Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 2, 2026, стр. 3 – 16.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ L^p

С. АГЕКЯН

Институт математики Национальной академии наук Республики Армения
Ереванский государственный университет
E-mail: *smbat.aghekyan@gmail.com*

Аннотация. В работе исследуется краевая задача Римана–Гильберта в верхней полуплоскости в весовом пространстве $L^p(\rho)$, где $1 < p < \infty$, а вес ρ имеет бесконечно много нулей. Получены необходимые и достаточные условия нормальной разрешимости и нетеровости соответствующего оператора, что расширяет классическую теорию конечного индекса на случай весов с бесконечным числом нулей. Выведены явные формулы решений как для однородной, так и для неоднородной задач, с особым вниманием к случаю отрицательного индекса.

MSC2020 numbers: 41A05; 41A63; 14H50.

Ключевые слова: задача Римана–Гильберта; каноническая факторизация; весовые пространства L^p; формула Сохоцкого–Племеля; бесконечный индекс.

1. Введение

В настоящей работе изучается краевая задача Римана–Гильберта в верхней и нижней полуплоскостях $\Pi^{\pm}$ для функций полиномиального роста в весовых пространствах $L^p(\rho)$ при $1 < p < \infty$, где вес

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x - x_k}{x + i} \right|^{\alpha_k}, \qquad 0 < \alpha_k < 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty,$$

имеет бесконечно много нулей на вещественной оси. Такие веса естественным образом возникают в задачах с предписанной структурой особенностей и приводят к тонким вопросам, связанным с нормальной разрешимостью и структурой решений однородной задачи.

В качестве отправной точки рассматривается граничное условие на действительную часть

$$\lim_{y \to +0} \left\| \operatorname{Re}\{a(x)\Phi(x+iy)\} - f(x) \right\|_{L^p(\rho)} = 0, \tag{1.1}$$

где $a \in C^{\delta}(\mathbb{R})$, $a(x) \neq 0$, а Φ аналитична в $\Pi^{+} \cup \Pi^{-}$. Следуя классической редукции Мусхелишвили [1], мы используем симметрию $\Phi_*(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}$ для преобразования (1.1) в задачу Римана с коэффициентом скачка

$$\widetilde{a}(x) = -\frac{\overline{a(x)}}{a(x)} = \frac{S^{+}(x)}{S^{-}(x)}.$$

Здесь $\mu := \operatorname{ind} a(x)$ обозначает индекс функции a, и

$$\kappa := \operatorname{ind} \widetilde{a} = -2\mu \in \mathbb{Z}.$$

Соответствующая факторизация, а также канонические функции $S^{\pm}$, будут введены в разделе 5. Это позволяет нам использовать и адаптировать метод факторизации и весовые оценки, развитые в наших предыдущих работах по задаче Римана в $L^p(\rho)$ с бесконечно многими нулями [2] – [5], см. также [6, 7] для родственных весовых задач.

Основные результаты. Пусть $T_p := \{x_k : \alpha_k > (p-1)/p\}$ обозначает множество «сильных» нулей веса ρ.

- *Однородная задача.* Мы показываем, что подпространство *самосопряжённых* решений однородной задачи (то есть класс решений, существенный для (1.1)) нетривиально тогда и только тогда, когда $\mu = 0$; в этом случае

$$\Phi_0(z) = S(z) \sum_{x_k \in T_p} \frac{A_k}{x_k - z}, \qquad A_k \in \mathbb{R},$$

  тогда как при $T_p = \varnothing$ обязательно $\Phi \equiv 0$. Это уточняет описание, полученное для задачи Римана, за счёт выделения симметричного подпространства, диктуемого постановкой задачи Римана–Гильберта.

- *Неоднородная задача.* При $\kappa = -2\mu \geq 0$ ($\mu \leq 0$) мы строим частные решения с помощью локализованных интегралов типа Коши, адаптированных к нулям $\{x_k\}$. Более точно, если

$$\Phi_1(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{S(z)}{2\pi i\,(x_k - z)} \int_{X_k} \frac{\widetilde{f}(t)\,(x_k - t)}{S^{+}(t)(t - z)}\,dt, \qquad \widetilde{f} = \frac{2f}{a},$$

  то всякое решение задачи Римана–Гильберта представимо в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \tfrac{1}{2}\big(\Phi_1(z) + \Phi_1^*(z)\big),$$

  где Φ_0 есть самосопряжённое решение однородной задачи, описанное выше, а $\Phi_1^*(z) := \overline{\Phi_1(\overline{z})}$. При $\kappa < 0$ ($\mu > 0$) задача Римана–Гильберта разрешима тогда и только тогда, когда выполнено конечное число моментных условий; в этом случае самосопряжённое решение единственно и также выражается через тот же ряд интегралов типа Коши (в отличие от собственно задачи Римана, здесь не требуется система Вандермонда).

Метод. Исследование основано на канонической факторизации, формуле Сохоцкого–Племеля и весовых оценках в $L^p(\rho)$, включая разложение по интервалам X_k, определяемым нулями ρ. При естественных условиях разделённости и суммируемости, наложенных на последовательность $\{x_k\}$ (см. (2.2)-(2.3)), эти средства обеспечивают необходимые оценки и предельные соотношения, требуемые для нормальной разрешимости и явного построения решений.

Структура работы. В разделе 2 напоминаются определения весового пространства $L^p(\rho)$ и основные предположения о последовательности $\{x_k\}$. В разделе 3 формулируется задача Римана–Гильберта. В разделе 4 описываются свойства симметрии функции $\Phi^*(z)$, используемые в дальнейшем. В разделе 5 задача Римана–Гильберта переписывается в форме, удобной для применения результатов теории задач Римана. В разделе 6 представлены основные результаты для однородного и неоднородного случаев, вместе с явными формулами решений. Наконец, в разделе 7 содержатся заключительные замечания.

2. Весовое пространство $L^p(\rho)$

Пусть $1 < p < \infty$ и пусть $\rho : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ – весовая функция вида

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x - x_k}{x + i} \right|^{\alpha_k}, \qquad 0 < \alpha_k < 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty, \tag{2.1}$$

где $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ – последовательность попарно различных вещественных чисел, а α_k – фиксированные положительные показатели. Произведение в (2.1) сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R} \setminus \{x_k\}$ и удовлетворяет условию $\rho(x) > 0$ для всех $x \neq x_k$.

Определение 2.1. *Весовым пространством Лебега* $L^p(\rho)$ называется множество измеримых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\|f\|^p_{L^p(\rho)} := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, \rho(x) \, dx < \infty.$$

Точки x_k будем называть *нулями* веса ρ и различать два множества:

$$T_p := \{x_k \ : \ \alpha_k > (p-1)/p\}, \qquad T'_p := \{x_k \ : \ \alpha_k \le (p-1)/p\}.$$

Множество T_p состоит из «сильных» нулей веса ρ, которые накладывают дополнительные условия на граничные значения аналитических функций в $L^p(\rho)$ (см. [2, 5]).

Вес ρ в (2.1) имеет бесконечно много нулей, что приводит к нетривиальной структуре пространства $L^p(\rho)$. В частности:

- При стандартных предположениях, обеспечивающих ограниченность сингулярного интеграла Коши (см., например, [8, 9, 10, 7, 2]), преобразование Коши
$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt$$
переводит $L^p(\rho)$ в класс аналитических функций в $\Pi^{\pm}$, имеющих нетангенциальные граничные пределы в $L^p(\rho)$.

На протяжении всей работы мы также будем предполагать выполнение двух стандартных условий разделённости и суммируемости для $\{x_k\}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \ln|x_0 - x_k| > -\infty, \tag{2.2}$$

$$|x_k - x_j| > c\,|x_k - x_0|, \qquad j \neq k, \tag{2.3}$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ фиксировано, а $c > 0$ не зависит от j, k. Условия (2.2)-(2.3), введённые и исследованные в [2], обеспечивают сходимость локальных разложений в окрестности точек x_k и равномерную ограниченность соответствующих операторов сингулярного интегрирования в $L^p(\rho)$.

3. Задача Римана–Гильберта

В этом разделе мы изучаем краевую задачу Римана–Гильберта в полуплоскости в весовом пространстве $L^p(\rho)$, $1 < p < \infty$. Начнём с её точной формулировки.

Определение 3.1. Пусть $\Pi^{\pm}$ обозначают верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной плоскости. Через A обозначим класс функций Φ, аналитических в $\Pi^{+} \cup \Pi^{-}$ и удовлетворяющих условию полиномиального роста

$$|\Phi(z)| \leq C|z|^{n_0}, \qquad |\Im z| \geq y_0 > 0,$$

для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$, любого фиксированного $y_0 > 0$ и константы $C = C(y_0) > 0$.

3.1. **Задача** RH_p**.** Пусть $f \in L^p(\rho)$, $1 < p < \infty$. Требуется найти функцию $\Phi(z) \in A$, удовлетворяющую граничному условию

$$\lim_{y\to+0} \left\| \operatorname{Re}\{a(x)\Phi(x+iy)\} - f(x) \right\|_{L^p(\rho)} = 0, \tag{3.1}$$

где $\rho(x)$ задана формулой (2.1), а $a(x) \neq 0$ есть функция из $C^{\delta}(\mathbb{R})$ для некоторого $\delta > 0$.

3.2. **Задача R_p.** Соответствующая *задача Римана* в $L^p(\rho)$ исследовалась в [2] и имеет следующую формулировку.

Задача R_p. Пусть $f \in L^p(\rho)$, $1 < p < \infty$. Найти функцию $\Phi \in A$, удовлетворяющую

$$\lim_{y\to+0} \left\| \Phi^+(x+iy) - a(x)\,\Phi^-(x-iy) - f(x) \right\|_{L^p(\rho)} = 0, \tag{3.2}$$

где $\Phi^\pm$ обозначают нетангенциальные граничные значения функции Φ из $\Pi^\pm$. Здесь $\rho(x)$ задана формулой (2.1), а $a(x) \neq 0$ принадлежит $C^\delta(\mathbb{R})$ при некотором $\delta > 0$.

4. Функция $\Phi^*(z)$ и свойства симметрии

Пусть $\Phi(z)$ определена при $z \in \Pi^+$. Следуя [1], определим её *сопряжённое отражение* формулой

$$\Phi_*(z) := \overline{\Phi(\overline{z})}, \qquad z \in \Pi^-. \tag{4.1}$$

Таким образом, Φ_* определена в Π^- и является зеркальным отражением функции Φ относительно вещественной оси. Формулу (4.1) можно эквивалентно записать в виде

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi}(z),$$

где черта обозначает комплексное сопряжение значений функции.

4.1. **Основные свойства.** Напомним несколько стандартных фактов о голоморфных и мероморфных функциях, адаптированных из работы Мусхелишвили [1].

(1) Если $\Phi(z)$ голоморфна (соответственно, мероморфна) в Π^+, то функция $\Phi_*(z)$, определённая формулой (4.1), голоморфна (соответственно, мероморфна) в Π^-.

   Более того, если

   $$\Phi(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n},$$

   то $\Phi_*(z)$ получается заменой всех коэффициентов на их комплексно–сопряжённые.

(2) Пусть $\Phi^+(x) := \lim_{\substack{z\to x \\ z\in\Pi^+}} \Phi(z)$ для $x \in \mathbb{R}$. Тогда граничные значения Φ_* из Π^- удовлетворяют соотношению

   $$\Phi_*^-(x) = \overline{\Phi^+(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   Это следует из того, что при $z \to x$ из Π^- имеем $\overline{z} \to x$ из Π^+.

Следовательно, если функция $\Phi(z)$ определена как

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi(z), & z\in\Pi^+,\\ \Phi_*(z), & z\in\Pi^-,\end{cases}$$

где Φ и Φ_* аналитичны в соответствующих полуплоскостях, то

$$\Phi^-(t)=\overline{\Phi^+(t)},\qquad \Phi^+(t)=\overline{\Phi^-(t)},\quad t\in\mathbb{R}. \tag{4.2}$$

(3) Если $\Psi(z)$ есть интеграл типа Коши

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt,$$

то

$$\Psi_*(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\varphi(t)}}{t-z}\,dt,$$

где Ψ_* задаётся формулой (4.1).

5. Переписывание задачи Римана–Гильберта

Напомним, что

$$\operatorname{Re}\{a(x)\Phi(x+iy)\}=\tfrac{1}{2}\big(a(x)\Phi(x+iy)+\overline{a(x)\Phi(x+iy)}\big).$$

Следовательно, граничное условие (3.1) можно записать в виде

$$\lim_{y\to+0}\Big\|a(x)\Phi(x+iy)+\overline{a(x)\Phi(x+iy)}-2f(x)\Big\|_{L^p(\rho)}=0. \tag{5.1}$$

Из (4.1) и (4.2) следует, что граничные значения Φ на $\mathbb{R}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases}\Phi^+(x)=\Phi(x), & x\in\mathbb{R},\\ \Phi^-(x)=\overline{\Phi}(x), & x\in\mathbb{R},\end{cases} \tag{5.2}$$

где Φ^+ и Φ^- обозначают нетангенциальные граничные значения из Π^+ и Π^- соответственно.

Подставляя (5.2) в (5.1), получаем эквивалентную форму

$$\lim_{y\to+0}\Big\|\Phi^+(x+iy)+\frac{\overline{a(x)}}{a(x)}\,\Phi^-(x-iy)-\frac{2f(x)}{a(x)}\Big\|_{L^p(\rho)}=0. \tag{5.3}$$

Таким образом, задача Римана–Гильберта (3.1) сводится к задаче Римана типа (3.2) с коэффициентом и свободным членом

$$\widetilde{a}(x)=-\frac{\overline{a(x)}}{a(x)},\qquad \widetilde{f}(x)=\frac{2f(x)}{a(x)}.$$

Пусть $\mu=\operatorname{ind}a(x)$. Тогда, поскольку

$$\kappa=\operatorname{ind}\widetilde{a}=-2\mu,\qquad x\in\mathbb{R},$$

введём

$$a_1(x)=\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{-2\mu}\widetilde{a}(x),$$

и определим

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln a_1(t)}{t-z}\,dt.$$

Тогда канонические множители имеют вид

$$S^+(z) = \exp\{\Gamma(z)\}, \quad z \in \Pi^+,$$

$$S^-(z) = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{-2\mu} \exp\{\Gamma(z)\}, \quad z \in \Pi^-,$$

и удовлетворяют факторизации [1]

$$\widetilde{a}(x) = \frac{S^+(x)}{S^-(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, поскольку $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(z)$ для $z \in \Pi^+ \cup \Pi^-$, каноническая функция $S(z)$ удовлетворяет соотношению симметрии

$$\overline{S(z)} = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-2\mu} S(z).$$

6. Основные результаты

Обозначим

$$T_p = \left\{x_k : \alpha_k > \tfrac{p-1}{p}\right\}.$$

Теорема 6.1 (Однородная задача RH_p)**.** *Пусть $T_p \neq \emptyset$. Если $\mu = 0$, то общее решение однородной задачи RH_p ($f \equiv 0$) представимо в виде*

$$\Phi_0(z) = S(z) \sum_{x_k \in T_p} \frac{A_k}{x_k - z},$$

где $A_k \in \mathbb{R}$. В противном случае однородная задача RH_p не имеет нетривиальных решений.

Замечание 6.1. Если $T_p = \emptyset$, то $\Phi \equiv 0$ при всех μ.

Доказательство теоремы 6.1. Мы приведём полное доказательство, учитывающее локальное препятствие в нулях веса ρ, глобальную форму мероморфного продолжения и условие самосопряжённости.

Редукция и мероморфное продолжение. Согласно разделу 5, однородная задача RH_p ($f \equiv 0$) сводится к однородной задаче Римана с коэффициентом скачка $\widetilde{a}(x) = -\overline{a(x)}/a(x)$. Пусть $S^{\pm}$ – канонические множители, соответствующие $\widetilde{a}$, и положим

$$S(z) = \begin{cases} S^+(z), & z \in \Pi^+, \\ S^-(z), & z \in \Pi^-. \end{cases}$$

Определим $\phi(z) := \Phi(z)/S(z)$. На $\mathbb{R}$ соотношение $S^+(x) = \widetilde{a}(x)S^-(x)$ даёт $\phi^+(x) = \phi^-(x)$ почти всюду, поэтому ϕ продолжается мероморфно через $\mathbb{R}$ в функцию на $\mathbb{C}$.

Локальное препятствие в точках x_k и множество T_p. Пусть x_k – нуль веса ρ. В окрестности x_k можно записать

$$\rho(x) \asymp |x - x_k|^{\alpha_k} \rho_k(x),$$

где ρ_k гладка и строго положительна, а $\alpha_k > 0$. Предположим, что ϕ имеет простой полюс в точке x_k. Тогда главная часть Φ вблизи x_k содержит ненулевую кратную функции

$$r_k(z) := \frac{S(z)}{x_k - z}.$$

Для $y > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ запишем

$$\begin{aligned} r_k(x+iy) - \widetilde{a}(x)\, r_k(x-iy) &= \frac{(x_k - x)\big[S^+(x+iy) - \widetilde{a}(x)S^-(x-iy)\big]}{(x_k-x)^2 + y^2} \\ &\quad + \frac{i\,y\big[S^+(x+iy) + \widetilde{a}(x)S^-(x-iy)\big]}{(x_k-x)^2+y^2} \\ &=: R_1(x,y) + R_2(x,y). \end{aligned}$$

(i) Оценка R_1. Стандартные весовые оценки для канонических множителей в $L^p(\rho)$ (см. [2]) дают $\|R_1(\cdot, y)\|_{L^p(\rho)} \le C$ для всех достаточно малых $y > 0$.

(ii) Нижняя оценка для R_2. Зафиксируем малое $\delta > 0$. Из непрерывности функции $S^+(x+iy) + \widetilde{a}(x)S^-(x-iy)$ и компактности следует существование такой константы $c_1 > 0$ (не зависящей от y), что

$$\big|S^+(x+iy) + \widetilde{a}(x)S^-(x-iy)\big| \ge c_1 \quad \text{при } 0 < y \le y_0,\ |x - x_k| < \delta.$$

Используя также неравенство $\rho(x) \ge c_0\,|x - x_k|^{\alpha_k}$ при $|x - x_k| < \delta$, получаем

$$\|R_2(\cdot,y)\|^p_{L^p(\rho)} \ \gtrsim\ \int_{|x-x_k|<\delta} \frac{y^p\,|x-x_k|^{\alpha_k}}{\big((x-x_k)^2+y^2\big)^p}\,dx.$$

После замены $x - x_k = yt$ это выражение принимает вид

$$= y^{\,\alpha_k - p + 1} \int_{|t|<\delta/y} \frac{|t|^{\alpha_k}}{(t^2+1)^p}\,dt.$$

Поскольку интеграл по t ограничен снизу положительной константой (достаточно ограничиться областью $1 \le |t| \le 2$), получаем

$$\|R_2(\cdot,y)\|_{L^p(\rho)} \ \gtrsim\ y^{\,(\alpha_k - p + 1)/p}.$$

(iii) Асимптотическое поведение при $1 < p < \infty$. Если $\alpha_k \le \frac{p-1}{p}$, то

$$\alpha_k - p + 1 < (p-1) - p + 1 = 0.$$

Следовательно,

$$\|R_2(\cdot,y)\|_{L^p(\rho)} \ \gtrsim \ y^{(\alpha_k-p+1)/p}$$

не стремится к нулю при $y\downarrow 0$ и, более того, расходится, когда $\alpha_k \le \frac{p-1}{p}$. Поэтому для любого $1<p<\infty$ никакая ненулевая кратная функции r_k не может удовлетворять однородному условию скачка, если $\alpha_k \le \frac{p-1}{p}$.

Объединяя пункты (i)-(iii), заключаем, что

$$\|R_1(\cdot,y)+R_2(\cdot,y)\|_{L^p(\rho)} \not\to 0 \quad \text{при } y\downarrow 0$$

всякий раз, когда $\alpha_k \le \frac{p-1}{p}$. Следовательно, главная часть r_k не может удовлетворять однородному скачку ни в одной точке x_k с $\alpha_k \le \frac{p-1}{p}$. Эквивалентно,

$$\phi \text{ голоморфна в каждой точке } x_k \notin T_p, \text{ где } T_p := \{x_k : \alpha_k > (p-1)/p\}.$$

Поскольку $\sum_k \alpha_k < \infty$, лишь конечное число показателей α_k превосходит $(p-1)/p$, то множество T_p конечно. Поэтому любые особенности функции ϕ на $\mathbb{R}$ могут быть лишь (не более чем простыми) полюсами в точках множества T_p.

Глобальная форма и исключение полиномиальной части. Поскольку $\Phi\in A$ и S имеет не более чем полиномиальный рост, функция ϕ также имеет полиномиальный рост на бесконечности. Следовательно,

$$\phi(z) = P(z) + \sum_{x_k\in T_p} \frac{A_k}{x_k-z},$$

где P – многочлен, а сумма конечна. Поэтому

$$\Phi(z) = S(z)P(z) \ + \ S(z)\sum_{x_k\in T_p} \frac{A_k}{x_k-z}.$$

Если $T_p=\varnothing$, то $\Phi = S\,P$. Из аргумента единственности для самосопряжённой однородной задачи из работы [2] следует, что этот полиномиальный множитель должен обращаться в нуль; значит, $P\equiv 0$. Следовательно, в общем случае

$$\Phi_0(z) = S(z)\sum_{x_k\in T_p} \frac{A_k}{x_k-z}.$$

Самосопряжённость и индекс μ. В постановке RH_p граничные значения удовлетворяют условию $\Phi^-(x)=\overline{\Phi^+(x)}$ на $\mathbb{R}$. Используя каноническую симметрию (раздел 5), $\overline{S^+(x)} = ((x-i)/(x+i))^{-2\mu}S^-(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$, получаем

$$S^-(x)\sum_{x_k\in T_p}\frac{A_k}{x_k-x} \ = \ \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-2\mu} S^-(x)\sum_{x_k\in T_p}\frac{\overline{A_k}}{x_k-x}.$$

Так как $(x_k-x)^{-1}\in\mathbb{R}$ при $x\neq x_k$ и $S^-(x)\neq 0$ почти всюду, заключаем, что

$$\sum_{x_k\in T_p}\frac{A_k}{x_k-x} \ = \ \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-2\mu}\sum_{x_k\in T_p}\frac{\overline{A_k}}{x_k-x} \quad \text{почти всюду на } \mathbb{R}.$$

Если $\mu \neq 0$, то унимодулярный множитель непостоянен, и это вынуждает все A_k быть нулевыми, а значит $\Phi \equiv 0$. Если $\mu = 0$, множитель равен 1, и потому $A_k = \overline{A_k}$, то есть $A_k \in \mathbb{R}$.

Заключение. Для $1 < p < \infty$ однородные самосопряжённые решения имеют в точности вид

$$\Phi_0(z) = S(z) \sum_{x_k \in T_p} \frac{A_k}{x_k - z}, \qquad A_k \in \mathbb{R}.$$

При $\mu \neq 0$ существует только тривиальное решение. □

Сравнение с ранее известными результатами. Проведённый анализ показывает, что для всех $1 < p < \infty$ однородная задача Римана–Гильберта допускает лишь конечное число линейно независимых самосопряжённых решений, соответствующих конечному множеству $T_p = \{x_k : \alpha_k > (p-1)/p\}$. Напротив, в случае $p = 1$, исследованном Г. М. Айрапетяном [5], однородная задача имеет бесконечно много решений. При $p \downarrow 1$ порог $(p-1)/p$ убывает к нулю, и число допустимых полюсов стремится к бесконечности, что приводит к поведению, характерному для случая $p = 1$.

Основные предположения. На протяжении всей теории неоднородной задачи мы предполагаем, что нули $\{x_k\}$ веса ρ образуют дискретную последовательность, которая может иметь точку накопления только в некоторой конечной точке x_0, и что выполнены условия (2.2)-(2.3). Эти предположения будут использоваться в Теоремах 6.2 и 6.3.

Теорема 6.2 (Неоднородная задача RH_p; $\kappa \geq 0$)**.** *Пусть $f \in L^p(\rho)$, $T_p \neq \emptyset$, и последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям* (2.2)-(2.3)*. Предположим, что*

$$\kappa = \operatorname{ind} \widetilde{a} = -2\mu \geq 0 \qquad (\textit{эквивалентно, } \mu \leq 0).$$

Тогда всякое решение неоднородной задачи RH_p можно записать в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \tfrac{1}{2}\big[\Phi_1(z) + \Phi_1^*(z)\big],$$

где Φ_0 – общее самосопряжённое решение соответствующей однородной задачи (Теорема 6.1), $\Phi_1^*(z) := \overline{\Phi_1(\bar{z})}$, и

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(z), \tag{6.1}$$

где

$$\Phi_k(z) = \frac{S(z)}{2\pi i\,(x_k - z)} \int_{X_k} \frac{\widetilde{f}(t)\,(x_k - t)}{S^+(t)(t - z)}\,dt, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.2}$$

а X_k – положительно ориентированный малый контур, охватывающий x_k и не содержащий других точек x_j.

Теорема 6.3 (Неоднородная задача RH_p; $\kappa < 0$)**.** *Пусть $f \in L^p(\rho)$, $T_p \neq \emptyset$, и последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям* (2.2)-(2.3)*. Если $\kappa = \operatorname{ind} \widetilde{a} < 0$, то неоднородная задача Римана–Гильберта RH_p разрешима тогда и только тогда, когда выполнены* моментные условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{f}(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^j} = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, -\kappa, \tag{6.3}$$

где $S^{\pm}$ – канонические множители, соответствующие функции $\widetilde{a}(x) = -\overline{a(x)}/a(x)$, введённые в разделе 5.

Если эти условия выполнены, то решение единственно и имеет вид

$$\Phi(z) \;=\; \Phi_1(z), \qquad \Phi_1(z) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(z),$$

где

$$\Phi_k(z) \;=\; \frac{S(z)}{2\pi i\,(x_k - z)} \int_{X_k} \frac{\widetilde{f}(t)\,(x_k - t)}{S^+(t)(t-z)}\, dt, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

а X_k – положительно ориентированный малый контур, охватывающий x_k и не содержащий других точек x_j.

Замечание 6.2. Операция со звёздочкой $\Phi^*(z) := \overline{\Phi(\overline{z})}$ играет здесь принципиальную роль: она сохраняет аналитичность в Π^-, обеспечивая самосопряжённость решений. Именно поэтому общее решение в Теореме 6.2 записывается в виде $\frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_1^*)$.

Схема доказательства Теоремы 6.2. Первым шагом является сведение исходной задачи RH_p к стандартной задаче Римана с коэффициентом $\widetilde{a}(x) = -\overline{a(x)}/a(x)$ и свободным членом $\widetilde{f} = 2f/a$, как описано в разделе 5.

Второй шаг, а именно решение этой задачи Римана с помощью канонической факторизации и интегралов типа Коши в $L^p(\rho)$, уже был установлен в [2]. В частности, при предположениях (2.2)-(2.3), представление (6.2)-(6.1) частного решения Φ_1 дословно следует из [2]. Добавляя общее самосопряжённое решение Φ_0 однородной задачи (Теорема 6.1), получаем требуемую форму. □

Схема доказательства Теоремы 6.3. Здесь снова первым шагом является редукция к задаче Римана с коэффициентом $-\overline{a}/a$, выполненная в разделе 5.

На втором шаге, когда $\kappa = -2\mu < 0$, разрешимость и единственность неоднородной задачи Римана были исследованы в [2]. Там было показано, что задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнены моментные условия (6.3), обеспечивающие устранимость особенности на бесконечности. В этом случае решение единственно и задаётся формулами (6.1)-(6.2), тогда как единственность следует из того, что однородная задача имеет только тривиальное решение (Теорема 6.1). □

Следствие 6.1 (Задача Дирихле как частный случай)**.** *Если $a(x) \equiv 1$, то $\kappa = \operatorname{ind} \frac{\overline{a}}{a} = 0$, следовательно, $\mu = 0$ и канонические множители удовлетворяют $S^{\pm} \equiv 1$. В этом случае RH_p сводится к задаче Дирихле для аналитических функций в верхней полуплоскости с весом ρ:*

$$\lim_{y \to +0} \big\| \operatorname{Re} \Phi(x+iy) - f(x) \big\|_{L^p(\rho)} = 0.$$

Частное решение можно представить в виде ряда

$$\Phi_D(z) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{kD}(z), \tag{6.4}$$

где

$$\Phi_{kD}(z) \;=\; \frac{1}{\pi i\,(x_k - z)} \int_{X_k} \frac{f(t)\,(x_k - t)}{t - z}\, dt, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.5}$$

а X_k – положительно ориентированный малый контур, охватывающий x_k.

Если $T_p = \emptyset$, то это решение единственно с точностью до добавочной мнимой константы. Если $T_p \neq \emptyset$, то полное семейство решений получается добавлением однородной части из Теоремы 6.1:

$$\Phi(z) = \Phi_D(z) \;+ \sum_{x_k \in T_p} \frac{A_k}{x_k - z}, \qquad A_k \in \mathbb{R}.$$

7. Заключение

В настоящей работе исследована краевая задача Римана–Гильберта в весовом пространстве $L^p(\rho)$, где вес ρ имеет бесконечно много нулей, а коэффициент $a(x)$ является не обращающейся в нуль гёльдеровской функцией. Путём сведения задачи к стандартной задаче Римана в верхней полуплоскости получены необходимые и достаточные условия разрешимости, а также явные представления решений.

Для однородного случая показано, что нетривиальные самосопряжённые решения существуют только при $\mu = 0$, и в этом случае общее решение задаётся мероморфной суммой по множеству особенностей T_p с вещественными вычетами. Если $T_p = \varnothing$, единственное решение тривиально.

Для неоднородного случая, при выполнении условий разделённости и суммируемости (2.2)-(2.3) на множестве нулей веса ρ, получены явные представления частных решений в терминах интегралов типа Коши и описано их сочетание с однородным решением. Когда $\kappa = -2\mu < 0$, разрешимость дополнительно требует выполнения ортогональных условий моментного типа, что согласуется с классической теорией задач Римана.

Эти результаты расширяют более ранние исследования задач Римана с конечным индексом на случай весов с бесконечным индексом, и используемый подход может быть адаптирован к родственным краевым задачам для аналитических функций в более общих областях.

Все результаты сформулированы для $1 < p < \infty$, что обеспечивает необходимые весовые интегральные оценки и свойства канонических множителей.

Abstract. We study a Riemann–Hilbert boundary value problem in the upper half-plane within the weighted space $L^p(\rho)$, where $1 < p < \infty$ and the weight ρ admits infinitely many zeros. Necessary and sufficient conditions are obtained for normal solvability and for the associated operator to be Noetherian, extending the classical finite-index theory to weights with infinitely many zeros. Explicit solution formulas are derived for both homogeneous and inhomogeneous problems, with special attention to the case of negative index.

Список литературы

[1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., Наука (1968).
[2] S. A. Aghekyan, “On a Riemann boundary value problem in the space of p-summable functions with infinite index”, J. Contemp. Math. Anal., **57**, 3 – 11 (2022).
[3] H. M. Hayrapetyan and S. A. Aghekyan, “On a Riemann boundary value problem for weighted spaces in the half-plane”, Armenian Journal of Mathematics, **11**, no. 7, 1 – 14 (2019).
[4] H. M. Hayrapetyan, S. A. Aghekyan, and A. D. Ohanyan, “On a Riemann Boundary Value Problem with Infinite Index in the Half-plane”, Springer Proc. Math. Stat., **1**, 221– 241 (2021).
[5] H. M. Hayrapetyan, “On a boundary value problem with infinite index”, Springer Proc. Math. Stat., **291**, 388 – 398 (2018).
[6] B. V. Khvedelidze, “The method of Cauchy type integrals in discontinuous boundary value problems of the theory of holomorphic functions of a single complex variable [in Russian], Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. VINITI, **7**, 5 – 162 (1975).
[7] K. S. Kazaryan, F. Soria, I. M. Spitkovskiĭ, “The Riemann boundary problem in spaces with a weight that admits singularities”, Dokl. Math. **55**, 717 – 719 (1997).
[8] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., Физматгиз (1977).
[9] И. Б. Симоненко, “Краевая задача Римана для пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах с весами”, Изв. АН СССР. Сер. мат. **28**, 277 – 306 (1964).
[10] И. Б. Симоненко, “Краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами”, Докл. АН СССР, **163**, no. 4, 746 –749 (1965).
[11] Б. В. Хведелидзе, “О римановo–приваловской разрывной задаче для нескольких функций”, Докл. АН СССР **17**, no. 10, 865 – 872 (1956).

[12] Н. Е. Товмасян и А. Г. Бабаян, "Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в полупространстве в классе функций полиномиального роста", Неклассические уравнения математической физики, Новосибирск, 273 – 282 (2007).
[13] N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific, Singapore (1994).
[14] А. П. Солдатов, "Методы теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай", Матем. сб. **182**, no. 5, 1070 – 1100 (1991).
[15] K. S. Kazaryan, "Summability of generalized Fourier series and Dirichlet's problem in $L^p(d\mu)$ and weighted H^p spaces $(p > 1)$", Anal. Math. **13**, 173 – 197 (1987).
[16] Г. М. Айрапетян, В. А. Бабаян, "О задаче Дирихле в пространстве непрерывных функций с весом", Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика, **112**, no. 17, 5 – 16 (2001).
[17] Г. М. Айрапетян и П. Э. Меликсетян, "Задача Гильберта в полуплоскости в пространствах с весом", Изв. НАН Армении. Математика **38**, no. 6, 17 – 32 (2003).
[18] Г. М. Айрапетян и В. Петросян, "Задача Гильберта в полуплоскости в смысле сходимости в L^1", Изв. НАН Армении, Математика **32**, no. 5, 18 – 31 (1997).
[19] H. M. Hayrapetyan and S. A. Aghekyan, "On a Riemann boundary value problem in the half-plane in the class of weighted continuous functions", J. Contemp. Math. Anal., **54**, 79 – 89 (2019).
[20] S. A. Aghekyan, "On a Hilbert problem in the half-plane in the class of continuous functions", Proceedings of the Yerevan State University A: Physical and Mathematical Sciences **50**, no. 2, 9 – 14 (2016).

Поступила 23 августа 2025

После доработки 28 ноября 2025

Принята к публикации 07 декабря 2025