

**КОНТИНУУМ НЕИЗОМОРФНЫХ ГРУПП С ТРЕМЯ  
ОБРАЗУЮЩИМИ ВЕРОЯТНОСТНЫМ ТОЖДЕСТВОМ  $x^n = 1$**

В. С. АТАБЕКЯН, А. А. БАЙРАМЯН, В. Г. МИКАЕЛЯН

Ереванский государственный университет<sup>1</sup>

E-mails: *avarujan@ysu.am*; *artan.bayramyan@ysu.am*; *vmikaelian@ysu.am*

Посвящается 95-летию со дня рождения С. И. Адяна

Аннотация. В данной статье мы строим континуальное семейство неизоморфных групп с тремя образующими, в которых тождество  $x^n = 1$  выполняется с вероятностью 1, при этом не являясь тождеством ни в одной из этих групп. Это решает недавний вопрос о связи между вероятностным и универсальным выполнением групповых тождеств. Наша конструкция использует  $n$ -периодические произведения циклических групп порядка  $n$  и относительно свободных групп с двумя образующими, удовлетворяющих тождествам вида  $[x^{p^n}, y^{p^n}]^n = 1$ . Мы доказываем, что в каждом из этих произведений вероятность выполнения тождества  $x^n = 1$  равна 1, несмотря на то, что это тождество не выполняется во всей группе ни для одной из них.

**MSC2020 numbers:** 20P05; 20F69; 20F50.

**Ключевые слова:** вероятностное тождество; вероятностный закон; группа с  $n$ -кручением;  $n$ -периодическое произведение; асимптотический бернсайдовый закон.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Взаимосвязь между теорией групп и теорией вероятностей стала активно развивающейся областью исследований в современной алгебре. Одним из применений теории вероятностей в теории групп является изучение вероятностных утверждений, которые дают альтернативные характеристики групп. Одним из самых ранних подобных результатов является следующее наблюдение: если вероятность того, что два случайно выбранных элемента конечной (или компактной) группы коммутируют, больше  $\frac{5}{8}$ , то группа абелева (см. [1]). Связанный с этим результат утверждает, что если  $G$  — конечная группа, в которой вероятность того, что два случайно выбранных элемента порождают разрешимую подгруппу, превышает  $\frac{11}{30}$ , то сама группа  $G$  разрешима [2].

---

<sup>1</sup>Работа В. С. Атабекяна и В. Г. Микаеляна поддержана Комитетом по высшему образованию и науке РА, исследовательский проект № 25RG-1A187, работа А. А. Байрамяна поддержана Комитетом по высшему образованию и науке РА, исследовательский проект № 23AA-1A028 и исследовательский проект № 23RL-1A027.

Подобные результаты можно обобщить, введя вероятностные меры на конечно порожденных группах. Естественный подход заключается в том, чтобы зафиксировать систему образующих и рассмотреть последовательность равномерных мер на шарах радиуса  $k$  графа Кэли группы, а затем перейти к пределу при  $k \rightarrow \infty$ . Ниже мы приводим общее определение для конечно порожденных групп, следуя [3].

Пусть  $M = \{\mu_k\}$  — последовательность вероятностных мер на конечно порожденной группе  $G$ , и пусть  $w$  — произвольное слово в свободной группе  $F_m$  ранга  $m$ . Мы определяем вероятность того, что в  $G$  выполняется групповое тождество (закон)  $w = 1$  относительно последовательности мер  $M$ , как число

$$(1.1) \quad \mathbb{P}_M(w = 1 \text{ в } G) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\{(g_1, \dots, g_m) \in G^m : w(g_1, \dots, g_m) = 1\}).$$

Если

$$\mathbb{P}_M(w = 1 \text{ в } G) = 1,$$

то мы говорим, что слово  $w$  является  $M$ -вероятностным групповым тождеством (почти тождеством) для группы  $G$ . Значение вероятности  $\mathbb{P}_M(w = 1 \text{ в } G)$  несет определенную информацию о группе  $G$ . Например, как показано в [4] и [3] соответственно, если  $\mathbb{P}([x, y] = 1 \text{ в } G) > 0$  или  $\mathbb{P}(x^2 = 1 \text{ в } G) > 0$ , то группа является виртуально абелевой (см. также [5]). Подробный обзор результатов по этой теме можно найти в [3].

В [3] сформулирован следующий вопрос (см. Вопрос 13.3): Пусть  $w \in F_m$  — произвольное слово,  $G$  — конечно порожденная группа с системой образующих  $S$ , и  $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \dots, R_n^{(d)}$  — независимые случайные блуждания на  $G$  относительно  $S$ . Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(w(R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \dots, R_n^{(d)}) = 1 \text{ в } G) = 1,$$

следует ли из этого, что  $w = 1$  является тождеством в  $G$ ?

Согласно известной работе С.И. Адяна [6], для всех  $m \geq 2$  и нечетных  $n \geq 665$  симметричное случайное блуждание на свободных бернсайдовых группах  $B(m, n)$  невозвратно. На основании этого результата потенциальный контрпример к поставленной проблеме можно искать среди класса групп, заданных соотношениями вида  $A^n = 1$ .

Этот вопрос рассматривался в [7] и [8], где авторы, используя разные подходы, строят конечно порожденные контрпримеры к поставленной задаче. В частности, в [8] построена группа с тремя образующими, в которой  $x^n = 1$  является вероятностным тождеством для всех достаточно больших нечетных  $n$ , но которая содержит бесконечную циклическую подгруппу. Это означает, что тождество  $x^n = 1$  не выполняется во всей группе.

В данной работе мы усилим этот результат, построив континуальное семейство неизоморфных групп с тремя образующими, каждая из которых обладает тем свойством, что вероятность выполнения тождества  $x^n = 1$  равна 1. В то же время это тождество не выполняется ни в одной из этих групп. В качестве вероятностных мер на  $G$  мы зафиксируем естественную последовательность вероятностных мер на графе Кэли группы  $G$ . Пусть  $B_{G,S}(k)$  обозначает шар радиуса  $k$  в графе Кэли с центром в единичном элементе группы  $G$  относительно некоторого фиксированного симметричного множества образующих  $S$ , и пусть  $M = \mu_k$ , где  $\mu_k$  — равномерное распределение на  $B_{G,S}(k)$ , что означает  $\mu_k(g) = \frac{1}{|B_{G,S}(k)|}$ , если  $g \in B_{G,S}(k)$ , и  $\mu_k(g) = 0$  в противном случае.

Наш подход основан на двух конструкциях, предложенных С.И. Адяном: понятии  $n$ -периодического произведения, развитом в [9], и бесконечной системе независимых групповых тождеств, построенной в [10] и [11, Гл. VII]. Более конкретно, мы рассматриваем систему тождеств вида  $\{[x^{p^n}, y^{p^n}]^n = 1\}$ , где  $n \geq 1003$  — фиксированное нечетное число, а  $p$  пробегает фиксированное множество  $\mathcal{P}$  простых чисел. Пусть  $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$  обозначает свободную группу ранга 2 со свободными образующими  $b_1, b_2$  в многообразии групп, удовлетворяющих всем тождествам  $\{[x^{p^n}, y^{p^n}]^n = 1\}$  для  $p \in \mathcal{P}$ . Согласно результату С.И. Адяна [11], для различных множеств простых чисел  $\mathcal{P}$  группы  $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$  неизоморфны. Далее мы рассматриваем  $n$ -периодическое произведение  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}} = \mathbb{F}(n, \mathcal{P}) *^n Z_n$ , где  $Z_n$  — циклическая группа порядка  $n$  с образующей  $a$ . Очевидно, что  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  является группой с тремя образующими.

Теперь сформулируем наш основной результат:

**Теорема 1.1.** *Для любого достаточно большого фиксированного нечетного числа  $n$  выполняется следующее:*

- (i) *В группе  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}} = \mathbb{F}(n, \mathcal{P}) *^n Z_n$  тождество  $x^n = 1$  является  $M$ -вероятностным тождеством.*
- (ii) *В группе  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  тождество  $x^n = 1$  не выполняется.*
- (iii) *Существует континуальное семейство неизоморфных групп с тремя образующими вида  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}} = \mathbb{F}(n, \mathcal{P}) *^n Z_n$ , соответствующих различным подмножествам  $\mathcal{P}$  простых чисел.*

Группы  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  в Теореме 1.1 дают отрицательный ответ на упомянутый выше вопрос в значительно усиленной форме.

Статья организована следующим образом. В Разделе 2 мы описываем ключевые свойства групп  $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$ , которые составляют основу нашей конструкции. Раздел 3 содержит обзор некоторых соответствующих фактов о  $n$ -периодических

произведениях. В Разделе 4 мы демонстрируем необходимые свойства  $n$ -кручёных групп. В Разделе 5 приводится оценка роста для свободных бернсайдовых групп с тремя образующими, что является важнейшим элементом в доказательстве основной теоремы. В Разделе 6 мы объединяем эти инструменты для доказательства основной теоремы.

Настоящие результаты связаны с работами [12, 13, 14], в которых мы нашли континуум разрешимых нехопфовых (неметанильпотентных) групп с тремя образующими, которые порождают различные многообразия групп. Это широкий класс групп, для которых проблема 16 Хигмана из [15] имеет положительный ответ.

На протяжении всей статьи предполагается, что  $n$  — достаточно большое нечетное число. Для каждого результата мы указываем диапазон  $n$ , при котором он справедлив.

## 2. БЕСКОНЕЧНАЯ НЕЗАВИСИМАЯ СИСТЕМА ГРУППОВЫХ ТОЖДЕСТВ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Проблема конечного базиса, поставленная Б. Нейманом в 1937 году, заключается в том, существуют ли бесконечные независимые системы групповых тождеств, т.е. системы, в которых ни одно соотношение не является следствием остальных. В 1969 году С.И. Адян построил примеры таких систем от двух переменных, тем самым разрешив эту проблему [10]. Этот результат позже был включен в его монографию 1975 года [11], где он показал, что для любого нечетного  $n \geq 1003$  следующее семейство тождеств от двух переменных является независимым:

$$(2.1) \quad \{[x^{pn}, y^{pn}]^n = 1\},$$

где параметр  $p$  пробегает все простые числа (см. [11, Глава VII], Теорема 2.1). Из этого результата следует, что для любого нечетного  $n \geq 1003$  существует континуум различных многообразий  $\mathcal{A}_n(\mathcal{P})$ , соответствующих различным подмножествам  $\mathcal{P}$  множества простых чисел. Следовательно, относительно свободные группы  $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$  ранга 2 в многообразиях  $\mathcal{A}_n(\mathcal{P})$  для различных множеств  $\mathcal{P}$  неизоморфны. Дополнительные свойства этих групп изучались в [16]. Как показано в [11, Раздел 2, Глава VII] (см. также [16]), группа имеет следующее копредставление:

$$(2.2) \quad \mathbb{F}(n, \mathcal{P}) = \left\langle b_1, b_2 \mid A^n = 1, A \in \mathcal{E} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_{\alpha} \right\rangle,$$

где слова  $A \in \mathcal{E}_\alpha$  выбираются особым образом и называются отмеченными элементарными периодами (подробное определение элементарных периодов, множеств  $\mathcal{K}_\alpha, \overline{\mathcal{M}}_\alpha$  и т.д. см. в [10], [11], [16]).

Для простоты мы будем обозначать  $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$  через  $\mathbb{F}$  для фиксированной пары  $(n, \mathcal{P})$ .

Следующие три леммы были установлены в [16] ( $n \geq 1003$ ):

**Лемма 2.1** (Лемма 8, [16]). *Для любого слова  $X$ , не равного 1 в группе  $\mathbb{F}$ , существуют такие слова  $T$  и  $A$ , что  $X = TA^rT^{-1}$  в  $\mathbb{F}$  для некоторого целого  $r$ , где  $A \in \mathcal{E}$  или  $A$  является неотмеченным элементарным периодом некоторого ранга, и  $A^q$  входит в некоторое слово из класса  $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$ .*

**Лемма 2.2** (Лемма 4, [16]). *Если  $A$  — отмеченный элементарный период некоторого ранга  $\gamma$ , и  $A^q$  входит в некоторое слово из класса  $\mathcal{K}_{\gamma-1}$ , то  $A$  имеет порядок  $n$  в группе  $\mathbb{F}$ .*

**Лемма 2.3** (Лемма 5, [16]). *Если  $A$  — неотмеченный элементарный период некоторого ранга  $\gamma$ , и  $A^q$  входит в некоторое слово из класса  $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$ , то  $A$  имеет бесконечный порядок в  $\mathbb{F}$ .*

Из Лемм 2.1, 2.2 и 2.3 непосредственно следует:

**Лемма 2.4.** *Каждый элемент группы  $\mathbb{F}$  сопряжен либо со степенью элемента бесконечного порядка, либо со степенью элемента порядка  $n$ .*

### 3. $n$ -ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Понятие  $n$ -периодических произведений групп было введено Адяном в [9]. Он показал, что операция  $n$ -периодического произведения с нечетным показателем  $n \geq 665$  обладает несколькими важными свойствами: она точна, ассоциативна и удовлетворяет свойству наследственности для подгрупп. Эти свойства также характерны для прямых и свободных произведений, что дает решение известной проблемы Мальцева (подробности см. также в [17]). Эта операция, обозначаемая  $\prod_{i \in I}^n G_i$ , определяется для нечетных  $n \geq 665$  как факторгруппа свободного произведения заданного семейства групп  $\{G_i\}$  по специфической нормальной подгруппе, определяемой системой соотношений вида  $A^n = 1$ .

Следующие две леммы из [9] раскрывают ключевые свойства  $n$ -периодических произведений для нечетных  $n \geq 665$ .

**Лемма 3.1** (Теорема 1, [9]). *Группы  $G_i, i \in I$  канонически вкладываются в  $\prod_{i \in I}^n G_i$  в качестве подгрупп.*

**Лемма 3.2** (Теорема 7, [9]). *Для каждого элемента  $x \in \prod_{i \in I}^n G_i$ , либо  $x^n = 1$  в  $\prod_{i \in I}^n G_i$ , либо  $x$  сопряжен с элементом некоторой подгруппы  $G_i$  группы  $\prod_{i \in I}^n G_i$ .*

Как показано в [18], утверждение Леммы 3.2 является характеристическим для  $n$ -периодических произведений, т.е.  $n$ -периодическое произведение заданного семейства групп однозначно определяется свойствами, указанными в Лемме 3.2.

#### 4. $n$ -КРУЧЁНЫЕ ГРУППЫ

Пусть  $S$  — групповой алфавит,  $\mathcal{R}$  — множество слов в этом алфавите, и пусть  $n > 1$  — фиксированное натуральное число. Рассмотрим группу  $G$ , заданную копредставлением

$$(4.1) \quad G = \langle S \mid R^n = 1, R \in \mathcal{R} \rangle.$$

**Определение 4.1.** Мы говорим, что группа (4.1) является  $n$ -кручёной группой (см. [19], Определение 1.1) или частичной бернсайдовой группой периода  $n$  (см. [20], Определение I.1), если для любого элемента  $y \in G$  либо  $y^n = 1$ , либо  $y$  имеет бесконечный порядок.

Простейшими примерами  $n$ -кручёных групп являются циклическая группа порядка  $n$  и бесконечная циклическая группа. Также ясно, что свободные бернсайдовы группы и абсолютно свободные группы любого ранга являются  $n$ -кручёными группами для любого натурального  $n$ .

Из равенства (2.2) следует, что каждая из групп  $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$  имеет копредставление вида (4.1). Следовательно, из Определения 4.1 и Леммы 2.4 мы заключаем:

**Лемма 4.1.** *Группы  $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$  являются  $n$ -кручёными группами.*

Следующее утверждение было доказано в [19].

**Лемма 4.2** (Теорема 1.1, [19]).  *$n$ -периодическое произведение любого семейства  $n$ -кручёных групп само является  $n$ -кручёной группой ( $n \geq 665$ ).*

Объединяя Определение 4.1 с леммами 4.1 и 4.2, получаем:

**Лемма 4.3.** *Группы  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}} = \mathbb{F}(n, \mathcal{P}) *^n Z_n$  являются  $n$ -кручёными группами ( $n \geq 1003$ ).*

Пусть  $G$  — произвольная  $n$ -кручёная группа (т.е. частичная бернсайдова группа периода  $n$ ), где  $n$  — достаточно большое нечетное число (например,

$n > 10^{100}$ ). Согласно Предложению III.4 в [20], любая частичная бернсайдова группа  $G$  периода  $n$  может быть аксиоматически задана в виде  $G = B_C(S, n) = \langle S \mid R^n = 1, R \in C \rangle$ , где  $C$  — некоторое частичное бернсайдово множество в алфавите  $S$  (см. Определения II.45 и II.46, [20]). С другой стороны, согласно Теореме III.3 в [20],  $G$  также допускает специальное градуированное копредставление вида

$$(4.2) \quad G = G_C(\infty) = \langle S \mid A^n = 1, A \in R \rangle,$$

которое известно как минимальное частичное бернсайдово задание (МРВР) группы  $G$  (см. Определение II.47, [20]).

Для группы  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  зафиксируем систему образующих  $S = \{a^{\pm 1}, b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}\}$  и рассмотрим соответствующее МРВР (4.2). Поскольку все утверждения в Главах II–IV работы [20] справедливы для частичных бернсайдовых групп, они также применимы к  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ . Обозначим через  $S' = \{b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}\}$  систему образующих группы  $\mathbb{F}$ .

Нам понадобятся Леммы 4.4–4.9, доказанные в [20] на основе монографии [21] для произвольных частичных бернсайдовых групп. Мы приводим их здесь специально для группы  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ .

**Лемма 4.4** (Лемма IV.3, [20]). *Пусть  $W$  — произвольное слово в алфавите  $S$ . Предположим, что  $U$  — кратчайшее слово такое, что  $W$  сопряжено с некоторой степенью  $U$  в группе  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ . Если буква  $s \in S$  встречается в  $U$ , то она также должна встречаться в  $W$ .*

**Лемма 4.5** (Лемма II.49 [20] (см. также Лемму 18.1, [21])). *Каждое слово сопряжено в ранге  $i \geq 0$  со степенью некоторого периода ранга  $j \leq i$  или со степенью простого слова в ранге  $i$ .*

**Лемма 4.6** (Предложение III.9 [20]). *Если слово  $X$ , представляющее нетривиальный элемент  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ , сопряжено в  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  со степенью периода  $U$ , то  $|U| \leq |X|$ .*

**Лемма 4.7** (Теорема II.57 [20] (см. также Лемму 19.5, [21])). *Пусть  $p$  — участок контура приведенной диаграммы  $D$ , метка которого является  $A$ -периодической, где  $A$  — простое слово в ранге  $r(D)$  или период ранга  $k \leq r(D)$ , причем в последнем случае в  $D$  нет клеток ранга  $k$ ,  $A$ -совместимых с  $p$ . (Если  $p$  — циклический участок, то мы дополнительно требуем, чтобы  $Lab(p) = A^m$  для некоторого целого  $m$ ). Тогда  $p$  является гладким участком ранга  $|A|$  на контуре  $D$ .*

**Лемма 4.8** (Теорема II.26 [20] (см. также Теорему 17.1[21])). Пусть  $D$  — круговая  $A$ -карта с контуром  $qt$  или кольцевая  $A$ -карта с контурами  $q$  и  $t$ . Если  $q$  — гладкий участок, то  $\bar{\beta}|q| \leq |t|$  (равенство достигается тогда и только тогда, когда  $|q| = |t| = 0$ ).

**Лемма 4.9** (Лемма II.28 [20] (см. также Лемму 17.1 [21])). Пусть  $D$  — кольцевая  $A$ -карта с контурами  $p$  и  $q$ . Тогда существует путь  $t$ , соединяющий вершины  $o_1$  и  $o_2$  путей  $p$  и  $q$  соответственно, такой что  $|t| < \gamma(|p| + |q|)$ .

Следующее утверждение непосредственно следует из Леммы 4.4.

**Лемма 4.10.** Пусть  $V$  — слово в алфавите  $S$  в группе  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ , и предположим, что  $V$  сопряжено с некоторым словом  $W$  в алфавите  $S'$ . Пусть  $U$  — кратчайшее слово такое, что  $V$  сопряжено со степенью  $U$  в  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ . Тогда слово  $U$  является словом в алфавите  $S'$ .

*Доказательство.* Если  $U$  — кратчайшее слово такое, что  $V$  сопряжено со степенью  $U$  в  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ , то  $U$  также является кратчайшим словом, таким что  $W$  сопряжено со степенью  $U$  в  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ . По Лемме 4.4, любая буква  $s \in S$ , входящая в  $U$ , должна входить и в  $W$ . Поскольку  $W$  содержит только буквы из множества  $S' = \{b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}\}$ , отсюда следует, что  $U$  также является словом в алфавите  $\{b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}\}$ .  $\square$

**Лемма 4.11.** Пусть  $V$  — слово в алфавите  $S$ , и предположим, что  $V$  сопряжено с некоторым словом  $W$  в алфавите  $S'$  в группе  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ . Тогда существует циклический сдвиг  $V_1$  слова  $V$ , такой что

$$V_1 = TU^kT^{-1},$$

где  $U$  — слово в алфавите  $S'$ , и выполняются следующие неравенства:

$$\bar{\beta}|U^k| < |V| \quad \text{и} \quad |T| < \gamma(|V| + |U^k|).$$

*Доказательство.* Пусть  $U_1$  — кратчайшее слово такое, что  $V$  сопряжено со степенью  $U_1$  в  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ . По Лемме 4.10,  $U_1$  является словом в алфавите  $\{b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}\}$ . По Лемме 4.5, слово  $U_1$  сопряжено с  $U^t$  для некоторого слова  $U$ , где  $U$  является либо элементарным периодом некоторого ранга, либо словом, простым во всех рангах. В первом случае из Леммы 4.6 следует  $|U| \leq |U_1|$ ; во втором случае неравенство  $|U| \leq |U_1|$  следует из определения простого слова. Поскольку  $U_1$  — кратчайшее слово такое, что  $V$  сопряжено со степенью  $U_1$ , мы должны иметь  $|U| = |U_1|$ . Следовательно, по Лемме 4.10,  $U$  также является словом в алфавите  $\{b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}\}$ .

Рассмотрим минимальную кольцевую диаграмму  $\Delta$  с граничными путями  $p$  и  $q$ , помеченными  $U^k$  и  $V^{-1}$  соответственно. По Лемме 4.7, путь  $p$  является гладким. Таким образом, по Лемме 4.8 имеем:

$$\overline{\beta}|p| = \overline{\beta}|U^k| < |V|.$$

По Лемме 4.9, диаграмму  $\Delta$  можно разрезать вдоль пути  $t$  от точки  $o_1$  на  $p$  до точки  $o_2$  на  $q$ , получив дисковую диаграмму с граничной меткой

$$V_1 = TU_2^kT^{-1},$$

где  $V_1$  — циклический сдвиг  $V$ ,  $U_2$  — циклический сдвиг  $U$ , а  $T$  — метка пути  $t$ . Более того,

$$|T| = |t| < \gamma(|p| + |q|) = \gamma(|V| + |U^k|).$$

Без потери общности можно считать, что  $U_2 = U$ , так как любой циклический сдвиг слова над  $S'$  по-прежнему является словом над  $S'$ .  $\square$

Пусть  $B_{\mathbb{A}_P}(r)$  обозначает шар радиуса  $r$  в графе Кэли группы  $\mathbb{A}_P$  относительно системы образующих  $S$ , а  $B_{\mathbb{F}}(r)$  обозначает шар радиуса  $r$  в графе Кэли группы  $\mathbb{F}$  относительно ее системы образующих  $S'$ .

Из Леммы 4.11 следует:

**Лемма 4.12.** Пусть  $V$  — слово в алфавите  $S^{\pm 1}$  в группе  $\mathbb{A}_P$ , и предположим, что  $V$  сопряжено со словом  $W$  в алфавите  $S'$ . Тогда  $V = XTU^kT^{-1}X^{-1}$ , где:

- $U^k$  представляет элемент  $u \in B_{\mathbb{F}}\left(\frac{1}{\beta}|V|\right)$ ,
- $T$  представляет элемент  $z \in B_{\mathbb{A}_P}\left(\gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)|V|\right)$ ,
- $X$  является префиксом или суффиксом слова  $V$ .

Мы используем принцип наименьшего параметра (LPP) (см. страницы 165–166 [21] или страницы 8–9 [20]). Учитывая, что слово длины  $r$  имеет ровно  $r$  циклических сдвигов, из Леммы 4.12 вытекает следующий результат:

**Лемма 4.13.** Пусть  $d_r$  — количество слов  $V$  длины  $\leq r$  в алфавите  $S$  в группе  $\mathbb{A}_P$ , которые сопряжены с некоторым словом  $W$  в алфавите  $S'$ . Тогда

$$d_r < r \cdot |B_{\mathbb{F}}\left(\frac{1}{\beta}r\right)| \cdot |B_{\mathbb{A}_P}(3\gamma r)|.$$

## 5. О РОСТЕ СВОБОДНОЙ БЕРНСАЙДОВОЙ ГРУППЫ РАНГА 3

Пусть  $G$  — группа, порожденная конечным множеством  $S$ . Функция роста группы  $G$  относительно  $S$ , обозначаемая  $\gamma_{G,S}(s)$ , — это число элементов  $g \in G$ , которые можно представить как произведение не более чем  $s$  образующих из  $S$  или их обратных. Через  $\gamma_{B(m,n)}(s)$  и  $\gamma_{F_m}(s)$  мы обозначаем функции роста

свободной бернсайдовой группы  $B(m, n)$  и абсолютно свободной группы  $F_m$  ранга  $m$  относительно их свободных образующих.

Хорошо известным результатом С.И. Адяна является то, что для нечетных  $n \geq 665$  и  $m > 1$  свободная бернсайдова группа  $B(m, n)$  имеет экспоненциальный рост [11, Гл. VI, Теорема 2.15]. Более того, этот рост является равномерным — более сильное свойство, которое выполняется для всех конечных систем образующих (см. [22], [23], [18]).

Для основного результата этой статьи нам требуется явная нижняя оценка функции роста  $B(3, n)$ . Она может быть выведена из общей оценки, установленной в [24]. Основная теорема этой статьи дает нижнюю границу функции роста  $B(m, n)$  для любого ранга  $m \geq 2$ . В частности, показано, что

$$\gamma_{B(m,n)}(s) > \frac{m}{m-1}(2m-1-\alpha)^s - 1$$

для любого  $\alpha \in (0, 1)$ , удовлетворяющего условию  $2m(2m-1) < \alpha(2m-1-\alpha)^8$ .

Подстановка  $m = 3$  и  $\alpha = 0.1$  в неравенство дает необходимую нам конкретную границу. Это приводит к следующей лемме.

**Лемма 5.1** (см. Теорему 1, [24]). *Для всех нечетных  $n \geq 665$  и натуральных  $s$*

$$\gamma_{B(3,n)}(s) > \frac{3}{2}(4.9)^s - 1.$$

## 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Доказательство Утверждения 2 Теоремы 1.1. Тожество  $x^n = 1$  не выполняется в группе  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ , поскольку оно не выполняется в ее подгруппе  $\mathbb{F}$ .

Доказательство Утверждения 1 Теоремы 1.1. Докажем, что  $x^n = 1$  является  $M$ -вероятностным тождеством в группе  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ .

Мы можем оценить  $\gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}},S}(r)$  и  $\gamma_{\mathbb{F},S'}(r)$  сверху, используя функции роста  $\gamma_{F_3}(r)$  и  $\gamma_{F_2}(r)$  свободных групп  $F_3$  и  $F_2$  ранга 3 и 2 относительно их свободных образующих:

$$(6.1) \quad \gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}},S}(r) \leq \gamma_{F_3}(r) = 1 + \frac{3(5^r - 1)}{2} < \frac{3}{2} \cdot 5^r,$$

$$(6.2) \quad \gamma_{\mathbb{F},S'}(r) \leq \gamma_{F_2}(r) = 2 \cdot 3^r - 1 < 2 \cdot 3^r.$$

С другой стороны,  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  допускает гомоморфизм на свободную бернсайдову группу  $B(3, n)$ , так как  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  является  $n$ -кручёной группой с тремя образующими (см. (4.1)). Следовательно,  $\gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}(r)$  не меньше, чем  $\gamma_{B(3,n)}(r)$ . Используя оценку для  $\gamma_{B(3,n)}$ , полученную в Разделе 5, мы имеем:

$$\frac{3}{2} \cdot (4.9)^r - 1 < \gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}}(r) < \frac{3}{2} \cdot 5^r.$$

Из Леммы 4.12 получаем следующую оценку для числа  $d_r$  слов  $V$  длины  $\leq r$  в алфавите  $S$ , сопряженных в группе  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  с некоторым словом  $W$  в алфавите  $S'$ :

$$d_r \leq r \cdot \gamma_{\mathbb{F}, S'}(\bar{\beta}^{-1} r) \cdot \gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}, S}(3\gamma r).$$

Учитывая (6.1) и (6.2), получаем:

$$d_r < r \cdot 2 \cdot 3^{\bar{\beta}^{-1} r} \cdot \frac{3}{2} \cdot 5^{3\gamma r} = 3r(3^{\bar{\beta}^{-1}} 5^{3\gamma})^r.$$

Используя принцип наименьшего параметра (LPP), мы выбираем параметры  $\beta$  и  $\gamma$  достаточно малыми, чтобы выполнялось неравенство  $3^{\bar{\beta}^{-1}} 5^{3\gamma} < 4$  (напомним, что  $\bar{\beta} = 1 - \beta$ ). Тогда

$$\frac{d_r}{\gamma_{\mathbb{A}_{\mathcal{P}}, S}(r)} < \frac{3 \cdot r \cdot 4^r}{\frac{3}{2} \cdot (4.9)^r - 1} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, Утверждение 1 Теоремы 1.1 доказано.

Доказательство Утверждения 3 Теоремы 1.1. Предположим, что для некоторых  $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$  группы  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  и  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}'}$  изоморфны. Тогда, по Лемме 3.1, группа  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  содержит подгруппу, изоморфную  $\mathbb{F}(n, \mathcal{P}')$ . Иными словами,  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  содержит два элемента  $u'_1, u'_2$ , порождающих подгруппу, изоморфную  $\mathbb{F}(n, \mathcal{P}')$ . Более того, поскольку для  $\mathcal{P}' \neq \mathcal{P}''$  группы  $\mathbb{F}(n, \mathcal{P}')$  и  $\mathbb{F}(n, \mathcal{P}'')$  неизоморфны, соответствующие пары образующих  $(u'_1, u'_2)$  и  $(u''_1, u''_2)$  различны ( $\langle u'_1, u'_2 \rangle \simeq \mathbb{F}(n, \mathcal{P}')$ ,  $\langle u''_1, u''_2 \rangle \simeq \mathbb{F}(n, \mathcal{P}'')$ ). В счетной группе  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  множество различных пар элементов  $(u'_1, u'_2)$  счетно. Следовательно, множество групп, изоморфных данной группе  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ , не более чем счетно. Так как множество неизоморфных групп  $\mathbb{F}(n, \mathcal{P})$  для различных подмножеств  $\mathcal{P}$  множества простых чисел несчетно (см. [11, Глава VII], Предложение 2.17), то отсюда следует, что множество неизоморфных групп  $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$  для различных  $\mathcal{P}$  также несчетно.

**Abstract.** In this paper, we construct a continuum family of non-isomorphic 3-generator groups in which the identity  $x^n = 1$  holds with probability 1, while failing to hold universally in each group. This resolves a recent question about the relationship between probabilistic and universal satisfaction of group identities. Our construction uses  $n$ -periodic products of cyclic groups of order  $n$  and two-generator relatively free groups satisfying identities of the form  $[x^{p^n}, y^{p^n}]^n = 1$ . We prove that in each of these products, the probability of satisfying  $x^n = 1$  is equal to 1, despite the fact that the identity does not hold throughout any of these groups.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. H. Gustafson, “What is the Probability that Two Group Elements Commute?”, *The American Mathematical Monthly*, **80** (9), 1031 – 1034 (1973). <https://doi.org/10.1080/00029890.1973.11993437>
- [2] R. M. Guralnick, J. S. Wilson, “The probability of generating a finite soluble group”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **81**, no. 2, 405 – 427 (2000).
- [3] G. Amir, G. Blachar, M. Gerasimova, G. Kozma, *Probabilistic Laws on Infinite Groups* (arXiv:2304.09144) (2023). arXiv. <http://arxiv.org/abs/2304.09144>
- [4] C. H. Matthew, H. Tointon, “Commuting probabilities of infinite groups”, *Journal of the London Mathematical Society*, **101** (3), 1280 – 1297 (2020).
- [5] Y. Antolín, A. Martino, E. Ventura, “Degree of commutativity of infinite groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **145** (2), 479 – 485 (2017).
- [6] S. I. Adian, “Random walks on free periodic groups”, *Math. USSR-Izv.*, **21**, 3, 425 – 434 (1983).
- [7] G. Goffer, B. E. Greenfeld, A. Yu. Olshanskii, *Asymptotic Burnside Laws*, (2024). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.09630>
- [8] V. S. Atabekyan, A. A. Байрамян, “Probabilistic identities in  $n$ -Torsion groups”, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, **59**, no. 6, 455 – 459 (2024).
- [9] S. I. Adian, “Periodic products of groups”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **142**, 1 – 19 (1979).
- [10] S. I. Adian, “Infinite irreducible systems of group identities”, *Math. USSR-Izv.*, **4**: 4, 721 – 739 (1970).
- [11] S. I. Adian, *The Burnside Problem and Identities in Groups*, Springer-Verlag (1979).
- [12] V. H. Mikaelian, “On finitely generated soluble non-Hopfian groups, an application to a problem of Neumann”, *International Journal of Algebra and Computation*, **17**, 5 – 6, 1107 – 1113 (2007).
- [13] V. H. Mikaelian, “On finitely generated soluble non-Hopfian groups”, *Journal of Mathematical Sciences* (Springer), **166**, no. 6, 743 – 755 (2010).
- [14] V. S. Atabekyan, V. H. Mikaelian, “On Benign Subgroups Constructed by Higman’s Sequence Building Operation”, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, **59** (1), 1 – 12 (2024).
- [15] H. Neumann, *Varieties of Groups*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer, Berlin (1967).
- [16] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “On free groups in the infinitely based varieties of S. I. Adian”, *Izv. RAN. Ser. Mat.*, **81**, no. 5, 3 – 14 (2017).
- [17] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Periodic product of groups”, *Journal of contemporary mathematical analysis*, **52**, (3), 111 – 117 (2017).
- [18] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Characteristic properties and uniform non-amenability of  $n$ -periodic products of groups”, *Izv. Math.*, **79** 6, 1097 – 1110 (2015).
- [19] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “ $n$ -torsion groups”, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, **54** (6), 319 – 327 (2019).
- [20] N. S. Boatman, *Partial-Burnside Groups* (Dissertation), (2012). <http://hdl.handle.net/1803/14921>
- [21] A. Yu. Ol’shanskii, “Geometry of defining relations in groups, Translated from the 1989 Russian original by Yu. A. Bakhturin”, *Mathematics and its Applications* (Soviet Series), **70**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1991).
- [22] V. S. Atabekyan, “Uniform non-amenability of subgroups of free Burnside groups of odd period”, *Math. Notes*, **85** 4, 496 – 502 (2009).
- [23] V. S. Atabekyan, “Monomorphisms of free Burnside groups”, *Math. Notes*, **86** 4, 457 – 462 (2009).
- [24] A. Байрамян, “On growth of free Burnside groups”, *Armen. J. Math.*, **17**, no. 8, 1 – 7 (2025).

Поступила 02 октября 2025

После доработки 02 октября 2025

Принята к публикации 10 декабря 2025