Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 2, 2026, стр. 29 – 44.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ДВОЙНЫХ РЯДАХ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Л. Н. ГАЛОЯН, А. А. САРГСЯН, Л. С. СИМОНЯН

Ереванский Государственный Университет[1]
E-mails: *levongaloyan@ysu.am; asargsyan@ysu.am, lusinesimonyan@ysu.am*

Аннотация. В работе построены асимптотически универсальные двойные ряды по мультипликативным системам неограниченного типа в классе интегрируемых функций двух переменных.

MSC2020 numbers: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: универсальный ряд; мультипликативная система; коэффициенты Фурье; сходимость.

1. Введение

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, χ_E характеристическая функция множества E, а T — квадрат $[0,1]^2$. Через $|E|$ будем обозначать меру Лебега плоского множества $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Через $M(E)$ будем обозначать класс всех вещественных измеримых функций на E, через $L^0(E)$ — класс всех вещественных измеримых функций, конечных почти всюду на E, а через $L^r(E)$, $r > 0$, — класс всех измеримых на E функций, для которых

$$\iint_E |f(x,y)|^r \, dx \, dy < \infty.$$

Пусть $f_k \in L^r(E)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где $r > 0$. Говорят, что ряд $\sum f_k$ сходится к функции f в пространстве $L^r(E)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \Big| \sum_{k=0}^{n} f_k(x,y) - f(x,y) \Big|^r \, dx \, dy = 0.$$

Под сходимостью в $L^0(E)$ и в $M(E)$ будем понимать сходимость почти всюду на множестве E.

Ряд $\sum f_k$ является универсальным в пространстве $L^r(E)$, $r \geq 0$, если для каждой функции $f \in L^r(E)$ существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_m\}$ такая, что подпоследовательность частичных сумм

$$S_{n_m} = \sum_{k=0}^{n_m} f_k$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА.

этого ряда сходится к функции f в пространстве $L^r(E)$.

Аналогично определяется унверсальность в пространстве $M(E)$.

Определение 1.1. *Будем говорить, что ненулевые члены двойной последовательности* $\{c_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ *расположены в убывающем порядке, если для всех* $k_1, k_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, *таких что*

$$k_2 \geq k_1, \quad s_2 \geq s_1, \quad c_{k_2,s_2} \cdot c_{k_1,s_1} \neq 0,$$

выполняется неравенство $c_{k_2,s_2}(f) \leq c_{k_1,s_1}(f)$.

Прямоугольные и сферические частичные суммы двойного ряда

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} f_{k,s}(x,y)$$

определяются соответственно как

$$S_{N,M}(x,y) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{s=0}^{M} f_{k,s}(x,y), \quad S_R(x,y) = \sum_{k^2+s^2 \leq R^2} f_{k,s}(x,y).$$

Следуя работам [10]–[12], приведём некоторые определения, касающиеся универсальных рядов в двумерном случае.

Определение 1.2. *Будем говорить, что двойной ряд* $\sum_{j,s} f_{j,s}$ *универсален в пространстве* $L^r(E)$ *по сферам, если для каждой функции* $f \in L^r(E)$ *существует последовательность возрастающих вещественных чисел* $\{R_k\}$, *такая что* $\lim_{k\to\infty} R_k = \infty$, *и выполняется равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \iint_E \left| \sum_{j^2+s^2 \leq R_k^2} f_{j,s}(x,y) - f(x,y) \right|^r dx\,dy = 0.$$

Определение 1.3. *Будем говорить, что двойной ряд* $\sum_{j,s} f_{j,s}$ *универсален в пространстве* $L^r(E)$ *по прямоугольникам, если для каждой функции* $f \in L^r(E)$ *существуют последовательности возрастающих натуральных чисел* $\{N_p\}_{p\geq 0}$ *и* $\{N'_q\}_{q\geq 0}$, *такие что*

$$\lim_{p,q\to\infty} \iint_E \left| \sum_{j=0}^{N_p}\sum_{s=0}^{N'_q} f_{j,s}(x,y) - f(x,y) \right|^r dx\,dy = 0.$$

Определение 1.4. *Будем говорить, что двойной ряд* $\sum f_{j,s}$ *асимптотически универсален в пространстве* $L^1(E)$ *по сферам (соответственно, по прямоугольникам), если существуют измеримые множества*

$$\{B_m\}_{m=1}^{\infty},$$

такие что

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_m \subset B_{m+1} \subset \cdots \subset E, \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty} |B_m| = |E|,$$

и данный ряд является универсальным рядом в каждом пространстве $L^1(B_m)$, $m \in \mathbb{N}$ *по сферам (по прямоугольникам)* .

Отметим, что аналог определения 1.4 в одномерном случае (в несколько ослабленной форме) приведён в работе [3].

Приведённые обозначения и определения для функций и рядов будут применяться также и в одномерном случае.

Отметим, что существование одномерных рядов, универсальных в том или ином смысле в различных классах функций, изучалось многими математиками, и публикации по этой теме регулярно появляются в математической литературе. Основные результаты в этом направлении были получены Д. Е. Меньшовым, А. А. Талаляном и их учениками (см [1]-[12]). Ниже приведены результаты, имеющие непосредственное отношение к данной работе.

Первой работой, в которой были построены универсальные (в обычном смысле) тригонометрические ряды в классе $M([0, 2\pi])$, является работа Д. Е. Меньшова [1]. В работе А. А. Талаляна [2] доказано, что в классе $M([0, 1])$ существует универсальный ряд (с коэффициентами, стремящимися к нулю) вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x),$$

где $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная полная ортонормированная система в $L^2([0, 1])$.

В работах [5, 6] М. Г. Григорян, усилив теорему Меньшова, доказал, что существует интегрируемая функция, такая что после выбора подходящих знаков её коэффициентов Фурье по тригонометрической системе (соответственно, по системе Уолша) вновь полученный ряд является универсальным в классе всех измеримых функций.

Более того, в работах [7 – 9] было доказано (как по тригонометрической системе, так и по системе Уолша), что любую измеримую, почти всюду конечную функцию, путем изменения её значений на множестве сколь угодно малой меры, можно преобразовать в такую функцию, что после выбора соответствующих знаков для членов ряда Фурье изменённой функции полученный ряд становится универсальным рядом в классе всех вещественных измеримых функций на $M([0, 2\pi])$ (в случае системы Уолша — на $M([0, 1])$).

Для двойной системы Уолша $\{W_k(x)W_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ в работе [11] доказано следующее: для любого $\delta > 0$ существует измеримое множество $E \subset T$ с мерой

$|E| > 1-\delta$, такое что для каждой функции $f \in L^1(E)$ можно найти числа

$$\{\delta_{k,s} : \delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=0}^{\infty}$$

и функцию $g \in L^1(T)$ с $g(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in E$, для которой ряд Фурье по двойной системе Уолша сходится как по сферам, так и по прямоугольникам, а её коэффициенты Фурье на спектре положительны и расположены в убывающем порядке. При этом двойной ряд

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} \delta_{k,s}\, c_{k,s}(g)\, W_k(x) W_s(y)$$

является универсальным рядом в классе $L^r(T)$, $r \in (0,1)$, по сферам (см. определения 1.1-1.3).

Аналогичный результат имеет место и для двойной тригонометрической системы (см. [12, 13]).

Было бы интересно узнать: имеет ли место аналогичный результат для системы Виленкина?

Напомним определение класса мультипликативных систем функций (см. [14], гл. 1, § 1.5).

Пусть $P = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность натуральных чисел, такая что $p_j \geq 2$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Определим

$$m_0 = 1, \qquad m_k = \prod_{j=1}^{k} p_j, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Легко заметить, что для каждой точки $x \in [0,1)$ и каждого $n \in [m_k, m_{k+1}) \cap \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}$, существуют числа $x_j, \alpha_j \in \{0, 1, \ldots, p_j - 1\}$ такие, что

$$n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j m_{j-1}, \qquad x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}.$$

Отметим, что точки вида $\frac{l}{m_k}$, где $0 \leq l \leq m_k - 1$, имеют два различных P-ичных разложения: конечное и бесконечное. Чтобы иметь дело только с однозначными разложениями, договоримся для таких точек использовать именно конечные разложения.

Для заданной последовательности $P = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ мультипликативная система $\mathbb{V} = \{V_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ определяется следующим образом:

$$V_0(x) \equiv 1, \qquad V_n(x) = \exp\Big(2\pi i \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \frac{x_j}{p_j}\Big), \tag{1.2}$$

где числа α_j и x_j — коэффициенты разложений n и x в P-ичной системе.

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^1 V_n(t)\,\overline{V_k(t)}\,dt = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n, \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\overline{a}$ обозначает комплексно-сопряжённое число к a.

Эти системы были введены Н. Я. Виленкиным в 1946 году (см. [15]) и поэтому часто называются также системами Виленкина.

В случае $\sup\{p_k\} < \infty$ система $\mathbb{V} = \{V_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ называется мультипликативной системой ограниченного типа. В противном случае, если $\sup\{p_k\} = \infty$, система называется системой неограниченного типа.

Хорошо известны некоторые частные случаи систем, соответствующих различным последовательностям $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$. В частности, если $P = \{2, 2, \ldots\}$, то система $\mathbb{V}$ совпадает с системой Уолша–Пэли (см. [16], [17]). А если $P = \{a, a, \ldots\}$, где $a > 2$ — простое число, то система $\mathbb{V}$ совпадает с системой Крестенсона–Леви (см. [18]).

В работах [13]–[20] для мультипликативных систем были получены важные результаты. В 1957 году К. Ватари [19] доказал, что система Виленкина ограниченного типа является базисом в пространстве $L^r([0,1])$ при $r > 1$. Затем, в 1976 году, В. Янг [20] установил базисность в $L^r([0,1])$ систем Виленкина произвольного типа.

Большинство результатов по мультипликативным системам получены для систем ограниченного типа. Многие утверждения до настоящего времени не имеют своих аналогов для систем неограниченного типа. В частности, неизвестно, верна ли для мультипликативных систем неограниченного типа теорема Карлесона [22], согласно которой ряд Фурье функции $f \in L^2([0, 2\pi])$ по тригонометрической системе сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. Поэтому изучение мультипликативных систем с точки зрения поведения последовательности $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ представляет самостоятельный интерес.

В настоящей статье для двойной мультипликативной системы (ограниченного или неограниченного типа) мы докажем следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbb{V} = \{V_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ *— система Виленкина. Тогда существует двойной ряд вида*

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} \lambda_{k,s} V_k(x) V_s(y),$$

который является асимптотически универсальным в пространстве $L^1(T)$ *как по сферам, так и по прямоугольникам.*

Следует отметить, что многие классические одномерные результаты невозможно перенести на двумерный случай. Так, например, Феферман в работе [23] показал, что известные теоремы Л. Карлесона [22] и М. Рисса [24] не выполняются в двумерной постановке. В этом случае различные виды частичных сумм (сферические, прямоугольные, квадратные) существенно различаются по своим свойствам, таким как сходимость в L^p при $p \geq 1$, а также сходимость почти всюду. Следует также отметить, что до настоящего времени остаётся неизвестным, сходятся ли почти всюду сферические частичные суммы ряда Фурье непрерывной функции двух переменных по двойной системе Уолша, а также по двойной тригонометрической системе.

Пусть $f \in L^1(T)$. Коэффициенты Фурье функции f по двойной системе Виленкина $\{V_k(x)V_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ определяются следующим образом:

$$c_{k,s}(f) = \iint\limits_T f(x,y)\,\overline{V_k(x)V_s(y)}\,dx\,dy, \quad k,s = 0,1,2,\dots \tag{1.4}$$

Положим

$$\operatorname{spec}(f) = \{(k,s) \mid c_{k,s}(f) \neq 0, \quad k,s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}. \tag{1.5}$$

Теорема 1.1 следует из более сильной теоремы:

Теорема 1.2. *Существуют ряд вида*

$$\Omega = \sum_{k,s=0}^{\infty} \lambda_{k,s}\, V_k(x)\, V_s(y)$$

по двойной системе Виленкина и измеримые множества $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_m \subset B_{m+1} \subset \cdots \subset T, \qquad \lim_{m\to\infty} |B_m| = 1,$$

и выполняются следующие условия:

- ***a.*** *Ненулевые значения $\{|\lambda_{k,s}|\}_{k,s=0}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке (см. Определение 1.1), и $\lim_{k,s\to\infty} \lambda_{k,s} = 0$.*
- ***b.*** *Ряд Ω является универсальным в каждом пространстве $L^1(B_m)$ ($m \in \mathbb{N}$) как по сферам, так и по прямоугольникам.*
- ***c.*** *Для каждой функции $f \in L^1(T)$ и любого $m \in \mathbb{N}$ существует функция $g_m \in L^1(T)$, совпадающая с f на B_m, такая, что её коэффициенты Фурье удовлетворяют*

$$c_{k,s}(g_m) = \lambda_{k,s} \quad \text{для всех } (k,s) \in \operatorname{spec}(g_m).$$

Замечание 1.1. *Пункт **b.** Теоремы 1.2 означает, что ряд Ω является асимптотически универсальным в пространстве $L^1(T)$ как по сферам, так и по прямоугольникам (см. Определение 1.4).*

Замечание 1.2. *Заметим, что не существует ряда вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\lambda_{k,s}\,V_k(x)V_s(y)$$

по двойной системе Виленкина, который был бы универсален в пространстве $L^1(T)$ по прямоугольникам. Действительно, пусть бы такой ряд существовал. Тогда для функции $g\in L^1(T)$ с $c_{1,1}(g)\neq 0$ должны были бы существовать последовательности $\{l_m\}$, $\{l'_m\}$, $\{n_m\}$, $\{n'_m\}$ такие, что

$$\lim_{m\to\infty}\iint_T\left|\sum_{k=0}^{l_m}\sum_{s=0}^{n_m}\lambda_{k,s}V_k(x)V_s(y)-g(x,y)\right|dx\,dy=0,$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint_T\left|\sum_{k=0}^{l'_m}\sum_{s=0}^{n'_m}\lambda_{k,s}V_k(x)V_s(y)-4g(x,y)\right|dx\,dy=0.$$

Отсюда, поскольку сильная сходимость в $L^1(T)$ влечёт за собой слабую сходимость (и учитывая (1.3) и (1.4)), получаем противоречие:

$$\lambda_{1,1}=\lim_{m\to\infty}\iint_T\left(\sum_{k=0}^{l_m}\sum_{s=0}^{n_m}\lambda_{k,s}V_k(x)V_s(y)\right)\overline{V_1(x)V_1(y)}\,dx\,dy$$

$$=\iint_T g(x,y)\overline{V_1(x)V_1(y)}\,dx\,dy=c_{1,1}(g),$$

и одновременно

$$\lambda_{1,1}=\lim_{m\to\infty}\iint_T\left(\sum_{k=0}^{l'_m}\sum_{s=0}^{n'_m}\lambda_{k,s}V_k(x)V_s(y)\right)\overline{V_1(x)V_1(y)}\,dx\,dy$$

$$=\iint_T 4g(x,y)\overline{V_1(x)V_1(y)}\,dx\,dy=4c_{1,1}(g),$$

что невозможно, так как $c_{1,1}(g)\neq 0$.

Следствие 1.1. *Пусть $\mathbb{V}=\{V_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — система Виленкина. Тогда для любого $\delta>0$ существует измеримое множество $E\subset T$ с $|E|\geq 1-\delta$ такое, что для любой функции $f\in L^1(T)$ найдётся функция $g\in L^1(T)$, удовлетворяющая*

$$g(x,y)=f(x,y)\quad \text{при } (x,y)\in E,$$

и для которой ненулевые члены последовательности коэффициентов

$$\left\{\,|c_{k,s}(g)|\,\right\}_{k,s=0}^{\infty}$$

расположены в убывающем порядке.

Отметим, что это утверждение является двумерным аналогом одной из теорем, доказанной в работе [23].

2. Основные леммы

Пусть $P = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность натуральных чисел, а $\mathbb{V} = \{V_k(x)\}$ — мультипликативная система, построенная по последовательности P (см. (1.1)). Обозначим через $\Delta_{m_k}^{(j)}$ (см. (1.2)) P-ичные интервалы вида

$$\Delta_{m_k}^{(j)} = \Big[\frac{j}{m_k}, \frac{j+1}{m_k}\Big), \qquad j \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}.$$

Рассмотрим множество L пар (γ, Δ), где γ пробегает все вещественные числа, а Δ всевозможные P-ичные квадраты вида $\Delta = \Delta_{m_k}^{(\nu)} \times \Delta_{m_k}^{(\ell)}$, с $\nu, \ell \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$ и $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим также множество ступенчатых функций

(2.1)
$$\Phi = \Big\{ f: \ f(t) = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \, \chi_{\Delta_j}(x, y): \ (\gamma_j, \Delta_j) \in L, \ \Delta_j \cap \Delta_{j'} = \varnothing \ \ (j \neq j'), \ \nu \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Аналогично рассмотрим множество

$$\psi = \Big\{ \psi: \ \psi(t) = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \, \chi_{\Delta'_j}(t); \ (\gamma_j, \Delta'_j) \in l, \ \Delta'_j \cap \Delta'_{j'} = \varnothing \ (j \neq j'), \ \nu \in \mathbb{N} \Big\}, \tag{2.2}$$

где l — множество пар $\{\gamma, \Delta'\}$, в котором γ пробегает все вещественные числа, а Δ' — все P-ичные интервалы.

Замечание 2.1. *Легко заметить, что если $\psi_1(t), \psi_2(t) \in \psi$, то функция $f(x, y) = \psi_1(x) \, \psi_2(y)$ принадлежит множеству Φ.*

Мы будем пользоваться следующей леммой, доказанной в [25].

Лемма 2.1. *Пусть $\mathbb{V} = \{V_k(x)\}$ — система Виленкина ограниченного или неограниченного типа. Тогда для любых чисел $n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta_0 \in (0, 1)$, $\gamma_0 \neq 0$ и для любого P-ичного интервала вида $\Delta_0 = \Delta_{m_k}^{(\nu)}$, $\nu \in [1, m_k]$, $k \geq 1$, существуют измеримое множество $E \subset \Delta_0$ и полином*

$$Q(x) = \sum_{k=n_0}^{N} a_k V_k(x) \in \psi,$$

(см. (2.2)) удовлетворяющие следующим условиям:

(1) Ненулевые члены в последовательности $\{|a_k|\}_{k=n_0}^{N}$ равны $|\gamma_0| \cdot |\Delta_0|$,

(2)
$$Q(x) = \begin{cases} \gamma_0, & x \in E \\ 0, & x \notin \Delta_0 \end{cases}, \qquad |E| > (1 - \delta_0)|\Delta_0|,$$

(3)

$$\int_{\Delta_0} |Q(x)|\,dx \le 2|\gamma_0|\cdot|\Delta_0|.$$

Лемма 2.2. *Пусть $\mathbb{V} = \{V_k(x)\}$ — система Виленкина ограниченного или неограниченного типа. Тогда для любых чисел $N_0 \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0,1)$, $\gamma \ne 0$ и для любого P-ичного квадрата вида $\Delta = \Delta' \times \Delta''$, где Δ', Δ'' — P-ичные интервалы, существуют измеримое множество $E \subset \Delta$ и полином*

$$Q(x,y) = \sum_{k,s=N_0}^{N} c_{k,s} V_k(x) V_s(y) \in \Phi,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(1) Ненулевые члены в последовательности $\{|c_{k,s}|\}_{k,s=N_0}^{N}$ равны $|\gamma|\cdot|\Delta|$,

(2)

$$Q(x,y) = \begin{cases} \gamma, & (x,y) \in E \\ 0, & (x,y) \notin \Delta \end{cases},$$

(3)

$$|E| > (1-\delta)|\Delta|,$$

(4)

$$\iint_T |Q(x,y)|\,dx\,dy \le 4|\gamma|\cdot|\Delta|.$$

Доказательство Леммы 2.2. Приведём схему доказательства, опуская технические детали, которые несложно воспроизвести. Дважды применим лемму 2.1, полагая в её формулировке сначала $\gamma_0 = \gamma, \Delta_0 = \Delta', n_0 = N_0, \delta_0 = \delta/2$, а затем $\gamma_0 = 1, \Delta_0 = \Delta'', n_0 = N_1, \delta_0 = \delta/2$. Тем самым определяются измеримые множества $E' \subset \Delta'$ и $E'' \subset \Delta''$, а также полиномы по системе Виленкина вида

$$Q^{(\prime)}(x) = \sum_{k=N_0}^{N_1-1} a_k V_k(x), \qquad Q^{(\prime\prime)}(y) = \sum_{s=N_1}^{N} b_s V_s(y),$$

удовлетворяющие утверждениям 1–3 леммы 2.1 с соответствующими параметрами.

Далее, определяя плоское измеримое множество $E = E' \times E''$, и полином

$$Q(x,y) = Q^{(\prime)}(x) Q^{(\prime\prime)}(y) = \sum_{k,s=N_0}^{N} c_{k,s} V_k(x) V_s(y),$$

где

$$c_{k,s} = \begin{cases} a_k b_s, & N_0 \le k < N_1, \quad N_1 \le s \le N, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

убеждаемся в справедливости утверждений 1–3 леммы 2.2. □

Лемма 2.3. *Пусть* $\mathbb{V} = \{V_k(x)\}$ *— система Виленкина ограниченного или неограниченного типа. Тогда для любых чисел* $N_0 \in \mathbb{N}$, $\delta, \varepsilon \in (0,1)$ *и для любой функции* $f \in \Phi$ *(см. (2.1)) существуют измеримое множество* $E \subset T$ *и полином по двойной системе Виленкина вида*

$$Q(x,y) = \sum_{k,s=N_0}^{N} a_{k,s} V_k(x) V_s(y) \in \Phi,$$

удовлетворяющий следующим условиям:

(1) *Ненулевые коэффициенты в последовательности* $\{|a_{k,s}|\}_{k,s=N_0}^{N}$ *расположены в убывающем порядке, при этом, для всех* (k,s) *выполняется* $|a_{k,s}| \le \varepsilon$.

(2)
$$\iint\limits_T |Q(x,y)|\, dx\, dy \le 4 \iint\limits_T |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

(3)
$$Q(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in E, \qquad \text{причём} \quad |E| > 1 - \delta.$$

Доказательство Леммы 2.3 . Пусть

$$f(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x,y) \in \Phi, \tag{2.3}$$

где для всех $1 \le \nu \le \nu_0$ множества Δ_ν — попарно непересекающиеся P-ичные квадраты. Без ограничения общности можно считать, что

$$0 < |\gamma_1|\,|\Delta_1| < \cdots < |\gamma_\nu|\,|\Delta_\nu| < \cdots < |\gamma_{\nu_0}|\,|\Delta_{\nu_0}| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Последовательным применением леммы 2.2 построим последовательности множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\nu_0}$ и полиномов по двойной системе Виленкина вида

$$Q_\nu(x,y) = \sum_{k,s=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} a_{k,s}^{(\nu)} V_k(x)\, V_s(y) \in \Phi, \quad 1 \le \nu \le \nu_0, \tag{2.5}$$

такие, что для всех $\nu \in [1, \nu_0]$ выполняются следующие условия:

$$\left\{|a_{k,s}^{(\nu)}|\right\}_{k,s=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \text{ равны либо } 0, \text{ либо } |\gamma_\nu|\,|\Delta_\nu|, \tag{2.6}$$

$$|E_\nu| > (1-\delta)\,|\Delta_\nu|, \tag{2.7}$$

$$Q_\nu(x,y) = \begin{cases} \gamma_\nu, & (x,y) \in E_\nu, \\ 0, & (x,y) \notin \Delta_\nu, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\iint\limits_{\Delta_\nu} |Q_\nu(x,y)|\, dx\, dy < 4\,|\gamma_\nu|\,|\Delta_\nu|. \tag{2.9}$$

Положим

$$a_{k,s} = \begin{cases} a_{k,s}^{(\nu)}, & N_{\nu-1} \le k, s < N_\nu, \quad 1 \le \nu \le \nu_0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.10}$$

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu, \tag{2.11}$$

$$Q(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x,y). \tag{2.12}$$

Пусть $N = N_{\nu_0} - 1$. В силу (2.4), (2.6) и (2.10), ненулевые члены в последовательности $\{|a_{k,s}|\}_{k,s=N_0}^{N}$ расположены в убывающем порядке и

$$|a_{k,s}| \le \varepsilon, \quad \forall\, k,s \in [N_0, N].$$

Из (2.3), (2.5), (2.7), (2.8), (2.11) и (2.12) имеем

$$Q(x,y) = f(x,y) \quad \text{для} \quad (x,y) \in E, \quad |E| > 1 - \delta.$$

Учитывая соотношения (2.5), (2.10) и (2.12), получим, что

$$Q(x,y) \in \Phi, \quad Q(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \sum_{k,s=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} a_{k,s}^{(\nu)} V_k(x) V_s(y) = \sum_{k,s=N_0}^{N} a_{k,s} V_k(x) V_s(y).$$

В силу (2.3), (2.9) и (2.12) будем иметь

$$\iint\limits_T |Q(x,y)|\, dxdy = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \iint\limits_{\Delta_\nu} |Q(x,y)|\, dxdy \le 4 \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |\gamma_\nu||\Delta_\nu| = 4 \iint\limits_T |f(x,y)|\, dxdy.$$

3. Доказательство теоремы 1.2

Заметим, что из множества Φ (см. (2.1)) можно выделить последовательность

$$\{f_n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}, \tag{3.1}$$

которая является всюду плотной в пространстве $L^1(T)$.

Применим лемму 2.3, пологая в ее формулировке

$$N_0 = 1, \quad \delta = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{4}, \quad f(x,y) = f_1(x,y).$$

Тогда определяются измеримые множества $E_1 \subset T$ *и* полином по системе Виленкина вида

$$Q_1^{(1)}(x,y) = \sum_{k,s=M_1}^{M_2 - 1} a_{k,s}^{(1,1)} V_k(x) V_s(y), \quad M_1 = N_0 = 1,$$

такие, что ненулевые коэффициенты в последовательности $\{|a_{k,s}^{(1,1)}|\}_{k,s=M_1}^{M_2-1}$ расположены в убывающем порядке и

$$\max_{(k,s)\in\operatorname{spec}(Q_1^{(1)})} |a_{k,s}^{(1,1)}| \leq \frac{1}{4},$$

$$|E_1| \geq 1-2^{-1},$$

$$Q_1^{(1)}(x,y) = f_1(x,y), \quad (x,y)\in E_1,$$

$$\iint_T |Q_1^{(1)}(x,y)|\,dxdy < 4\iint_T |f_1(x,y)|\,dxdy.$$

Снова применим лемму 2.3, полагая в её формулировке:

$$N_0 = M_2, \quad \delta = \frac{1}{2^2}, \quad \varepsilon = \min_{(j,m)\in\operatorname{spec}(Q_1^{(1)})} \left\{|a_{j,m}^{(1,1)}|\right\}, \quad f(x,y) = f_1(x,y) - Q_1^{(1)}(x,y).$$

Тогда определяются измеримые множества $G_1 \subset [0,1]^2$ и полином по системе Виленкина вида:

$$Q_1^{(2)}(x,y) = \sum_{k,s=M_2}^{M_3-1} a_{k,s}^{(1,2)} V_k(x)V_s(y),$$

такие, что ненулевые коэффициенты в последовательности $\left\{|a_{k,s}^{(1,2)}|\right\}_{k,s=M_2}^{M_3-1}$ расположены в убывающем порядке, при этом

$$\max_{(k,s)\in\operatorname{spec}(Q_1^{(2)})} \left\{|a_{k,s}^{(1,2)}|\right\} \leq \min_{(j,m)\in\operatorname{spec}(Q_1^{(1)})} \left\{|a_{j,m}^{(1,1)}|\right\},$$

$$|G_1| \geq 1-2^{-2},$$

$$Q_1^{(2)}(x,y) = f_1(x,y) - Q_1^{(1)}(x,y), \quad (x,y)\in G_1.$$

Нетрудно видеть, что, последовательно применяя лемму 2.3, по индукции можно построить последовательности множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ и полиномов по двойной системе Виленкина вида

$$Q_n^{(1)}(x,y) = \sum_{k,s=M_{2n-1}}^{M_{2n}-1} a_{k,s}^{(n,1)}\, V_k(x)\, V_s(y), \tag{3.2}$$

$$Q_n^{(2)}(x,y) = \sum_{k,s=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1} a_{k,s}^{(n,2)}\, V_k(x)\, V_s(y), \tag{3.3}$$

которые для всех $n\in\mathbb{N}$ удовлетворяют следующим условиям: ненулевые коэффициенты как в последовательности $\left\{|a_{k,s}^{(n,1)}|\right\}_{k,s=M_{2n-1}}^{M_{2n}-1}$, так и в последовательности $\left\{|a_{k,s}^{(n,2)}|\right\}_{k,s=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1}$ (для любого фиксированного $n\in\mathbb{N}$) расположены в убывающем порядке, причем

$$\begin{cases} \max\limits_{(k,s)\in \operatorname{spec}(Q_{n+1}^{(1)})} |a_{k,s}^{(n+1,1)}| \le \min\limits_{(j,m)\in \operatorname{spec}(Q_n^{(2)})} |a_{j,m}^{(n,2)}| \le 2^{-2n}, \\ \max\limits_{(k,s)\in \operatorname{spec}(Q_n^{(2)})} |a_{k,s}^{(n,2)}| \le \min\limits_{(j,m)\in \operatorname{spec}(Q_n^{(1)})} |a_{j,m}^{(n,1)}| \le 2^{-2n}, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$|E_n| \ge 1 - 2^{-2n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

$$Q_n^{(1)}(x,y) = f_n(x,y), \quad (x,y) \in E_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.6}$$

$$\iint_T |Q_n^{(1)}(x,y)|\,dx\,dy < 4 \iint_T |f_n(x,y)|\,dx\,dy, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

$$Q_n^{(2)}(x,y) = f_n(x,y) - \sum_{k=1}^{n-1} \big(Q_k^{(1)}(x,y) + Q_k^{(2)}(x,y)\big) - Q_n^{(1)}(x,y), \quad (x,y) \in G_n, \tag{3.8}$$

$$|G_n| \ge 1 - 2^{-2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Из (3.8) вытекает

$$f_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \Big(Q_k^{(1)}(x,y) + Q_k^{(2)}(x,y)\Big), \quad (x,y) \in G_n. \tag{3.10}$$

Определим измеримые множества $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ и ряд по двойной системе Виленкина следующим образом:

$$B_m = \bigcap_{n=m}^{\infty} (G_n \cap E_n), \quad m \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

и

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} \lambda_{k,s} V_k(x) V_s(y), \tag{3.12}$$

где

$$\lambda_{k,s} = \begin{cases} a_{k,s}^{(n,1)}, & \text{при } M_{2n-1} \le k,s < M_{2n},\ n \ge 1, \\ a_{k,s}^{(n,2)}, & \text{при } M_{2n} \le k,s < M_{2n+1},\ n \ge 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}\ . \end{cases} \tag{3.13}$$

Докажем, что множества $B_m, m \ge 1$ (см. (3.11)) и ряд (3.12) искомые.

В силу (3.4) и (3.13), ненулевые члены в последовательности $\{|\lambda_{k,s}|\}_{k,s=0}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке и $\lim_{k,s\to\infty} \lambda_{k,s} = 0$. Из (3.5), (3.9) и (3.11) следует

$$B_1 \subset \cdots \subset B_m \subset B_{m+1} \subset \cdots \subset [0,1]^2, \quad \lim_{m\to\infty} |B_m| = 1. \tag{3.14}$$

В силу (3.6), (3.10) и (3.11) для каждого $m \in \mathbb{N}$ и для всех $n \ge m$ и $(x,y) \in B_m$ имеем

$$f_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \Big(Q_k^{(1)}(x,y) + Q_k^{(2)}(x,y)\Big). \tag{3.15}$$

Пусть $\varphi \in L^1(T)$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ из последовательности (3.1) так, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} \iint_T |f_{n_k}(x,y) - \varphi(x,y)|\, dxdy = 0. \tag{3.16}$$

Обозначая через

$$N_k = M_{2n_k+1} - 1, \quad R_k = \sqrt{2}\, N_k^2, \quad k \in \mathbb{N} \tag{3.17}$$

и, учитывая соотношения (3.2), (3.3), (3.10), (3.12), (3.13) и (3.15)–(3.17), для каждого $m \in \mathbb{N}$ получим

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{B_m} \left| \sum_{l^2+s^2 \le R_k^2} \lambda_{l,s} V_l(x) V_s(y) - \varphi(x,y) \right| dx\, dy =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \iint_{B_m} \left| \sum_{l,s=0}^{N_k,} \lambda_{l,s} V_l(x) V_s(y) - \varphi(x,y) \right| dx\, dy =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \iint_{B_m} \left| \sum_{j=1}^{n_k} \left(Q_j^{(1)}(x,y) + Q_j^{(2)}(x,y) \right) - \varphi(x,y) \right| dx\, dy = 0.$$

Отсюда вытекает, что ряд (3.12) является универсальным рядом в каждом пространстве $L^1(B_m)$, $m \in \mathbb{N}$ (последовательности $\{N_k\}$ и $\{R_k\}$ не зависят от B_m) по сферам. Рассматривая последовательности (см. определение 1.3) $N_p = M_{2n_p+1} - 1, p$ и $N'_q = M_{2n_q+1} - 1, q \ge 1$ аналогично доказывается универсальность по прямоугольникам. Этим пункт b) теоремы 1.2 доказан.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ фиксировано и пусть $f \in L^1(B_m)$. Положим

$$F_m(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in B_m, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.18}$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{m_j}(x,y)\}_{j=1}^{\infty}$ из последовательности (3.1) так, чтобы

$$\lim_{N\to\infty} \iint_T \left| \sum_{j=1}^{N} f_{m_j}(x,y) - F_m(x,y) \right| dxdy = 0, \quad m_1 > m. \tag{3.19}$$

$$\iint_T |f_{m_j}(x,y)| dxdy \le 2^{-2j}, \quad j \ge 2 \tag{3.20}$$

(это возможно, поскольку последовательность $\{f_n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотна в $L^1(T)$).

В силу (3.7) и (3.20), последовательность $\left\{\sum_{j=1}^{q} Q_{m_j}^{(1)}(x,y)\right\}_{q=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $L^1(T)$. Обозначим её предел через $g_m \in L^1(T)$:

$$\lim_{q\to\infty} \iint\limits_T \left|\sum_{j=1}^{q} Q_{m_j}^{(1)}(x,y) - g_m(x,y)\right| dxdy = 0. \tag{3.21}$$

Учитывая соотношения (3.6), (3.11), (3.18), (3.19) и (3.21), получим, что

$$g_m(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in B_m. \tag{3.22}$$

Положим

$$\delta_{k,s} = \begin{cases} 1, & M_{2m_j-1} \le k, s < M_{2m_j},\ j \ge 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.23}$$

Ясно, что (см. (3.2), (3.12), (3.13) и (3.23))

$$\sum_{k,s=0}^{M_{2m_q}-1} \delta_{k,s}\lambda_{k,s}V_k(x)V_s(y) = \sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{k,s=M_{2m_j-1}}^{M_{2m_j}-1} a_{k,s}^{(m_j,1)}V_k(x)V_s(y)\right) = \sum_{j=1}^{q} Q_{m_j}^{(1)}(x,y).$$

Отсюда и из (3.21) вытекает

$$\lim_{q\to\infty} \iint\limits_T \left|\sum_{k,s=0}^{M_{2m_q}-1} \delta_{k,s}\lambda_{k,s}V_k(x)V_s(y) - g_m(x,y)\right| dxdy = 0. \tag{3.24}$$

Поскольку из сильной сходимости следует слабая сходимость, из (3.24) имеем

$$\delta_{m,l}\lambda_{m,l} = \lim_{q\to\infty} \iint\limits_T \left(\sum_{k,s=0}^{M_{2m_q}-1} \delta_{k,s}\lambda_{k,s}V_k(x)V_s(y)\right)\overline{V_m(x)V_l(y)}\,dxdy$$
$$= \iint\limits_T g_m(x,y)\overline{V_m(x)V_l(y)}\,dxdy.$$

Значит (см. (1.3))

$$\delta_{\upsilon,l}\lambda_{\upsilon,l} = c_{\upsilon,l}(g_m) = \iint\limits_T g_m(x,y)\overline{V_\upsilon(x)V_l(y)}\,dxdy.$$

Ясно, что (см. (1.4), (3.23))

$$spec(g_m) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} [M_{2m_j-1}, M_{2m_j})^2.$$

и следовательно

$$c_{\upsilon,l}(g_m) = \lambda_{\upsilon,l}, \quad \forall(\upsilon,l) \in spec(g_m).$$

Теорема 1.2 доказана.

Abstract. In this paper, asymptotically universal double series for multiplicative systems of unlimited type in the class of integrable functions of two variables are constructed.

Список литературы

[1] Д. Е. Меньшов, “О частных суммах тригонометрических рядов”, Матем. сб., **20**, no. 62: 2, 197 – 238 (1947).

[2] А. А. Талалян, “О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов”, Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем., **10**:3, 17 – 34 (1957).

[3] А. А. Талалян, “О системах функций, ряды покоторым представляют в метрике $L_p[0,1]$ функции пространства $L_q[0,1], 1 \leq q \leq p$, Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем., **3**, no. 4 – 5, 327 – 357 (1968).

[4] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, “О рядах Уолша с монотонными коэффициентами”, Изв. РАН. Сер. матем., **63**: 1, 41 – 60 (1999); Izv. Math., **63** :1, 37 -– 55 (1999).

[5] M. G. Grigoryan, “Functions, universal with respect to the classical systems”, Advances in Operator Theory, **5**, 1414 – 1433 (2020).

[6] M. G. Grigoryan, “Functions with universal Fourier-Walsh series”, Sbornik: Mathematics, **211**: 6, 850 – 874 (2020).

[7] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Функции, универсальные относительно тригонометрической системы”, Изв. РАН. Сер. матем., **85**:2, 73 – 94 (2021).

[8] М. Г. Григорян, “Об универсальных рядах Фурье”, Матем. заметки, **108**:2, 296 – 299 (2020).

[9] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Об условно универсальных функциях”, Известия НАН Армении, Математика, **60**: 2, 15 – 25 (2025).

[10] M. G. Grigoryan, L. S. Simonyan, “Double Universal Fourier Series”, J. Contemp. Math. Anal., **54**, 355 – 364 (2019).

[11] A. Sargsyan, M. Grigoryan, “Universal functions for classes $L^p[0,1)^2$, $p \in (0,1)$, with respect to the double Walsh system”, Positivity, **23**:5, 1261 – 1280 (2019).

[12] М. Г. Григорян, “О почти универсальных двойных рядах Фурье”, Тр. ИММ УрО РАН, **28**:4 (2022).

[13] М. Г. Григорян, С. В. Конягин, “О рядах Фурье по кратной тригонометрической системе”, *УМН*, **78**:4 (472), 201 – 202 (2023).

[14] Б. И. Голубов, А. В. Скворцов, Б. И. Ефимов, Ряды и Преобразования Уолша: Теория и Применения, М.: Наука, 344с (1987).

[15] Н. Я. Виленкин, “Об одном классе полных ортонормальных систем”, Изв. АН СССР. Сер. матем., **11**:4, 363 – 400 (1947).

[16] J. L. Walsh, “A closed set of normal orthogonal functions”, Amer. J. Math., **45**:1, 5 – 24 (1923).

[17] J. L. Price, “Certain groups of orthonormal step functions”, Can. J. Math., **9**, 413 – 425 (1957).

[18] H. E. Chrestenson, “A class of generalized Walsh functions”, Pacific J. Math., **5**:1, 17 – 31 (1955).

[19] C. Watari, “On generalized Walsh Fourier series”, Tohoku Math. J. (2), **10**:3, 211 – 241 (1958).

[20] W. S. Young, “Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series”, Trans. Amer. Math. Soc., **218**, 311 – 320 (1976).

[21] M. G. Grigoryan, S. A. Sargsyan, “On the L^1-convergence and behavior of coefficients of Fourier-Vilenkin series”, Positivity, **22**:3, 897 – 918 (2018).

[22] L. Carleson, “On convergence and growth of partial sums of Fourier series”, Acta Math., **116**, 135 – 157 (1966).

[23] C. Fefferman, “On the divergence of multiple Fourier series”, Bull. Amer. Math. Soc., **77**:2, 191 – 195 (1971).

[24] M. Riesz, “Sur les fonctions conjuguées”, Math. Z., **27**, 214 – 244 (1927).

[25] S. Sargsyan, M. Grigoryan, “On the Fourier-Vilenkin coefficients”, Acta Math. Sci., **37**:2, 1 – 9 (2017).

Поступила 23 июня 2025

После доработки 22 ноября 2025

Принята к публикации 25 ноября 2025