambda_{1,1}=\lim_{m\to\infty}\iint_T\left(\sum_{k=0}^{l'_m}\sum_{s=0}^{n'_m}\lambda_{k,s}V_k(x)V_s(y)\right)\overline{V_1(x)V_1(y)}\,dx\,dy$$

$$=\iint_T 4g(x,y)\overline{V_1(x)V_1(y)}\,dx\,dy=4c_{1,1}(g),$$

что невозможно, так как $c_{1,1}(g)\neq 0$.

Следствие 1.1. *Пусть $\mathbb{V}=\{V_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — система Виленкина. Тогда для любого $\delta>0$ существует измеримое множество $E\subset T$ с $|E|\geq 1-\delta$ такое, что для любой функции $f\in L^1(T)$ найдётся функция $g\in L^1(T)$, удовлетворяющая*

$$g(x,y)=f(x,y)\quad \text{при } (x,y)\in E,$$

и для которой ненулевые члены последовательности коэффициентов

$$\left\{\,|c_{k,s}(g)|\,\right\}_{k,s=0}^{\infty}$$

расположены в убывающем порядке.

Отметим, что это утверждение является двумерным аналогом одной из теорем, доказанной в работе [23].

2. Основные леммы

Пусть $P = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность натуральных чисел, а $\mathbb{V} = \{V_k(x)\}$ — мультипликативная система, построенная по последовательности P (см. (1.1)). Обозначим через $\Delta_{m_k}^{(j)}$ (см. (1.2)) P-ичные интервалы вида

$$\Delta_{m_k}^{(j)} = \Big[\frac{j}{m_k}, \frac{j+1}{m_k}\Big), \qquad j \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}.$$

Рассмотрим множество L пар (γ, Δ), где γ пробегает все вещественные числа, а Δ всевозможные P-ичные квадраты вида $\Delta = \Delta_{m_k}^{(\nu)} \times \Delta_{m_k}^{(\ell)}$, с $\nu, \ell \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$ и $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим также множество ступенчатых функций

(2.1)
$$\Phi = \Big\{ f: \ f(t) = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \, \chi_{\Delta_j}(x, y): \ (\gamma_j, \Delta_j) \in L, \ \Delta_j \cap \Delta_{j'} = \varnothing \ \ (j \neq j'), \ \nu \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Аналогично рассмотрим множество

$$(2.2)\quad \psi = \Big\{ \psi: \ \psi(t) = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \, \chi_{\Delta'_j}(t); \ (\gamma_j, \Delta'_j) \in l, \ \Delta'_j \cap \Delta'_{j'} = \varnothing \ (j \neq j'), \ \nu \in \mathbb{N} \Big\},$$

где l — множество пар $\{\gamma, \Delta'\}$, в котором γ пробегает все вещественные числа, а Δ' — все P-ичные интервалы.

Замечание 2.1. *Легко заметить, что если $\psi_1(t), \psi_2(t) \in \psi$, то функция $f(x, y) = \psi_1(x) \, \psi_2(y)$ принадлежит множеству Φ.*

Мы будем пользоваться следующей леммой, доказанной в [25].

Лемма 2.1. *Пусть $\mathbb{V} = \{V_k(x)\}$ — система Виленкина ограниченного или неограниченного типа. Тогда для любых чисел $n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta_0 \in (0, 1)$, $\gamma_0 \neq 0$ и для любого P-ичного интервала вида $\Delta_0 = \Delta_{m_k}^{(\nu)}$, $\nu \in [1, m_k]$, $k \geq 1$, существуют измеримое множество $E \subset \Delta_0$ и полином*

$$Q(x) = \sum_{k=n_0}^{N} a_k V_k(x) \in \psi,$$

(см. (2.2)) удовлетворяющие следующим условиям:

(1) Ненулевые члены в последовательности $\{|a_k|\}_{k=n_0}^{N}$ равны $|\gamma_0| \cdot |\Delta_0|$,

(2)

$$Q(x) = \begin{cases} \gamma_0, & x \in E \\ 0, & x \notin \Delta_0 \end{cases}, \qquad |E| > (1 - \delta_0)|\Delta_0|,$$

(3)

$$\int_{\Delta_0} |Q(x)|\, dx \le 2|\gamma_0| \cdot |\Delta_0|.$$

Лемма 2.2. *Пусть $\mathbb{V} = \{V_k(x)\}$ — система Виленкина ограниченного или неограниченного типа. Тогда для любых чисел $N_0 \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0,1)$, $\gamma \neq 0$ и для любого P-ичного квадрата вида $\Delta = \Delta' \times \Delta''$, где Δ', Δ'' — P-ичные интервалы, существуют измеримое множество $E \subset \Delta$ и полином*

$$Q(x,y) = \sum_{k,s=N_0}^{N} c_{k,s} V_k(x) V_s(y) \in \Phi,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(1) Ненулевые члены в последовательности $\{|c_{k,s}|\}_{k,s=N_0}^{N}$ равны $|\gamma| \cdot |\Delta|$,

(2)

$$Q(x,y) = \begin{cases} \gamma, & (x,y) \in E \\ 0, & (x,y) \notin \Delta \end{cases},$$

(3)

$$|E| > (1-\delta)|\Delta|,$$

(4)

$$\iint_T |Q(x,y)|\, dx\, dy \le 4|\gamma| \cdot |\Delta|.$$

Доказательство Леммы 2.2. Приведём схему доказательства, опуская технические детали, которые несложно воспроизвести. Дважды применим лемму 2.1, полагая в её формулировке сначала $\gamma_0 = \gamma, \Delta_0 = \Delta', n_0 = N_0, \delta_0 = \delta/2$, а затем $\gamma_0 = 1, \Delta_0 = \Delta'', n_0 = N_1, \delta_0 = \delta/2$. Тем самым определяются измеримые множества $E' \subset \Delta'$ и $E'' \subset \Delta''$, а также полиномы по системе Виленкина вида

$$Q^{(\prime)}(x) = \sum_{k=N_0}^{N_1-1} a_k V_k(x), \qquad Q^{(\prime\prime)}(y) = \sum_{s=N_1}^{N} b_s V_s(y),$$

удовлетворяющие утверждениям 1–3 леммы 2.1 с соответствующими параметрами.

Далее, определяя плоское измеримое множество $E = E' \times E''$, и полином

$$Q(x,y) = Q^{(\prime)}(x) Q^{(\prime\prime)}(y) = \sum_{k,s=N_0}^{N} c_{k,s} V_k(x) V_s(y),$$

где

$$c_{k,s} = \begin{cases} a_k b_s, & N_0 \le k < N_1, \quad N_1 \le s \le N, \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

убеждаемся в справедливости утверждений 1–3 леммы 2.2. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть* $\mathbb{V} = \{V_k(x)\}$ *— система Виленкина ограниченного или неограниченного типа. Тогда для любых чисел* $N_0 \in \mathbb{N}$, $\delta, \varepsilon \in (0,1)$ *и для любой функции* $f \in \Phi$ *(см. (2.1)) существуют измеримое множество* $E \subset T$ *и полином по двойной системе Виленкина вида*

$$Q(x,y) = \sum_{k,s=N_0}^{N} a_{k,s} V_k(x) V_s(y) \in \Phi,$$

удовлетворяющий следующим условиям:

(1) *Ненулевые коэффициенты в последовательности* $\{|a_{k,s}|\}_{k,s=N_0}^{N}$ *расположены в убывающем порядке, при этом, для всех* (k,s) *выполняется* $|a_{k,s}| \le \varepsilon$.

(2)
$$\iint_T |Q(x,y)|\, dx\, dy \le 4 \iint_T |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

(3)
$$Q(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in E, \qquad \text{причём} \quad |E| > 1 - \delta.$$

Доказательство Леммы 2.3 . Пусть

$$f(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x,y) \in \Phi, \tag{2.3}$$

где для всех $1 \le \nu \le \nu_0$ множества Δ_ν — попарно непересекающиеся P-ичные квадраты. Без ограничения общности можно считать, что

$$0 < |\gamma_1|\,|\Delta_1| < \dots < |\gamma_\nu|\,|\Delta_\nu| < \dots < |\gamma_{\nu_0}|\,|\Delta_{\nu_0}| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Последовательным применением леммы 2.2 построим последовательности множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\nu_0}$ и полиномов по двойной системе Виленкина вида

$$Q_\nu(x,y) = \sum_{k,s=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} a_{k,s}^{(\nu)}\, V_k(x)\, V_s(y) \in \Phi, \quad 1 \le \nu \le \nu_0, \tag{2.5}$$

такие, что для всех $\nu \in [1, \nu_0]$ выполняются следующие условия:

$$\big\{|a_{k,s}^{(\nu)}|\big\}_{k,s=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \text{ равны либо } 0, \text{ либо } |\gamma_\nu|\,|\Delta_\nu|, \tag{2.6}$$

$$|E_\nu| > (1-\delta)\,|\Delta_\nu|, \tag{2.7}$$

$$Q_\nu(x,y) = \begin{cases} \gamma_\nu, & (x,y) \in E_\nu, \\ 0, & (x,y) \notin \Delta_\nu, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\iint_{\Delta_\nu} |Q_\nu(x,y)|\, dx\, dy < 4\,|\gamma_\nu|\,|\Delta_\nu|. \tag{2.9}$$

Положим

$$a_{k,s}=\begin{cases} a_{k,s}^{(\nu)}, & N_{\nu-1}\le k,s<N_\nu, \quad 1\le\nu\le\nu_0,\\ 0, & \text{в остальных случаях}.\end{cases} \tag{2.10}$$

$$E=\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0}E_\nu, \tag{2.11}$$

$$Q(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}Q_\nu(x,y). \tag{2.12}$$

Пусть $N=N_{\nu_0}-1$. В силу (2.4), (2.6) и (2.10), ненулевые члены в последовательности $\{|a_{k,s}|\}_{k,s=N_0}^{N}$ расположены в убывающем порядке и

$$|a_{k,s}|\le\varepsilon, \quad \forall\, k,s\in[N_0,N].$$

Из (2.3), (2.5), (2.7), (2.8), (2.11) и (2.12) имеем

$$Q(x,y)=f(x,y) \quad \text{для} \quad (x,y)\in E, \quad |E|>1-\delta.$$

Учитывая соотношения (2.5), (2.10) и (2.12), получим, что

$$Q(x,y)\in\Phi, \quad Q(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\sum_{k,s=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}a_{k,s}^{(\nu)}V_k(x)V_s(y)=\sum_{k,s=N_0}^{N}a_{k,s}V_k(x)V_s(y).$$

В силу (2.3), (2.9) и (2.12) будем иметь

$$\iint\limits_T|Q(x,y)|\,dxdy=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\iint\limits_{\Delta_\nu}|Q(x,y)|\,dxdy\le 4\sum_{\nu=1}^{\nu_0}|\gamma_\nu||\Delta_\nu|=4\iint\limits_T|f(x,y)|\,dxdy.$$

3. Доказательство теоремы 1.2

Заметим, что из множества Φ (см. (2.1)) можно выделить последовательность

$$\{f_n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}, \tag{3.1}$$

которая является всюду плотной в пространстве $L^1(T)$.

Применим лемму 2.3, пологая в ее формулировке

$$N_0=1, \quad \delta=\frac{1}{2}, \quad \varepsilon=\frac{1}{4}, \quad f(x,y)=f_1(x,y).$$

Тогда определяются измеримые множества $E_1\subset T$ *и* полином по системе Виленкина вида

$$Q_1^{(1)}(x,y)=\sum_{k,s=M_1}^{M_2-1}a_{k,s}^{(1,1)}V_k(x)V_s(y), \quad M_1=N_0=1,$$

такие, что ненулевые коэффициенты в последовательности $\{|a_{k,s}^{(1,1)}|\}_{k,s=M_1}^{M_2-1}$ расположены в убывающем порядке и

$$\max_{(k,s)\in \mathrm{spec}(Q_1^{(1)})} |a_{k,s}^{(1,1)}| \leq \frac{1}{4},$$

$$|E_1| \geq 1 - 2^{-1},$$

$$Q_1^{(1)}(x,y) = f_1(x,y), \quad (x,y) \in E_1,$$

$$\iint\limits_T |Q_1^{(1)}(x,y)|\, dxdy < 4 \iint\limits_T |f_1(x,y)|\, dxdy.$$

Снова применим лемму 2.3, полагая в её формулировке:

$$N_0 = M_2, \quad \delta = \frac{1}{2^2}, \quad \varepsilon = \min_{(j,m)\in \mathrm{spec}(Q_1^{(1)})} \left\{|a_{j,m}^{(1,1)}|\right\}, \quad f(x,y) = f_1(x,y) - Q_1^{(1)}(x,y).$$

Тогда определяются измеримые множества $G_1 \subset [0,1]^2$ и полином по системе Виленкина вида:

$$Q_1^{(2)}(x,y) = \sum_{k,s=M_2}^{M_3-1} a_{k,s}^{(1,2)} V_k(x) V_s(y),$$

такие, что ненулевые коэффициенты в последовательности $\left\{|a_{k,s}^{(1,2)}|\right\}_{k,s=M_2}^{M_3-1}$ расположены в убывающем порядке, при этом

$$\max_{(k,s)\in \mathrm{spec}(Q_1^{(2)})} \left\{|a_{k,s}^{(1,2)}|\right\} \leq \min_{(j,m)\in \mathrm{spec}(Q_1^{(1)})} \left\{|a_{j,m}^{(1,1)}|\right\},$$

$$|G_1| \geq 1 - 2^{-2},$$

$$Q_1^{(2)}(x,y) = f_1(x,y) - Q_1^{(1)}(x,y), \quad (x,y) \in G_1.$$

Нетрудно видеть, что, последовательно применяя лемму 2.3, по индукции можно построить последовательности множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ и полиномов по двойной системе Виленкина вида

$$Q_n^{(1)}(x,y) = \sum_{k,s=M_{2n-1}}^{M_{2n}-1} a_{k,s}^{(n,1)}\, V_k(x)\, V_s(y), \tag{3.2}$$

$$Q_n^{(2)}(x,y) = \sum_{k,s=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1} a_{k,s}^{(n,2)}\, V_k(x)\, V_s(y), \tag{3.3}$$

которые для всех $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют следующим условиям: ненулевые коэффициенты как в последовательности $\left\{|a_{k,s}^{(n,1)}|\right\}_{k,s=M_{2n-1}}^{M_{2n}-1}$, так и в последовательности $\left\{|a_{k,s}^{(n,2)}|\right\}_{k,s=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1}$ (для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$) расположены в убывающем порядке, причем

$$\begin{cases} \max\limits_{(k,s)\in \mathrm{spec}(Q^{(1)}_{n+1})} |a^{(n+1,1)}_{k,s}| \le \min\limits_{(j,m)\in \mathrm{spec}(Q^{(2)}_{n})} |a^{(n,2)}_{j,m}| \le 2^{-2n}, \\ \max\limits_{(k,s)\in \mathrm{spec}(Q^{(2)}_{n})} |a^{(n,2)}_{k,s}| \le \min\limits_{(j,m)\in \mathrm{spec}(Q^{(1)}_{n})} |a^{(n,1)}_{j,m}| \le 2^{-2n}, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$|E_n| \ge 1 - 2^{-2n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

$$Q^{(1)}_n(x,y) = f_n(x,y), \quad (x,y) \in E_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.6}$$

$$\iint_T |Q^{(1)}_n(x,y)|\,dx\,dy < 4 \iint_T |f_n(x,y)|\,dx\,dy, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

$$Q^{(2)}_n(x,y) = f_n(x,y) - \sum_{k=1}^{n-1} \big(Q^{(1)}_k(x,y) + Q^{(2)}_k(x,y)\big) - Q^{(1)}_n(x,y), \quad (x,y) \in G_n, \tag{3.8}$$

$$|G_n| \ge 1 - 2^{-2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Из (3.8) вытекает

$$f_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \left(Q^{(1)}_k(x,y) + Q^{(2)}_k(x,y)\right), \quad (x,y) \in G_n. \tag{3.10}$$

Определим измеримые множества $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ и ряд по двойной системе Виленкина следующим образом:

$$B_m = \bigcap_{n=m}^{\infty} \left(G_n \cap E_n\right), \quad m \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

и

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} \lambda_{k,s} V_k(x) V_s(y), \tag{3.12}$$

где

$$\lambda_{k,s} = \begin{cases} a^{(n,1)}_{k,s}, & \text{при } M_{2n-1} \le k,s < M_{2n},\ n \ge 1, \\ a^{(n,2)}_{k,s}, & \text{при } M_{2n} \le k,s < M_{2n+1},\ n \ge 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях} . \end{cases} \tag{3.13}$$

Докажем, что множества $B_m, m \ge 1$ (см. (3.11)) и ряд (3.12) искомые.

В силу (3.4) и (3.13), ненулевые члены в последовательности $\{|\lambda_{k,s}|\}_{k,s=0}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке и $\lim_{k,s\to\infty} \lambda_{k,s} = 0$. Из (3.5), (3.9) и (3.11) следует

$$B_1 \subset \cdots \subset B_m \subset B_{m+1} \subset \cdots \subset [0,1]^2, \quad \lim_{m\to\infty} |B_m| = 1. \tag{3.14}$$

В силу (3.6), (3.10) и (3.11) для каждого $m \in \mathbb{N}$ и для всех $n \ge m$ и $(x,y) \in B_m$ имеем

$$f_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \left(Q^{(1)}_k(x,y) + Q^{(2)}_k(x,y)\right). \tag{3.15}$$

Пусть $\varphi \in L^1(T)$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ из последовательности (3.1) так, чтобы

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_T |f_{n_k}(x,y)-\varphi(x,y)|\,dxdy = 0. \tag{3.16}$$

Обозначая через

$$N_k = M_{2n_k+1}-1, \quad R_k = \sqrt{2}\,N_k^2, \quad k\in\mathbb{N} \tag{3.17}$$

и, учитывая соотношения (3.2), (3.3), (3.10), (3.12), (3.13) и (3.15)–(3.17), для каждого $m \in \mathbb{N}$ получим

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_{B_m}\left|\sum_{l^2+s^2\le R_k^2}\lambda_{l,s}V_l(x)V_s(y)-\varphi(x,y)\right|dx\,dy =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\iint\limits_{B_m}\left|\sum_{l,s=0}^{N_k,}\lambda_{l,s}V_l(x)V_s(y)-\varphi(x,y)\right|dx\,dy =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\iint\limits_{B_m}\left|\sum_{j=1}^{n_k}\left(Q_j^{(1)}(x,y)+Q_j^{(2)}(x,y)\right)-\varphi(x,y)\right|dx\,dy = 0.$$

Отсюда вытекает, что ряд (3.12) является универсальным рядом в каждом пространстве $L^1(B_m)$, $m \in \mathbb{N}$ (последовательности $\{N_k\}$ и $\{R_k\}$ не зависят от B_m) по сферам. Рассматривая последовательности (см. определение 1.3) $N_p = M_{2n_p+1}-1, p$ и $N_q' = M_{2n_q+1}-1, q \ge 1$ аналогично доказывается универсальность по прямоугольникам. Этим пункт b) теоремы 1.2 доказан.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ фиксировано и пусть $f \in L^1(B_m)$. Положим

$$F_m(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in B_m,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{3.18}$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{m_j}(x,y)\}_{j=1}^{\infty}$ из последовательности (3.1) так, чтобы

$$\lim_{N\to\infty}\iint\limits_T\left|\sum_{j=1}^{N} f_{m_j}(x,y)-F_m(x,y)\right|dxdy = 0, \quad m_1 > m. \tag{3.19}$$

$$\iint\limits_T |f_{m_j}(x,y)|dxdy \le 2^{-2j}, \quad j\ge 2 \tag{3.20}$$

(это возможно, поскольку последовательность $\{f_n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотна в $L^1(T)$).

В силу (3.7) и (3.20), последовательность $\left\{\sum_{j=1}^{q} Q_{m_j}^{(1)}(x,y)\right\}_{q=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $L^1(T)$. Обозначим её предел через $g_m \in L^1(T)$:

$$\lim_{q\to\infty} \iint\limits_T \left|\sum_{j=1}^{q} Q_{m_j}^{(1)}(x,y) - g_m(x,y)\right| dxdy = 0. \tag{3.21}$$

Учитывая соотношения (3.6), (3.11), (3.18), (3.19) и (3.21), получим, что

$$g_m(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in B_m. \tag{3.22}$$

Положим

$$\delta_{k,s} = \begin{cases} 1, & M_{2m_j-1} \le k,s < M_{2m_j},\ j \ge 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases} \tag{3.23}$$

Ясно, что (см. (3.2), (3.12), (3.13) и (3.23))

$$\sum_{k,s=0}^{M_{2m_q}-1} \delta_{k,s}\lambda_{k,s} V_k(x)V_s(y) = \sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{k,s=M_{2m_j-1}}^{M_{2m_j}-1} a_{k,s}^{(m_j,1)} V_k(x)V_s(y)\right) = \sum_{j=1}^{q} Q_{m_j}^{(1)}(x,y).$$

Отсюда и из (3.21) вытекает

$$\lim_{q\to\infty} \iint\limits_T \left|\sum_{k,s=0}^{M_{2m_q}-1} \delta_{k,s}\lambda_{k,s} V_k(x)V_s(y) - g_m(x,y)\right| dxdy = 0. \tag{3.24}$$

Поскольку из сильной сходимости следует слабая сходимость, из (3.24) имеем

$$\delta_{m,l}\lambda_{m,l} = \lim_{q\to\infty} \iint\limits_T \left(\sum_{k,s=0}^{M_{2m_q}-1} \delta_{k,s}\lambda_{k,s} V_k(x)V_s(y)\right) \overline{V_m(x)V_l(y)}\, dxdy$$
$$= \iint\limits_T g_m(x,y)\overline{V_m(x)V_l(y)}\, dxdy.$$

Значит (см. (1.3))

$$\delta_{\upsilon,l}\lambda_{\upsilon,l} = c_{\upsilon,l}(g_m) = \iint\limits_T g_m(x,y)\overline{V_\upsilon(x)V_l(y)}\, dxdy.$$

Ясно, что (см. (1.4), (3.23))

$$spec(g_m) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} [M_{2m_j-1}, M_{2m_j})^2.$$

и следовательно

$$c_{\upsilon,l}(g_m) = \lambda_{\upsilon,l}, \quad \forall (\upsilon,l) \in spec(g_m).$$

Теорема 1.2 доказана.

Abstract. In this paper, asymptotically universal double series for multiplicative systems of unlimited type in the class of integrable functions of two variables are constructed.

Список литературы

[1] Д. Е. Меньшов, “О частных суммах тригонометрических рядов”, Матем. сб., **20**, no. 62: 2, 197 – 238 (1947).
[2] А. А. Талалян, “О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов”, Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем., **10**:3, 17 – 34 (1957).
[3] А. А. Талалян, “О системах функций, ряды покоторым представляют в метрике $L_p[0,1]$ функции пространства $L_q[0,1], 1 \leq q \leq p$, Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем., **3**, no. 4 – 5, 327 – 357 (1968).
[4] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, “О рядах Уолша с монотонными коэффициентами”, Изв. РАН. Сер. матем., **63**: 1, 41 – 60 (1999); Izv. Math., **63** :1, 37 -– 55 (1999).
[5] M. G. Grigoryan, “Functions, universal with respect to the classical systems”, Advances in Operator Theory, **5**, 1414 – 1433 (2020).
[6] M. G. Grigoryan, “Functions with universal Fourier-Walsh series”, Sbornik: Mathematics, **211**: 6, 850 – 874 (2020).
[7] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Функции, универсальные относительно тригонометрической системы”, Изв. РАН. Сер. матем., **85**:2, 73 – 94 (2021).
[8] М. Г. Григорян, “Об универсальных рядах Фурье”, Матем. заметки, **108**:2, 296 – 299 (2020).
[9] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Об условно универсальных функциях”, Известия НАН Армении, Математика, **60**: 2, 15 – 25 (2025).
[10] M. G. Grigoryan, L. S. Simonyan, “Double Universal Fourier Series”, J. Contemp. Math. Anal., **54**, 355 – 364 (2019).
[11] A. Sargsyan, M. Grigoryan, “Universal functions for classes $L^p[0,1)^2$, $p \in (0,1)$, with respect to the double Walsh system”, Positivity, **23**:5, 1261 – 1280 (2019).
[12] М. Г. Григорян, “О почти универсальных двойных рядах Фурье”, Тр. ИММ УрО РАН, **28**:4 (2022).
[13] М. Г. Григорян, С. В. Конягин, “О рядах Фурье по кратной тригонометрической системе”, *УМН*, **78**:4 (472), 201 – 202 (2023).
[14] Б. И. Голубов, А. В. Скворцов, Б. И. Ефимов, Ряды и Преобразования Уолша: Теория и Применения, М.: Наука, 344с (1987).
[15] Н. Я. Виленкин, “Об одном классе полных ортонормальных систем”, Изв. АН СССР. Сер. матем., **11**:4, 363 – 400 (1947).
[16] J. L. Walsh, “A closed set of normal orthogonal functions”, Amer. J. Math., **45**:1, 5 – 24 (1923).
[17] J. L. Price, “Certain groups of orthonormal step functions”, Can. J. Math., **9**, 413 – 425 (1957).
[18] H. E. Chrestenson, “A class of generalized Walsh functions”, Pacific J. Math., **5**:1, 17 – 31 (1955).
[19] C. Watari, “On generalized Walsh Fourier series”, Tohoku Math. J. (2), **10**:3, 211 – 241 (1958).
[20] W. S. Young, “Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series”, Trans. Amer. Math. Soc., **218**, 311 – 320 (1976).
[21] M. G. Grigoryan, S. A. Sargsyan, “On the L^1-convergence and behavior of coefficients of Fourier-Vilenkin series”, Positivity, **22**:3, 897 – 918 (2018).
[22] L. Carleson, “On convergence and growth of partial sums of Fourier series”, Acta Math., **116**, 135 – 157 (1966).
[23] C. Fefferman, “On the divergence of multiple Fourier series”, Bull. Amer. Math. Soc., **77**:2, 191 – 195 (1971).
[24] M. Riesz, “Sur les fonctions conjuguées”, Math. Z., **27**, 214 – 244 (1927).
[25] S. Sargsyan, M. Grigoryan, “On the Fourier-Vilenkin coefficients”, Acta Math. Sci., **37**:2, 1 – 9 (2017).

Поступила 23 июня 2025

После доработки 22 ноября 2025

Принята к публикации 25 ноября 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 2, 2026, стр. 45 – 64.

ВЗРЫВНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НОВИКОВА И УРАВНЕНИЯ ФОКАСА-ОЛВЕРА-РОЗЕНУ-ЦЯО С НЕЛИНЕЙНЫМ ЧЛЕНОМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Ю. ЧЖОУ, Я. ЦЗИНЬ, М. ЧЖУ

Чжэцзянский педагогический университет, Цзиньхуа, КНР
Университет сельского и лесного хозяйства провинции Чжэцзян, Ханчжоу, КНР
Университет Цюйфу, Цюйфу, КНР
E-mails: *zhouyuanmeng@zjnu.edu.cn; yyjinmath@zafu.edu.cn; mxzhu@qfnu.edu.cn*

Аннотация. В данной работе мы исследуем взрывные явления для уравнения Новикова и уравнения Фокаса–Олвера–Розену–Цяо (FORQ) с нелинейным членом высокого порядка $\gamma u^p u_x$. Именно благодаря особой структуре этих двух уравнений мы можем установить достаточные условия для начальных данных, гарантирующие взрывные явления в конечный момент времени.

MSC2020 numbers: 35L05; 35G25.

Ключевые слова: уравнение Новикова; уравнение Фокаса–Олвера–Розену–Цяо; взрыв; нелинейный член высокого порядка

1. Введение

В 1981 году Фухштайнер и Фокс [1] использовали рекурсивные операторы для вывода класса уравнений с двойными гамильтоновыми структурами, а именно уравнения Камасса-Холма

$$u_t - u_{xxt} + 2\kappa u_x + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{1.1}$$

Камасса и Холм [2] вывели уравнение (1.1) из гамильтоновых методов. В [3] была рассмотрена задача Коши уравнения (1.1) и доказано, что соответствующее решение $u(x,t) + \kappa(\kappa \neq 0)$ с начальными данными $u_0(x) + \kappa \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ с компактным носителем не сохраняет компактность по $x-$носителю на протяжении всего времени существования. Было показано, что солитарная волна уравнения (1.1) обладает спектральными свойствами солитона и сохраняет стабильность своей формы при небольших возмущениях, см. [4]. Когда $\kappa = 0$, уравнение (1.1) принимает вид

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{1.2}$$

Мы рекомендуем читателям ознакомиться с [5, 6] для локальной хорошо поставленной задачи уравнения (1.2) в пространстве Соболева H^s с $s > \frac{3}{2}$, [7] для пиковых солитонов уравнения (1.2) и [8] для орбитальной устойчивости пиконов в норме H^1 относительно уравнения (1.2). Маккин [9] показал, что уравнение (1.2) взрывается тогда и только тогда, когда некоторая часть положительной составляющей m_0 лежит слева от некоторой части его отрицательной составляющей. Цзян, Ни и Чжоу [10] доказали теорему Маккина [9] для волновых разрывов уравнения (1.2) и проанализировали профиль взрыва. В [6, 11] были разработаны условия для начальных данных, при которых уравнение (1.2) с дисперсией взрывается за конечное время.

В 2009 году Владимир Новиков обнаружил новое интегрируемое уравнение с кубической нелинейностью (уравнение Новикова):

$$\begin{cases} m_t + u^2 m_x + 3uu_x m = 0, \\ m = u - u_{xx}, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

В [12] операторы $\mathcal{B}_1 = -2(3mD_x + 2m_x)(4D_x - D_x^3)^{-1}(3mD_x + m_x)$ и $\mathcal{B}_2 = (1-D_x^2)m^{-1}D_x m^{-1}(1-D_x^2)$ обеспечивают бигамильтонову структуру для иерархии симметрии уравнения (1.3). Было показано, что задача Коши уравнения (1.3) в пространстве Соболева H^s с $s > \frac{3}{2}$ локально хорошо поставлена в [13] – [15], с использованием методов аппроксимации типа Галеркина в [13] и теории полугрупп Като в [14, 15]. Локальная хорошо поставленность задачи Коши для уравнения (1.3) также сохранялась как в пространствах Бесова $B^{\frac{3}{2}}_{2,1}$ в [14, 15] так и в пространстве Бесова $B^s_{p,r}$ с $1 \leq p$, $r \leq +\infty$ и $s > \max\left\{1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2}\right\}$ в [16]. Ву и Инь [14] доказали, что уравнение (1.3) имеет гладкие решения, существующие глобально во времени, а также глобальные слабые решения типа пиконов. Устойчивость экспоненциального затухания уравнения (1.3) была исследована в [15]. Химонас и Хомс [17] показали, что отображение: $u(0) \to u(t)$ с $u_0 \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$, $0 \leq r < s$ является гельдерово непрерывным в H^r-топологии. Глобальное существование слабых решений задачи Коши уравнения (1.3) было установлено в [18], а глобальные дисперсионные решения были изучены в [19]. Используя специальную структуру уравнения (1.3) в [20, 21], были установлены достаточные условия на начальные данные, обеспечивающие взрыв уравнения в течение конечного времени. Наконец, механизм взрыва уравнения (1.3) с линейным дисперсионным членом был представлен также в [22].

Фокас [23], Олвер и Розенау [24], Цяо [25] исследовали класс уравнений волн в мелкой воде с более высокой нелинейностью, а именно уравнение Фокаса-Олвера-Розенау-Цяо (FORQ).

$$\left\{ \begin{array}{l} m_t + \left(\left(u^2 - u_x^2\right) m\right)_x = 0, \\ m = u - u_{xx}, \end{array} \right. \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \tag{1.4}$$

Уравнение было получено из двумерного уравнения Эйлера и доказано, что оно имеет структуры Лакса и бигамильтониана. Новый вид солитонных решений уравнения (1.4) был разработан Цяо [25]. В [26] было доказано, что уравнение (1.4) является хорошо поставленной начальной задачей в пространствах Соболева H^s, $s > \frac{5}{2}$, а отображение данных в решения было непрерывным, но не равномерно непрерывным. В частности, отображение данных в решение уравнения (1.4) не было равномерно непрерывным от $B^s_{p,r}(\mathbb{R})$ к $C([0,T]; B^s_{p,r})$, $s > \max\left\{2 + \frac{1}{p}, \frac{5}{2}\right\}$, $p \in (1, \infty]$ и $r \in [1, \infty)$ в [27]. Свойства непрерывности отображения решения были исследованы в [28], где было показано, что оно было Гёльдерово непрерывным в топологии H^r, когда $0 \leq r < s$. В [29], было доказано, что как на прямой, так и на окружности существуют начальные данные в H^s с $s < \frac{3}{2}$, при которых решение не является единственным. Чжан изучил глобальное существование слабого решения уравнения (1.4) в пространстве H^1 в [30] и получил стабильность и единственность слабого решения в $W^{1,1}$. В [31] авторы доказали, что решение уравнения (1.4) взрывается за конечное время, когда m_0 неотрицательно и существует точка x', в которой начальное значение m_0 больше нуля, а u_{0x} меньше отрицательного значения. Аналогичным образом, механизм взрыва уравнения (1.4) с переменными линейными членами дисперсии был изучен в [32], а механизм взрыва уравнения омКХ (обобщенное модифицированное уравнение Камасса-Холма) с линейным членом дисперсии был представлен в [22].

Уравнение (1.3) и уравнение (1.4) допускают следующие две сохраняющиеся плотности.

$$\tilde{H}_1\left[u(t)\right] = \int_{\mathbb{R}} u m dx = \int_{\mathbb{R}} u^2 + u_x^2 dx = \tilde{H}_1\left[u_0\right]$$

и

$$\tilde{H}_2\left[u(t)\right] = \int_{\mathbb{R}} u^4 + 2u^2 u_x^2 - \frac{1}{3} u_x^4 dx = \tilde{H}_2\left[u_0\right].$$

Чен, Го, Лю и Цю [22] доказали, что если существует некоторая точка $x_0 \in \mathbb{R}$ такая, что $u_0(x_0) > 0$ и

$$m_0(x) > 0, x < x_0; \quad m_0(x_0) = 0; \quad m_0(x) < 0, x > x_0.$$

Более того, если

$$\frac{u_0(x_0)}{2}\left[u_0^2(x_0)-u_{0x}^2(x_0)\right]+2\left(\sqrt{\frac{\tilde{H}_1^3[u_0]}{2}}+\sqrt{3\tilde{H}_1\left[u_0\right]\left(\tilde{H}_1^2\left[u_0\right]-\tilde{H}_2\left[u_0\right]\right)}\right)<0,$$

то соответствующее решение уравнения (1.3) взрывалось за конечное время. Они также рассмотрели уравнение (1.4) и уравнение (1.3) с дисперсионным членом γu_x и нашли закон сохранения, аналогичный $\tilde{H}_2$, чтобы доказать взрыв уравнения (1.4). Однако $\tilde{H}_2$ не сохранялось в уравнении (1.3) с дисперсионным членом, и они нашли замену, модифицировав $\tilde{H}_2$, чтобы установить результат взрыва для уравнения.

В данной работе мы рассматриваем уравнение Новикова с нелинейным членом высокого порядка.

$$\begin{cases} m_t+u^2m_x+3uu_xm+\gamma u^pu_x=0, x\in\mathbb{R}, t\geq 0, p>0, \\ m=u-u_{xx}, \\ u_0(x)=u(0,x), x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.5}$$

Мы также рассматриваем уравнение FORQ с нелинейным членом высокого порядка.

$$\begin{cases} m_t+\left(\left(u^2-u_x^2\right)m\right)_x+\gamma u^pu_x=0, x\in\mathbb{R}, t\geq 0, p\geq 0, \\ m=u-u_{xx}, \\ u_0(x)=u(0,x), x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Остальная часть данной статьи организована следующим образом. В Разделе 2 мы изучаем некоторые свойства уравнения Новикова с нелинейным членом высокого порядка. В Разделе 3 мы изучаем некоторые свойства уравнения FORQ с нелинейным членом высокого порядка.

2. Некоторые свойства уравнения Новикова с нелинейным членом высокого порядка

Уравнение (1.5) также можно записать в виде

$$u_t-u_{txx}+4u^2u_x-3uu_xu_{xx}-u^2u_{xxx}+\gamma u^pu_x=0.$$

Принимая свертку с функцией Грина $G(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ для оператора $\left(1-\partial_x^2\right)$, получаем эквивалентные нелинейные формы уравнения (1.5) следующим образом

$$u_t+u^2u_x+G*\partial_x\left(u^3+\frac{3}{2}uu_x^2+\frac{1}{p+1}\gamma u^{p+1}\right)+\frac{1}{2}G*u_x^3=0. \tag{2.1}$$

2.1. **Законы сохранения для уравнения Новикова с нелинейным членом высокого порядка.**

Лемма 2.1. *Уравнение* (1.5) *имеет закон сохранения*

$$\|u\|_{H^1} = \|u_0\|_{H^1}.$$

Доказательство. Умножив обе стороны уравнения (1.5) на u и проинтегрировав по $\mathbb{R}$, получаем, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^2 + u_x^2 dx = \int_{\mathbb{R}} u m_t dx = -\int_{\mathbb{R}} u\left(u^2 m_x + 3uu_x m + \gamma u^p u_x\right) dx = 0.$$

Доказательство завершено. □

Лемма 2.2. *Если*

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}} u^4 + 2u^2u_x^2 - \frac{1}{3}u_x^4 + \frac{8\gamma}{3(p+1)(p+2)}u^{p+2}dx \tag{2.2}$$

тогда выполняется следующее тождество типа Моравеца

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\gamma}{3(p+1)}\int_{\mathbb{R}} u_x^3 u^{p+1} dx. \tag{2.3}$$

Доказательство. Из уравнения (2.1) можно получить:

$$u_t = -u^2u_x - G * \partial_x\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_x^2 + \frac{1}{p+1}\gamma u^{p+1}\right) - \frac{1}{2}G * u_x^3. \tag{2.4}$$

Нахождение частной производной уравнения (1.5) по x дает следующее уравнение

(2.5)

$$u_{xt} + u^2u_{xx} + \frac{1}{2}uu_x^2 - u^3 - \frac{1}{p+1}\gamma u^{p+1} + G*\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_x^2 + \frac{1}{p+1}\gamma u^{p+1}\right) + \frac{1}{2}G*\partial_x u_x^3 = 0.$$

Итак, мы получаем

(2.6)

$$u_{xt} = -u^2u_{xx} - \frac{1}{2}uu_x^2 + u^3 + \frac{1}{p+1}\gamma u^{p+1} - G*\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_x^2 + \frac{1}{p+1}\gamma u^{p+1}\right) - \frac{1}{2}G*\partial_x u_x^3.$$

Взяв производную (2.2) по t и затем применив интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} &= \int_{\mathbb{R}} 4u^3u_t + 4uu_x^2u_t + 4u^2u_xu_{xt} - \frac{4}{3}u_x^3u_{xt} + \frac{8\gamma}{3(p+1)}u^{p+1}u_t dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{8}{3}u^3 + 4uu_x^2 + \frac{8}{3(p+1)}\gamma u^{p+1}\right)u_t + \frac{4}{3}u^3m_t - \frac{4}{3}u_x^3u_{xt}dx \\
&= -\frac{4\gamma}{3(p+1)}\int_{\mathbb{R}} u_x^3u^{p+1}dx.
\end{aligned}$$

Здесь мы используем (2.4), (2.6) и $\int_{\mathbb{R}} f(x)\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}f(x)dx = 0$. □

2.2. **Локальная хорошо поставленность и сценарий взрыва.**

Теорема 2.1. *Предположим, что $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ с $s > \frac{3}{2}$, существует $T > 0$ и единственное решение $u(t,x)$ уравнения* (1.5) *такое, что*

$$u(t,x) \in C([0,T); H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T); H^{s-1}(\mathbb{R})).$$

Доказательство аналогично доказательству для уравнения Новикова в [13, 15] и уравнения Камасса-Холма в [5]. Для краткости статьи мы опускаем подробное доказательство.

Лемма 2.3. *Пусть $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ для $s > \frac{3}{2}$. Решение уравнения* (1.5) *с с начальными данными u_0 взрывается в конечном времени T^* тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{t \to T^*} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{u u_x(t,x)\} = -\infty.$$

Доказательство. Нам нужно доказать только случай для $s = 2$, поскольку доказательство для $s > 2$ будет аналогичным случаю для $s = 2$.

Умножив уравнение (1.5) на m и проинтегрировав по $\mathbb{R}$ относительно x , получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} m^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}} u u_x m^2 dx + \gamma \int_{\mathbb{R}} u^p u_x m dx = 0.$$

Если uu_x ограничено снизу на $[0,T^*] \times \mathbb{R}$, т. е. существует $M > 0$ такое, что $uu_x \geq -M$ на $[0,T^*] \times \mathbb{R}$. Согласно лемме 2.1, имеем $\|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_{H^1}$.
Тогда имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} m^2 dx \leq 2M\int_{\mathbb{R}} m^2 dx + |\gamma| \int_{\mathbb{R}} |u^p u_x m|\, dx \\
&\leq 2M\int_{\mathbb{R}} m^2 dx + |\gamma|\, |u|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} |u_x m|\, dx \\
&\leq 2M\int_{\mathbb{R}} m^2 dx + |\gamma| \left(\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\|u\|_{H^1}^p\right)\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx + |\gamma| \left(\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\|u\|_{H^1}^p\right)\int_{\mathbb{R}} m^2 dx \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}} m^2 dx.
\end{aligned}$$

В силу неравенства Гронвалля получаем

$$\int_{\mathbb{R}} m^2 dx \leq e^{2Ct}\int_{\mathbb{R}} m_0^2 dx, \quad \text{п.в.} \quad t \in [0,T^*].$$

Несложно вычислить, что

$$\|m\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} (u - u_{xx})^2 dx = \int_{\mathbb{R}} u^2 + 2u_x^2 + u_{xx}^2 dx.$$

Следовательно,

$$\|u\|_{H^2}^2 \leq \|m\|_{L^2}^2 \leq 2\|u\|_{H^2}^2.$$

Следовательно, если uu_x ограничено снизу на $[0,T^*]$, тогда норма $H^2(\mathbb{R})$ решения уравнения (1.5) не взрывается за конечное время.

С другой стороны, мы можем получить, используя неравенство Соболева

$$\|uu_x\|_{L^\infty} \leq C\,\|u\|_{H^s}^2 .$$

Тогда, если норма H^s решения ограничена, из этого следует, что uu_x ограничено. $\square$

2.3. **Явление взрыва для уравнения Новикова с нелинейным членом высокого порядка.** Характеристики $q(t,x)$, связанные с уравнением (1.5), определяются следующим образом

$$\begin{cases} q_t(t,x) = u^2(t,q(t,x)), \quad x\in\mathbb{R}, \quad t\in[0,T). \\ q(0,x) = x, \end{cases}$$

Лемма 2.4. *Пусть $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3$. Тогда $u(t,q(t,x))$ и $u_x(t,q(t,x))$ удовлетворяют следующим уравнениям*

(2.7)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}u(t,q(t,x)) = -\gamma G * u^p u_x + \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^y\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 - \frac{1}{2}u_y^3\right)dy \\
&- \frac{1}{2}e^x\int_x^{+\infty} e^{-y}\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 + \frac{1}{2}u_y^3\right)dy, \\
&\frac{d}{dt}u_x(t,q(t,x)) = u^3(t,q(t,x)) - \frac{1}{2}uu_x^2(t,q(t,x)) + \frac{\gamma}{p+1}\left(u^{p+1}(t,q(t,x)) - G * u^{p+1}\right) \\
&- \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^y\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 - \frac{1}{2}u_y^3\right)dy - \frac{1}{2}e^x\int_x^{+\infty} e^{-y}\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 + \frac{1}{2}u_y^3\right)dy.
\end{aligned}$$

Доказательство. Сначала воспользуемся (2.1) для вычисления $\frac{d}{dt}u(t,q(t,x))$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}u(t,q(t,x)) &= u_t(t,q(t,x)) + u^2u_x(t,q(t,x)) \\
&= -\gamma G * u^p u_x(t,q(t,x)) - \frac{1}{2}G * u_x^3 - G * \partial_x\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_x^2 + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1}\right) \\
&= -\gamma G * u^p u_x + \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^y\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 - \frac{1}{2}u_y^3\right)dy \\
&\quad - \frac{1}{2}e^x\int_x^{+\infty} e^{-y}\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 + \frac{1}{2}u_y^3\right)dy.
\end{aligned}$$

Используя (2.5), мы можем получить

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}u_x(t,q(t,x)) = u_{tx}(t,q(t,x)) + u^2 u_{xx}(t,q(t,x))\\
&= u^3 - \frac{1}{2}uu_x^2 + \frac{\gamma}{p+1}\left(u^{p+1}(t,q(t,x)) - G * u^{p+1}(t,q(t,x))\right)\\
&\quad - G * \left(u^3 + \frac{3}{2}uu_x^2\right) - \frac{1}{2}G * \partial_x u_x^3\\
&= u^3(t,q(t,x)) - \frac{1}{2}uu_x^2(t,q(t,x)) + \frac{\gamma}{p+1}\left(u^{p+1}(t,q(t,x)) - G * u^{p+1}\right) -\\
&\quad \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 - \frac{1}{2}u_y^3\right)dy - \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-y}\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 + \frac{1}{2}u_y^3\right)dy.
\end{aligned}
$$

□

Теперь определим следующие формулы

(2.8)

$$
\begin{aligned}
&f(t) = \left(\int_{\mathbb{R}} u_x^4 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad C_1 = \frac{4}{3}|\gamma|\left(\frac{1}{2^{\frac{p+1}{2}}}\left\|u_0\right\|_{H^1}^{p+2}\right),\\
&C_2 = -H(0) + \|u_0\|_{H^1}^4 + \frac{8\,|\gamma|}{3\cdot 2^{\frac{p}{2}}(p+1)(p+2)}\left(\|u_0\|_{H^1}\right)^{p+2},\\
&C_3 = \frac{3}{2}\left\|u_0\right\|_{H^1} C_1, \quad C_4 = |\gamma|\left(\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\left\|u_0\right\|_{H^1}^{p+1}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u_0\right\|_{H^1}^3 + \sqrt{3C_2}\left\|u_0\right\|_{H^1}\right),\\
&K(t) = \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left\|u_0\right\|_{H^1}^3 + \left\|u_0\right\|_{H^1}\left(\frac{3}{2}C_1 t + \sqrt{3C_2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Теорема 2.2. *Пусть $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ для $s > \frac{3}{2}$. Предположим, что существуют некоторые $0 < \beta < 1$ и $x_1 \in \mathbb{R}$ такие, что $u_0(x_1) > 0$ и*

$$
u_{0,x}(x_1) < -\frac{B+1}{B-1}\sqrt{\frac{2K_1(T_1)}{\beta u_0(x_1)}}, \tag{2.9}
$$

где

$$
B = e^{T_1\sqrt{2\beta u_0(x_1)K_1(T_1)}},
$$

$$
T_1 = \frac{-C_4 + \sqrt{C_4^2 + 4C_3(1-\beta)u_0(x_1)}}{2C_3},
$$

$$
K_1(t) = (2-\beta)^3 u_0^3(x_1) + \frac{|\gamma|}{p+1}\left(\frac{1}{2^{\frac{p+1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\right)\left\|u_0\right\|_{H^1}^{p+1} + K(t), \tag{2.10}
$$

с C_3, C_4 и $K(t)$, определёнными в (2.8). Тогда соответствующее решение $u(t,x)$ взрывается за конечное время с оценкой времени взрыва T^*, граница *которого составляет*

$$T^* \leq T_2 = \frac{1}{\sqrt{2\beta u_0(x_1)K_1(T_1)}} \ln \frac{u_{0,x}(x_1) - \sqrt{\frac{2K_1(T_1)}{\beta u_0(x_1)}}}{u_{0,x}(x_1) + \sqrt{\frac{2K_1(T_1)}{\beta u_0(x_1)}}}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Пусть

$$Q(t) = \int_{\mathbb{R}} u^4 + 2u^2u_x^2 + \frac{8\gamma}{3(p+1)(p+2)} u^{p+2} dx.$$

Из леммы 2.1 следует

$$\int_{\mathbb{R}} u^2 u_x^2 dx \leq \|u\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{H^1}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{H^1}^4$$

и

$$\begin{aligned} Q(t) &\leq \|u\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{L^2}^2 + 2\int_{\mathbb{R}} u^2 u_x^2 dx + \frac{8|\gamma|}{3(p+1)(p+2)} \|u\|_{L^\infty}^p \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|u_0\|_{H^1}^4 + \frac{8|\gamma|}{3 \cdot 2^{\frac{p}{2}}(p+1)(p+2)} \left(\|u_0\|_{H^1}\right)^{p+2}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Пусть

$$f(t) = \left(\int_{\mathbb{R}} u_x^4 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

По (2.3) и определению C_1 получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{4\gamma}{3(p+1)} \int_{\mathbb{R}} u_x^3 u^{p+1} dx \\ &\leq \frac{4}{3}|\gamma| \left[\int_{\mathbb{R}} (u^{p+1}u_x)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} u_x^4 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{4}{3}|\gamma| \left(\|u\|_{L^\infty}^{2p+2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} f(t) \\ &\leq \frac{4}{3}|\gamma| \left(\frac{1}{2^{\frac{p+1}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^{p+2}\right) f(t) = C_1 f(t), \end{aligned} \tag{2.13}$$

затем находим производную (2.13) по t,

$$-H(t) \leq C_1 \int_0^t f(s) ds - H(0).$$

Из определения $H(t)$ получаем

$$\frac{1}{3} f^2(t) \leq C_1 \int_0^t f(s) ds - H(0) + Q(t).$$

Поэтому имеем

$$f^2(t) \leq 3C_1 \int_0^t f(s) ds + 3C_2, \tag{2.14}$$

где мы использовали (2.12) и определение C_2.

Возьмем

$$g(t) = 3C_1 \int_0^t f(s)ds + 3C_2.$$

Тогда из (2.14) получаем

$$g'(t) = 3C_1 f(t) \leq 3C_1 g^{\frac{1}{2}}(t).$$

Интегрирование по интервалу $[0,t]$ дает

$$\sqrt{g(t)} \leq \frac{3}{2}C_1 t + \sqrt{g(0)} = \frac{3}{2}C_1 t + \sqrt{3C_2}.$$

Таким образом

$$f(t) \leq \sqrt{g(t)} \leq \frac{3}{2}C_1 t + \sqrt{3C_2}.$$

Применяя вышеуказанное неравенство, мы можем получить следующие оценки

(2.15)

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 - \frac{1}{2}u_y^3)dy \pm \frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-y}(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 + \frac{1}{2}u_y^3)dy\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} |u|^3 + \frac{3}{2}\left|uu_y^2\right| + \frac{1}{2}|u_y|^3 dy + \frac{1}{2}\int_{x}^{+\infty} |u|^3 + \frac{3}{2}\left|uu_y^2\right| + \frac{1}{2}|u_y|^3 dy \\
&\leq \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{x} |u|^3 + |u_y|^3 dy + \frac{3}{4}\int_{x}^{+\infty} |u|^3 + |u_y|^3 dy \\
&= \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}} |u|^3 + |u_y|^3 dy \\
&\leq \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\|u_0\|_{H^1}^3 + \|u_y\|_{L^4}^2 \|u_0\|_{H^1}\right) \\
&\leq \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\|u_0\|_{H^1}^3 + \|u_0\|_{H^1}\left(\frac{3}{2}C_1 t + \sqrt{3C_2}\right)\right) = K(t).
\end{aligned}$$

Из (2.7) и (2.15) следует, что

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}u(t,q(t,x_1))\right| &\leq |\gamma|\,|G * u^p u_x| + \left|\frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 - \frac{1}{2}u_y^3\right)dy\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-y}\left(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 + \frac{1}{2}u_y^3\right)dy\right| \\
&\leq |\gamma|\,\|G\|_{L^2}\,\|u^p u_x\|_{L^2} + K(t) \\
&\leq |\gamma|\left(\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\|u_0\|_{H^1}^{p+1}\right) + K(t) = 2C_3 t + C_4,
\end{aligned}$$

где C_3 и C_4 определены в (2.8). Интегрирование по интервалу времени $[0,t]$ дает

$$u_0(x_1) - C_3 t^2 - C_4 t \leq u(t,q(t,x_1)) \leq u_0(x_1) + C_3 t^2 + C_4 t. \tag{2.16}$$

Теперь рассмотрим (2.16) во времени $0 \leq t \leq T_1 = \frac{-C_4+\sqrt{C_4^2+4C_3(1-\beta)u_0(x_1)}}{2C_3}$, которое можно получить

$$0 < \beta u_0(x_1) \leq u(t, q(t, x_1)) \leq (2-\beta) u_0(x_1).$$

Применяя оценку свертки (2.15) к динамике u_x в (2.7), получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} u_x(t, q(t, x_1)) \leq u\left(u^2 - \frac{1}{2} u_x^2\right)(t, q(t, x_1)) \\
&+ \frac{|\gamma|}{p+1} \left| u^{p+1}(t, q(t, x_1)) - G * u^{p+1}(t, q(t, x_1)) \right| + K(t) \\
&\leq u\left(u^2 - \frac{1}{2} u_x^2\right)(t, q(t, x_1)) + \frac{|\gamma|}{p+1} \left(\|u\|_{L^\infty}^{p+1} + |G|_{L^1} \|u^{p+1}\|_{L^2} \right) + K(t) \\
&\leq u\left(u^2 - \frac{1}{2} u_x^2\right)(t, q(t, x_1)) + \frac{|\gamma|}{p+1} \left(\frac{1}{2^{\frac{p+1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \right) \|u_0\|_{H^1}^{p+1} + K(t).
\end{aligned}$$

Следовательно, для $0 \leq t \leq T_1$ имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} u_x(t, q(t, x_1)) \leq -\frac{\beta}{2} u_0(x_1) u_x^2(t, q(t, x_1)) + (2-\beta)^3 u_0^3(x_1) \\
&+ \frac{|\gamma|}{p+1} \left(\frac{1}{2^{\frac{p+1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \right) \|u_0\|_{H^1}^{p+1} + K(t) \\
&\leq -\frac{\beta}{2} u_0(x_2) u_x^2(t, q(t, x_1)) + K_1(T_1),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где $K(t)$ возрастает по отношению к t, а $K_1(t)$ определено в (2.10).

Пусть $\eta = \sqrt{\frac{2K_1(T_1)}{\beta u_0(x_1)}}$. Из (2.9) можно заметить, что $u_{0,x}(x_1) < -\eta$, а из (2.17) можно сделать вывод, что

$$u_x(t, q(t, x_1)) \leq \frac{\eta \left[1 + \frac{u_{0,x}(x_1)-\eta}{u_{0,x}(x_1)+\eta} e^{-\eta\beta u_0(x_1)t} \right]}{1 - \frac{u_{0,x}(x_1)-\eta}{u_{0,x}(x_1)+\eta} e^{-\eta\beta u_0(x_1)t}}.$$

Пусть

$$h(t) = 1 - \frac{u_{0,x}(x_1)-\eta}{u_{0,x}(x_1)+\eta} e^{-\eta\beta u_0(x_1)t}, \tag{2.18}$$

а затем, вычислив производную этого уравнения по t, получаем

$$h'(t) = \eta\beta u_0(x_1) \frac{u_{0,x}(x_1)-\eta}{u_{0,x}(x_1)+\eta} e^{-\eta\beta u_0(x_1)t}$$

следовательно, $h'(t) \geq 0$. Из (2.9), (2.11) и (2.18), получаем, что $h(0) < 0$, $h(T_2) = 0$ и $h(T_1) > 0$, что означает $T_2 < T_1$.

Таким образом, из приведенных выше вычислений можно сделать вывод, что $u_x(t, q(t, x_1)) \to -\infty$ при $t \to T^*$. Наконец, при $t \to T^*$, $u(t, q(t, x_1)) \geq \beta u_0(x_1) > 0$. Это приводит к взрыву $uu_x(t, q(t, x_1))$. На этом доказательство Теоремы 2.2 завершено. $\square$

3. Некоторые свойства решений уравнения FORQ с нелинейным членом высокого порядка

Уравнение (1.6) также можно записать в виде

$$u_t - u_{txx} + 3u^2 u_x - u_x^3 - u^2 u_{xxx} - u_x^2 u_{xxx} - 4uu_x u_{xx} + 2u_x u_{xx}^2 + \gamma u^p u_x = 0.$$

Принимая свертку с функцией Грина $G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ для оператора Гельмгольца $(1-\partial_x^2)$, получаем следующие эквивалентные нелокальные уравнения

$$u_t + \left(u^2 - \frac{1}{3}u_x^2\right)u_x + \partial_x G * \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_x^2 + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1}\right) + \frac{1}{3}G * u_x^3 = 0 \tag{3.1}$$

3.1. **Законы сохранения для уравнения FORQ с нелинейным членом высокого порядка.**

Лемма 3.1. *Уравнение* (1.6) *имеет законы сохранения*

$$\|u\|_{H^1} = \|u_0\|_{H^1} \tag{3.2}$$

и

$$H_2 = \int_{\mathbb{R}} u^4 + 2u^2u_x^2 - \frac{1}{3}u_x^4 + \frac{4}{(p+2)(p+1)}\gamma u^{p+2}dx = H_2[u_0]. \tag{3.3}$$

Доказательство. Умножив обе стороны уравнения (1.6) на u и проинтегрировав по $\mathbb{R}$, получаем, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^2 + u_x^2 dx = \int_{\mathbb{R}} um_t dx = -\int_{\mathbb{R}} u[2u_x m^2 + (u^2 - u_x^2)m_x + \gamma u^p u_x]dx = 0.$$

Из приведенного выше уравнения мы делаем вывод, что $\|u\|_{H^1} = \|u_0\|_{H^1}$.

Мы знаем, что уравнение (1.6) можно переписать в виде

$$m_t + \partial_x\left((u^2 - u_x^2)m + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1}\right) = 0. \tag{3.4}$$

Находим производную уравнения (1.6) по t, а затем подставляем в (3.4), чтобы получить

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}H_2 = \int_{\mathbb{R}} 4u^3u_t + 4uu_x^2u_t + 4u^2u_xu_{xt} - \frac{4}{3}u_x^3u_{xt} + \frac{4}{p+1}\gamma u^{p+1}u_t dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} 4u^3u_t - 4uu_x^2u_t - 4u^2u_{xx}u_t + 4u_x^2u_{xx}u + \frac{4}{p+1}\gamma u^{p+1}u_t dx \\
&= 4\int_{\mathbb{R}}\left((u^2 - u_x^2)m + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1}\right)u_t dx \\
&= 4\int_{\mathbb{R}}\left((u^2 - u_x^2)m + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1}\right)(1-\partial_x^2)^{-1}m_t dx \\
&= -4\int_{\mathbb{R}}\left((u^2 - u_x^2)m + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1}\right)(1-\partial_x^2)^{-1}\left((u^2 - u_x^2)m + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1}\right)dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

где мы использовали

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}f(x)dx = 0.$$

Таким образом, мы завершили доказательство этой леммы. □

3.2. **Локальная хорошо поставленность и сценарий взрыва.**

Теорема 3.1. *Предположим, что $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ с $s > \frac{5}{2}$, существует $T > 0$ и единственное решение $u(t,x)$ уравнения* (1.6) *такое, что*

$$u(t,x) \in C([0,T); H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T); H^{s-1}(\mathbb{R})).$$

Доказательство аналогично доказательству уравнения FORQ в [26] и уравнения Камасса-Холма в [5]. Для краткости статьи мы опускаем подробное доказательство.

Лемма 3.2. *Пусть $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ для $s > \frac{5}{2}$. Решение уравнения* (1.6) *с начальными данными u_0 взрывается в конечном времени T^* тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{t\to T^*}\inf_{x\in\mathbb{R}}\{u_x m(t,x)\} = -\infty.$$

Доказательство. Нам нужно доказать только случай для $s = 3$. Доказательство будет аналогичным для $s > 3$.

Из леммы 3.1 можно сделать вывод, что

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_{H^1}, \quad \text{и} \quad \|u_x\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|m\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Умножив уравнение (1.6) на m, проинтегрировав x по $\mathbb{R}$, а затем применив интегрирование по частям, получим следующее уравнение

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} m^2dx &= -\int_{\mathbb{R}}(u^2-u_x^2)mm_xdx - 2\int_{\mathbb{R}} u_xm^3dx - \gamma\int_{\mathbb{R}} u^pu_xmdx \\ &\leq -\int_{\mathbb{R}}(mu_x)m^2dx + |\gamma|\,\|u\|_{L^\infty}^p\int_{\mathbb{R}}|u_xm|\,dx \\ &\leq -\int_{\mathbb{R}}(mu_x)m^2dx + 2\,|\gamma|\,\|u\|_{L^\infty}^p\int_{\mathbb{R}} m^2dx.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Если u_xm ограничено снизу на $[0,T^*]\times\mathbb{R}$, т. е. существует $M_1 > 0$ такое, что $u_xm \geq -M_1$ на $[0,T^*]\times\mathbb{R}$. Тогда (3.5) принимает вид:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} m^2dx \leq M_1\int_{\mathbb{R}} m^2dx + 2\,|\gamma|\,\|u\|_{L^\infty}^p\int_{\mathbb{R}} m^2dx \leq C\int_{\mathbb{R}} m^2dx.$$

Используя неравенство Гронвалля, получаем

$$\int_{\mathbb{R}} m^2dx \leq e^{2Ct}\int_{\mathbb{R}} m_0^2dx.$$

Таким образом, $\|m\|_{L^2}$ ограничено.

Мы берем производную уравнения (1.6) по x, то есть

$$\begin{aligned} m_{tx} &= -2u_{xx}m^2 - 6u_x m m_x - (u^2 - u_x^2)m_{xx} - \gamma p u^{p-1}u_x^2 - \gamma u^p u_{xx} \\ &= -2um^2 + 2m^3 - 6u_x m m_x - (u^2 - u_x^2)m_{xx} - \gamma p u^{p-1}u_x^2 - \gamma u^{p+1} + \gamma u^p m. \end{aligned}$$

Умножим обе части уравнения на m_x, а затем проинтегрируем x по $\mathbb{R}$, получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx = -5\int_{\mathbb{R}} u_x m m_x^2 dx + \frac{2}{3}\int_{\mathbb{R}} u_x m^3 dx - \gamma p \int_{\mathbb{R}} u^{p-1}u_x^2 m_x dx \\ &- \gamma \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} m_x dx + \gamma \int_{\mathbb{R}} u^p m m_x dx \\ &\leq -5\int_{\mathbb{R}} u_x m m_x^2 dx + \frac{2}{3}\int_{\mathbb{R}} u_x m^3 dx + 2|\gamma| p \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_x\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx \\ &\quad + |\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} |u m_x| dx + |\gamma| p \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} |m m_x| dx \\ &\leq -5\int_{\mathbb{R}} u_x m m_x^2 dx + \frac{2}{3}\int_{\mathbb{R}} u_x m^3 dx + 2|\gamma| p \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_x\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx \\ &\quad + |\gamma| p \|u\|_{L^\infty}^p \|u\|_{H^1}^2 + 2|\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx + |\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} m^2 dx. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Следовательно, из (3.5) и (3.6) получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} (m^2 + m_x^2) dx \leq -5\int_{\mathbb{R}} u_x m m_x^2 dx - \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} u_x m^3 dx \\ &\quad + 2|\gamma| p \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_x\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx \\ &\quad + |\gamma| p \|u\|_{L^\infty}^p \|u\|_{H^1}^2 + 2|\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx + 3|\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} m^2 dx \\ &\leq 5M_1 \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx + \frac{1}{3}M_1 \int_{\mathbb{R}} m^2 dx + C\int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx + C\int_{\mathbb{R}} m^2 dx + C \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}} (m^2 + m_x^2) dx + C. \end{aligned}$$

В силу неравенства Гронвалля получаем

$$\|u\|_{H^3} \leq \int_{\mathbb{R}} m^2 + m_x^2 dx \leq e^{2Ct}\left(\int_{\mathbb{R}} m_0^2 + m_{0x}^2 dx + 2Ct\right), \quad \text{п.в.} \quad t \in [0, T^*].$$

Следовательно, если $u_x m$ ограничено снизу на $[0, T^*]$, то норма $H^3(\mathbb{R})$ решения (1.6) не взрывается за конечное время. С другой стороны, используя неравенство Соболева, если $\lim_{t\to T^*} \inf_{x\in\mathbb{R}} \{u_x m(t,x)\} = -\infty$, то решение взорвется за конечное время. □

3.3. **Явление взрыва для уравнения FORQ с нелинейным членом высокого порядка.** Характеристики уравнения (1.6) следующие

$$\begin{cases} q_t(t,x) = u^2(t, q(t,x)) - u_x^2(t, q(t,x)), x \in \mathbb{R}, t \in [0, T). \\ q(0,x) = x, \end{cases}$$

Лемма 3.3. *Пусть* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3$. *Тогда* $u(t, q(t,x))$, $u_x(t, q(t,x))$ *и* $m(t, q(t,x))$ *удовлетворяют следующим уравнениям*

(3.7)

$$\frac{d}{dt}u(t,q(t,x)) = -\frac{2}{3}u_x^3(t,q(t,x)) - \gamma G * u^p u_x + \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^y\left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 - \frac{1}{3}u_y^3\right)dy$$
$$-\frac{1}{2}e^x\int_x^{+\infty} e^{-y}\left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 + \frac{1}{3}u_y^3\right)dy,$$
$$\frac{d}{dt}u_x(t,q(t,x)) = \frac{2}{3}u^3(t,q(t,x)) - uu_x^2(t,q(t,x)) + \frac{\gamma}{p+1}\left(u^{p+1}(t,q(t,x)) - G * u^{p+1}\right)$$
$$-\frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^y\left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 - \frac{1}{3}u_y^3\right)dy - \frac{1}{2}e^x\int_x^{+\infty} e^{-y}\left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 + \frac{1}{3}u_y^3\right)dy,$$
$$\frac{d}{dt}m(t,q(t,x)) = -2u_x m^2(t,q(t,x)) - \gamma u^p u_x(t,q(t,x)).$$

Доказательство. Вычислим сначала $\frac{d}{dt}u(t,q(t,x))$ и воспользуемся формулой (3.1) , чтобы получить

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}u(t,q(t,x)) = u_t(t,q(t,x)) + \left(u^2 - u_x^2\right)u_x(t,q(t,x)) \\
&= -\frac{2}{3}u_x^3(t,q(t,x)) - \gamma G * u^p u_x - G * \partial_x(\frac{2}{3}u^3 + uu_x^2) - \frac{1}{3}G * u_x^3 \\
&= -\frac{2}{3}u_x^3(t,q(t,x)) - \gamma G * u^p u_x + \frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^y\left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 - \frac{1}{3}u_y^3\right)dy \\
&\quad -\frac{1}{2}e^x\int_x^{+\infty} e^{-y}\left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 + \frac{1}{3}u_y^3\right)dy.
\end{aligned}$$

Взяв производную (3.1) по x, мы получаем

$$u_{tx} + uu_x^2 + u^2u_{xx} - u_x^2u_{xx} - \frac{2}{3}u^3 - \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1} + \frac{1}{3}G * \partial_x u_x^3$$
$$+G * (\frac{2}{3}u^3 + uu_x^2 + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1}) = 0.$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}u_x(t,q(t,x)) = u_{tx}(t,q(t,x)) + \left(u^2 - u_x^2\right)u_{xx}(t,q(t,x)) \\
&= \frac{2}{3}u^3(t,q(t,x)) - uu_x^2(t,q(t,x)) + \frac{\gamma}{p+1}\left(u^{p+1}(t,q(t,x)) - G * u^{p+1}\right) \\
&\quad -\frac{1}{3}G * \partial_x u_x^3 - G * (\frac{2}{3}u^3 + uu_x^2) \\
&= \frac{2}{3}u^3(t,q(t,x)) - uu_x^2(t,q(t,x)) + \gamma\left(\frac{1}{p+1}u^{p+1}(t,q(t,x)) - G * \frac{1}{p+1}u^{p+1}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^y\left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 - \frac{1}{3}u_y^3\right)dy - \frac{1}{2}e^x\int_x^{+\infty} e^{-y}\left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 + \frac{1}{3}u_y^3\right)dy.
\end{aligned}$$

Наконец, из (1.6) вытекает

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m(t,q(t,x)) &= m_t(t,q(t,x)) + (u^2-u_x^2)_x m(t,q(t,x))\\ &= -(2uu_x - 2u_xu_{xx})m(t,q(t,x)) - \gamma u^p u_x(t,q(t,x))\\ &= -2u_x m^2(t,q(t,x)) - \gamma u^p u_x(t,q(t,x)). \qquad \square\end{aligned}$$

Теперь определим

(3.8)

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\|u_0\|_{H^1}^3 + \frac{1}{2}\|u_0\|_{H^1}\left[3\left(\|u_0\|_{H^1}^4 - H_2[u_0]\right) + \frac{12|\gamma|}{2^{\frac{p}{2}}(p+1)(p+2)}\|u_0\|_{H^1}^{p+2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$A_2 = |\gamma|\frac{3}{2^{\frac{p+1}{2}}}\|u_0\|_{H^1}^{p+1} + \frac{3}{2}A_1, \quad A_3 = A_1 + \frac{|\gamma|}{p+1}\frac{1}{2^{\frac{p-1}{2}}}\|u_0\|_{H^1}^{p+1} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^1}^3.$$

Теорема 3.2. *Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$ и $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ с $s > \frac{5}{2}$. Предположим, что существует некоторая $x_2 \in \mathbb{R}$ такая, что*

(3.9)

$$\begin{aligned}&u_0(x_2) > 0, \quad u_{0,x}(x_2) \le \min\left\{-(A_2)^{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{A_3}{u_0(x_2)}}\right\},\\ &m_0(x_2) > \sqrt{-\frac{\gamma}{2^{\frac{p+2}{2}}}\|u_0\|_{H^1}^p}(\gamma \le 0), \quad m_0 \in \mathbb{R}(\textit{нет ограничений})(\gamma > 0),\end{aligned}$$

где A_2 и A_3 определены в (3.8). Тогда соответствующее решение $u(t,x)$ взрывается за конечное время с оценкой времени взрыва T^* как

$$T^* \le \begin{cases}\dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{m_0(x_2)}{\sqrt{\frac{\gamma}{2}u_0^p(x_2)}}\right)}{-2u_{0x}(x_2)}, & \textit{если} \quad \gamma > 0,\\ \dfrac{1}{-4\sqrt{\Delta}u_{0x}(x_2)}\ln\dfrac{m_0(x_2)+\sqrt{\Delta}}{m_0(x_2)-\sqrt{\Delta}}, & \textit{если} \quad \gamma < 0,\\ \dfrac{1}{-2u_{0x}(x_2)m_0(x_2)}, & \textit{если} \quad \gamma = 0,\end{cases} \qquad \textit{где } \Delta = -\frac{\gamma}{2^{\frac{p+2}{2}}}\|u_0\|_{H^1}^p.$$

Доказательство. Сначала получим некоторые полезные оценки, которые будут использованы позже. Используя (3.2) и (3.3), получаем следующие оценки:

(3.10)

$$\begin{aligned}&\|u_x\|_{L^4}^4 = 3\int_{\mathbb{R}} u^4 + 2u^2u_x^2 dx + \frac{12\gamma}{(p+1(p+2))}\int_{\mathbb{R}} u^{p+2}dx - 3H_2[u_0]\,\|u_x\|_{L^4}^4\\ &= 3\int_{\mathbb{R}} u^4 + 2u^2u_x^2 dx + \frac{12\gamma}{(p+1)(p+2)}\int_{\mathbb{R}} u^{p+2}dx - 3H_2[u_0]\\ &\le 3\left(\|u\|_{L^\infty}^2\|u\|_{L^2}^2 + 2\|u\|_{L^\infty}^2\|u_x\|_{L^2}^2\right) - 3H_2[u_0] + \frac{12|\gamma|}{(p+1)(p+2)}\|u\|_{L^\infty}^{p+2}\|u\|_{L^2}^2\\ &\le 3\left(\|u_0\|_{H^1}^4 - H_2[u_0]\right) + \frac{12|\gamma|}{2^{\frac{p}{2}}(p+1)(p+2)}\|u_0\|_{H^1}^{p+2}.\end{aligned}$$

Из вышесказанного получаем следующую оценку

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{x}e^{y}(\frac{2}{3}u^3+uu_y^2-\frac{1}{3}u_y^3)dy\pm\frac{1}{2}e^{x}\int_{x}^{+\infty}e^{-y}(\frac{2}{3}u^3+uu_y^2+\frac{1}{3}u_y^3)dy\right|\\
&\le\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\frac{2}{3}|u|^3+\left|uu_y^2\right|+\frac{1}{3}|u_y|^3\,dy+\frac{1}{2}\int_{x}^{+\infty}\frac{2}{3}|u|^3+\left|uu_y^2\right|+\frac{1}{3}|u_y|^3\,dy\\
&\le\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}|u|^3+|u_y|^3\,dy+\frac{1}{2}\int_{x}^{+\infty}|u|^3+|u_y|^3\,dy\\
&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u|^3+|u_y|^3\,dy\le\frac{\sqrt{2}}{4}\|u_0\|_{H^1}^3\\
&+\frac{1}{2}\|u_0\|_{H^1}\left[3\left(\|u_0\|_{H^1}^4-H_2[u_0]\right)+\frac{12|\gamma|}{2^{\frac{p}{2}}(p+1)(p+2)}\|u_0\|_{H^1}^{p+2}\right]^{\frac{1}{2}}=A_1.
\end{aligned}$$

Используя снова (3.2), получаем

$$\left|u^{p+1}-G*u^{p+1}\right|\le 2\|u\|_{L^\infty}^{p+1}\le\frac{1}{2^{\frac{p-1}{2}}}\|u_0\|_{H^1}^{p+1}. \tag{3.11}$$

Подставляя оценки (3.10)-(3.11) в (3.7), получаем

$$\frac{d}{dt}u(t,q(t,x_2))\ge-\frac{2}{3}u_x^3(t,q(t,x_2))-|\gamma|\frac{1}{2^{\frac{p-1}{2}}}\|u_0\|_{H^1}^{p+1}-A_1,$$

$$\frac{d}{dt}u_x(t,q(t,x_2))\le-uu_x^2(t,q(t,x_2))+A_1+\frac{|\gamma|}{p+1}\frac{1}{2^{\frac{p-1}{2}}}\|u_0\|_{H^1}^{p+1}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^1}^3.$$

Таким образом, $u(t,q(t,x_2))$ монотонно возрастает, когда

$$u_x^3(t,q(t,x_2))\le-|\gamma|\frac{3}{2^{\frac{p+1}{2}}}\|u_0\|_{H^1}^{p+1}-\frac{3}{2}A_1=-A_2$$

и $u_x(t,q(t,x_2))$ монотонно убывает, когда

$$uu_x^2(t,q(t,x_2))\ge A_1+\frac{|\gamma|}{p+1}\frac{1}{2^{\frac{p-1}{2}}}\|u_0\|_{H^1}^{p+1}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^1}^3=A_3.$$

Исходя из заданных начальных условий (3.9), мы можем получить

$$u(t,q(t,x_2))\ge u_0(x_2)>0,\quad u_x(t,q(t,x_2))\le u_{0,x}(x_2)<0. \tag{3.12}$$

Когда $\gamma>0$, используя (3.7) и (3.12), мы можем получить

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}m(t,q(t,x_2))&\ge-u_{0x}(x_2)(2m^2+\gamma u^p)(t,p(t,x_2))\\
&\ge-u_{0x}(x_2)\left(2m^2(t,q(t,x_2))+\gamma u_0^p(x_2)\right)>0.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Тогда мы приходим к выводу, что $m(t,q(t,x_2))$ возрастает.

Интегрируя неравенство (3.13) по $[0,t]$, получаем

$$m(t,q(t,x_2))\ge\sqrt{\tfrac{\gamma}{2}u_0^p(x_2)}\tan\left(-2u_{0x}(x_2)\sqrt{\frac{\gamma}{2}u_0^p(x_2)}t+\arctan\left(\frac{m_0(x_2)}{\sqrt{\frac{\gamma}{2}u_0^p(x_2)}}\right)\right).$$

Следовательно, $m(t, q(t, x_2)) \to +\infty$, при

$$t \to \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{m_0(x_2)}{\sqrt{\frac{\gamma}{2}u_0^p(x_2)}}\right)}{-2u_{0x}(x_2)}.$$

Таким образом,

$$u_x m(t, q(t, x_2)) \to -\infty, \quad \text{при} \quad t \to \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{m_0(x_2)}{\sqrt{\frac{\gamma}{2}u_0^p(x_2)}}\right)}{-2u_{0x}(x_2)}.$$

Для $\gamma < 0$ и вследствие того, что $m_0(x_2) > \sqrt{-\frac{\gamma}{2^{\frac{p+2}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^p}$, получаем

$$m_0^2 + \frac{\gamma}{2^{\frac{p+2}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^p > 0.$$

Таким образом, $m(t, q(t, x_2))$ монотонно возрастает, и $m(t, q(t, x_2)) > m_0(x_2)$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} m(t, q(t, x_2)) = -u_x(2m^2 + \gamma u^p)(t, p(t, x_2)) \\
&\geq -2u_{0x}(x_2)\left(m^2(t, q(t, x_2)) + \frac{\gamma}{2^{\frac{p+2}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^p\right) \qquad (3.14) \\
&= -2u_{0x}(x_2)\left(m - \sqrt{-\frac{\gamma}{2^{\frac{p+2}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^p}\right)\left(m + \sqrt{-\frac{\gamma}{2^{\frac{p+2}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^p}\right) > 0.
\end{aligned}$$

Проинтегрируем неравенство (3.14) по $[0, t]$, получим

$$m(t, q(t, x_2)) \geq \frac{\sqrt{\Delta}(1 + E(t))}{1 - E(t)} \to +\infty, \quad \text{при} \quad t \to \frac{1}{-4\sqrt{\Delta}u_{0x}(x_2)} \ln \frac{m_0(x_2) + \sqrt{\Delta}}{m_0(x_2) - \sqrt{\Delta}},$$

где $E(t) = e^{-4\sqrt{\Delta}u_{0x}(x_2)t} \frac{m_0(x_2) - \sqrt{\Delta}}{m_0(x_2) + \sqrt{\Delta}}$ и $\Delta = -\frac{\gamma}{2^{\frac{p+2}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^p$. Таким образом,

$$u_x m(t, q(t, x_2)) \to -\infty, \quad \text{при} \quad t \to \frac{1}{-4\sqrt{\Delta}u_{0x}(x_2)} \ln \frac{m_0(x_2) + \sqrt{\Delta}}{m_0(x_2) - \sqrt{\Delta}}.$$

Для $\gamma = 0$ с заданными начальными условиями (3.9) имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} m(t, q(t, x_2)) &= -2u_x m^2(t, p(t, x_2)) \qquad (3.15) \\
&\geq -2u_{0x}(x_2) m^2(t, q(t, x_2)) > 0.
\end{aligned}$$

Проинтегрируем неравенство (3.15) по $[0, t]$, получим

$$m(t, q(t, x_2)) \geq \frac{m_0(x_2)}{1 + 2u_{0x}(x_2)m_0(x_2)t},$$

тогда, имеем

$$m(t, q(t, x_2)) \to +\infty, \quad \text{при} \quad t \to \frac{1}{-2u_{0x}(x_2)m_0(x_2)}.$$

Следовательно, получаем, что

$$u_x m(t, q(t, x_2)) \to -\infty, \quad \text{при} \quad t \to \frac{1}{-2u_{0x}(x_2)m_0(x_2)}.$$

Таким образом, теорема полностью доказана. □

Abstract. In this paper, we investigate the blow-up phenomena for the Novikov equation and the FORQ equation with high-order nonlinear term $\gamma u^p u_x$. It is the special structure of these two equations that we can apply to establish sufficient conditions on the initial data to guarantee blow-up phenomena in finite time.

Список литературы

[1] B. Fuchssteiner, A. S. Fokas "Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries", Phys. D, **4** (1), 47 – 66 (1981/82).

[2] R. Camassa, D. D. Holm, "An integrable shallow water equation with peaked solitons", Phys. Rev. Lett., **71** (11), 1661 – 1664 (1993).

[3] Y. Zhou, H. Chen, "Wave breaking and propagation speed for the Camassa-Holm equation with $\kappa \neq 0$", Nonlinear Anal. Real World Appl., **12** (3), 1875 – 1882 (2011).

[4] A. Constantin, W. A. Strauss, "Stability of the Camassa-Holm solitons", J. Nonlinear Sci., **12** (4), 415 – 422 (2002).

[5] A. Constantin, J. Escher, "Well-posedness, global existence, and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation", Comm. Pure Appl. Math., **51** (5), 475 – 504 (1998).

[6] Yi A. Li, P. J. Olver, "Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation", J. Differential Equations, **162** (1), 27 – 63 (2000).

[7] R. Camassa, D. D Holm, J. M. Hyman, "A new integrable shallow water equation", Advances in Applied Mechanics, **31**, 1 – 33 (1994).

[8] A. Constantin, W. A. Strauss, "Stability of peakons", Comm. Pure Appl. Math., **53** (5), 603 – 610 (2000).

[9] H. P. McKean, "Breakdown of a shallow water equation", Asian J. Math., **2** (4), 867 – 874 (1998).

[10] Z. Jiang, L. Ni, Y. Zhou, "Wave breaking of the Camassa-Holm equation", J. Nonlinear Sci., **22**(2), 235 – 245 (2012).

[11] Z. Guo, "Blow up, global existence, and infinite propagation speed for the weakly dissipative Camassa-Holm equation", J. Math. Phys., **49** (3), 033516 (2008).

[12] A. N. W. Hone, J. Wang, "Integrable peakon equations with cubic nonlinearity", J. Phys. A, **41** (37), 372002 (2008).

[13] A. Himonas, C. Holliman, "The Cauchy problem for the Novikov equation", Nonlinearity, **25** (2), 449 – 479 (2012).

[14] X. Wu, Z. Yin, "Well-posedness and global existence for the Novikov equation", Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), **11** (3), 707 – 727 (2012).

[15] L. Ni, Y. Zhou, "Well-posedness and persistence properties for the Novikov equation", J. Differential Equations, **250** (7), 3002 – 3021 (2011).

[16] W. Yan, Y. Li, Y. Zhang, "The Cauchy problem for the integrable Novikov equation", J. Differential Equations, **253** (1), 298 – 318 (2012).

[17] A. Himonas, J. Holmes, "Hölder continuity of the solution map for the Novikov equation", J. Math. Phys., **54** (6), 061501 (2013).

[18] S. Lai, "Global weak solutions to the Novikov equation", J. Funct. Anal., **265** (4), 520 – 544 (2013).

[19] S. Zhou, L. Yang, C. Mu, "Global dissipative solutions of the Novikov equation", Commun. Math. Sci., **16** (6), 1615 – 1633 (2018).

[20] Z. Jiang, L. Ni, "Blow-up phenomenon for the integrable Novikov equation", J. Math. Anal. Appl., **385**(1), 551 – 558 (2012).

[21] W. Yan, Y. Li, Y. Zhang, "The Cauchy problem for the Novikov equation", Nonlinear Differential Equations Appl., **20** (3), 1157 – 1169 (2013).

[22] R. M. Chen, F. Guo, Y. Liu, C. Z. Qu, "Analysis on the blow-up of solutions to a class of integrable peakon equations", J. Funct. Anal., **270** (6), 2343 – 2374 (2016).

[23] B. Fuchssteiner, "Some tricks from the symmetry-toolbox for nonlinear equations: generalizations of the Camassa-Holm equation", Phys. D, **95** (3), 229 – 243 (1996).

[24] P. J. Olver, P. Rosenau, "Tri-Hamiltonian duality between solitons and solitary-wave solutions having compact support", Phys. Rev. E, **53**(2), 1900 – 1906 (1996).

[25] Z. J. Qiao, "A new integrable equation with cuspons and W/M-shape-peaks solitons", J. Math. Phys., **47** (11), 112701 (2006).

[26] A. A. Himonas, D. Mantzavinos, "The Cauchy problem for the Fokas-Olver-Rosenau-Qiao equation", Nonlinear Anal., **95**, 499 – 529 (2014).

[27] J. M. Holmes, F. Tığlay, R. C. Thompson, "Continuity of the data-to-solution map for the FORQ equation in Besov spaces", Differential Integral Equations, no. 5-6: 295 – 314 (2021).

[28] A. Himonas, D. Mantzavinos, "Hölder continuity for the Fokas-Olver-Rosenau-Qiao equation", J. Nonlinear Sci., **24**(6), 1105 – 1124 (2014).

[29] A. A. Himonas, C. Holliman, "Non-uniqueness for the Fokas-Olver-Rosenau-Qiao equation", J. Math. Anal. Appl., **470** (1), 647 – 658 (2019).

[30] Q. Zhang, "Global well posedness of cubic Camassa-Holm equations", Nonlinear Anal., **133**, 61 – 73 (2016).

[31] Y. Liu, P. Olver, C. Qu, S. Zhang, "On the blow-up of solutions to the integrable modified Camassa-Holm equation", Anal. Appl., **12** (4), 355 – 368 (2014).

[32] R. M. Chen, Y. Liu, C. Qu, S. Zhang, "Oscillation-induced blow-up to the modified Camassa-Holm equation with linear dispersion", Adv. Math., **272**, 225 – 251 (2015).

Поступила 23 февраля 2025

После доработки 27 мая 2025

Принята к публикации 02 июня 2025

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 61, номер 2, 2026

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 61, No. 2, 2026

Contents