

Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 2, 2026, стр. 45 – 64.

**ВЗРЫВНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НОВИКОВА
И УРАВНЕНИЯ ФОКАСА-ОЛВЕРА-РОЗЕНУ-ЦЯО С
НЕЛИНЕЙНЫМ ЧЛЕНОМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА**

Ю. ЧЖОУ, Я. ЦЗИНЬ, М. ЧЖУ

Чжэцзянский педагогический университет, Цзиньхуа, КНР

Университет сельского и лесного хозяйства провинции Чжэцзян, Ханчжоу, КНР

Университет Цюйфу, Цюйфу, КНР

E-mails: zhouyuanmeng@zjnu.edu.cn; yujinmath@zafu.edu.cn; mazhu@qfnu.edu.cn

Аннотация. В данной работе мы исследуем взрывные явления для уравнения Новикова и уравнения Фокаса–Олвера–Розену–Цяо (FORQ) с нелинейным членом высокого порядка $\gamma u^p u_x$. Именно благодаря особой структуре этих двух уравнений мы можем установить достаточные условия для начальных данных, гарантирующие взрывные явления в конечный момент времени.

MSC2020 numbers: 35L05; 35G25.

Ключевые слова: уравнение Новикова; уравнение Фокаса–Олвера–Розену–Цяо; взрыв; нелинейный член высокого порядка

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1981 году Фухштайнер и Фокс [1] использовали рекурсивные операторы для вывода класса уравнений с двойными гамильтоновыми структурами, а именно уравнения Камасса-Холма

$$(1.1) \quad u_t - u_{xxt} + 2\kappa u_x + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}.$$

Камасса и Холм [2] вывели уравнение (1.1) из гамильтоновых методов. В [3] была рассмотрена задача Коши уравнения (1.1) и доказано, что соответствующее решение $u(x, t) + \kappa$ ($\kappa \neq 0$) с начальными данными $u_0(x) + \kappa \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с компактным носителем не сохраняет компактность по x – носителю на протяжении всего времени существования. Было показано, что солитарная волна уравнения (1.1) обладает спектральными свойствами солитона и сохраняет стабильность своей формы при небольших возмущениях, см. [4]. Когда $\kappa = 0$, уравнение (1.1) принимает вид

$$(1.2) \quad u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}.$$

Мы рекомендуем читателям ознакомиться с [5, 6] для локальной хорошо поставленной задачи уравнения (1.2) в пространстве Соболева H^s с $s > \frac{3}{2}$, [7] для пиковых солитонов уравнения (1.2) и [8] для орбитальной устойчивости пиконов в норме H^1 относительно уравнения (1.2). Маккин [9] показал, что уравнение (1.2) взрывается тогда и только тогда, когда некоторая часть положительной составляющей m_0 лежит слева от некоторой части его отрицательной составляющей. Цзян, Ни и Чжоу [10] доказали теорему Маккина [9] для волновых разрывов уравнения (1.2) и проанализировали профиль взрыва. В [6, 11] были разработаны условия для начальных данных, при которых уравнение (1.2) с дисперсией взрывается за конечное время.

В 2009 году Владимир Новиков обнаружил новое интегрируемое уравнение с кубической нелинейностью (уравнение Новикова):

$$(1.3) \quad \begin{cases} m_t + u^2 m_x + 3u u_x m = 0, \\ m = u - u_{xx}, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

В [12] операторы $\mathcal{B}_1 = -2(3mD_x + 2m_x)(4D_x - D_x^3)^{-1}(3mD_x + m_x)$ и $\mathcal{B}_2 = (1 - D_x^2)m^{-1}D_x m^{-1}(1 - D_x^2)$ обеспечивают бигамильтонову структуру для иерархии симметрии уравнения (1.3). Было показано, что задача Коши уравнения (1.3) в пространстве Соболева H^s с $s > \frac{3}{2}$ локально хорошо поставлена в [13] – [15], с использованием методов аппроксимации типа Галеркина в [13] и теории полугрупп Като в [14, 15]. Локальная хорошо поставленность задачи Коши для уравнения (1.3) также сохранялась как в пространствах Бесова $B_{2,1}^{\frac{3}{2}}$ в [14, 15] так и в пространстве Бесова $B_{p,r}^s$ с $1 \leq p, r \leq +\infty$ и $s > \max\left\{1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2}\right\}$ в [16]. Ву и Инь [14] доказали, что уравнение (1.3) имеет гладкие решения, существующие глобально во времени, а также глобальные слабые решения типа пиконов. Устойчивость экспоненциального затухания уравнения (1.3) была исследована в [15]. Химонас и Хомс [17] показали, что отображение: $u(0) \rightarrow u(t)$ с $u_0 \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$, $0 \leq r < s$ является гильдерово непрерывным в H^r -топологии. Глобальное существование слабых решений задачи Коши уравнения (1.3) было установлено в [18], а глобальные дисперсионные решения были изучены в [19]. Используя специальную структуру уравнения (1.3) в [20, 21], были установлены достаточные условия на начальные данные, обеспечивающие взрыв уравнения в течение конечного времени. Наконец, механизм взрыва уравнения (1.3) с линейным дисперсионным членом был представлен также в [22].

Фокас [23], Олвер и Розенау [24], Цяо [25] исследовали класс уравнений волн в мелкой воде с более высокой нелинейностью, а именно уравнение Фокаса-Олвера-Розенау-Цяо (FORQ).

$$(1.4) \quad \begin{cases} m_t + ((u^2 - u_x^2) m)_x = 0, \\ m = u - u_{xx}, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Уравнение было получено из двумерного уравнения Эйлера и доказано, что оно имеет структуры Лакса и бигамильтониана. Новый вид солитонных решений уравнения (1.4) был разработан Цяо [25]. В [26] было доказано, что уравнение (1.4) является хорошо поставленной начальной задачей в пространствах Соболева H^s , $s > \frac{5}{2}$, а отображение данных в решения было непрерывным, но не равномерно непрерывным. В частности, отображение данных в решение уравнения (1.4) не было равномерно непрерывным от $B_{p,r}^s(\mathbb{R})$ к $C([0, T]; B_{p,r}^s)$, $s > \max\left\{2 + \frac{1}{p}, \frac{5}{2}\right\}$, $p \in (1, \infty]$ и $r \in [1, \infty)$ в [27]. Свойства непрерывности отображения решения были исследованы в [28], где было показано, что оно было Гёльдерово непрерывным в топологии H^r , когда $0 \leq r < s$. В [29], было доказано, что как на прямой, так и на окружности существуют начальные данные в H^s с $s < \frac{3}{2}$, при которых решение не является единственным. Чжан изучил глобальное существование слабого решения уравнения (1.4) в пространстве H^1 в [30] и получил стабильность и единственность слабого решения в $W^{1,1}$. В [31] авторы доказали, что решение уравнения (1.4) взрывается за конечное время, когда m_0 неотрицательно и существует точка x' , в которой начальное значение m_0 больше нуля, а u_{0x} меньше отрицательного значения. Аналогичным образом, механизм взрыва уравнения (1.4) с переменными линейными членами дисперсии был изучен в [32], а механизм взрыва уравнения омКХ (обобщенное модифицированное уравнение Камасса-Холма) с линейным членом дисперсии был представлен в [22].

Уравнение (1.3) и уравнение (1.4) допускают следующие две сохраняющиеся плотности.

$$\tilde{H}_1[u(t)] = \int_{\mathbb{R}} um dx = \int_{\mathbb{R}} u^2 + u_x^2 dx = \tilde{H}_1[u_0]$$

и

$$\tilde{H}_2[u(t)] = \int_{\mathbb{R}} u^4 + 2u^2 u_x^2 - \frac{1}{3} u_x^4 dx = \tilde{H}_2[u_0].$$

Чен, Го, Лю и Цю [22] доказали, что если существует некоторая точка $x_0 \in \mathbb{R}$ такая, что $u_0(x_0) > 0$ и

$$m_0(x) > 0, x < x_0; \quad m_0(x_0) = 0; \quad m_0(x) < 0, x > x_0.$$

Более того, если

$$\frac{u_0(x_0)}{2} [u_0^2(x_0) - u_{0x}^2(x_0)] + 2 \left(\sqrt{\frac{\tilde{H}_1^3[u_0]}{2}} + \sqrt{3\tilde{H}_1[u_0] (\tilde{H}_1^2[u_0] - \tilde{H}_2[u_0])} \right) < 0,$$

то соответствующее решение уравнения (1.3) взрывалось за конечное время. Они также рассмотрели уравнение (1.4) и уравнение (1.3) с дисперсионным членом γu_x и нашли закон сохранения, аналогичный \tilde{H}_2 , чтобы доказать взрыв уравнения (1.4). Однако \tilde{H}_2 не сохранялось в уравнении (1.3) с дисперсионным членом, и они нашли замену, модифицировав \tilde{H}_2 , чтобы установить результат взрыва для уравнения.

В данной работе мы рассматриваем уравнение Новикова с нелинейным членом высокого порядка.

$$(1.5) \quad \begin{cases} m_t + u^2 m_x + 3uu_x m + \gamma u^p u_x = 0, x \in \mathbb{R}, t \geq 0, p > 0, \\ m = u - u_{xx}, \\ u_0(x) = u(0, x), x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Мы также рассматриваем уравнение FORQ с нелинейным членом высокого порядка.

$$(1.6) \quad \begin{cases} m_t + ((u^2 - u_x^2) m)_x + \gamma u^p u_x = 0, x \in \mathbb{R}, t \geq 0, p \geq 0, \\ m = u - u_{xx}, \\ u_0(x) = u(0, x), x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Остальная часть данной статьи организована следующим образом. В Разделе 2 мы изучаем некоторые свойства уравнения Новикова с нелинейным членом высокого порядка. В Разделе 3 мы изучаем некоторые свойства уравнения FORQ с нелинейным членом высокого порядка.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ НОВИКОВА С НЕЛИНЕЙНЫМ ЧЛЕНОМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Уравнение (1.5) также можно записать в виде

$$u_t - u_{txx} + 4u^2 u_x - 3uu_x u_{xx} - u^2 u_{xxx} + \gamma u^p u_x = 0.$$

Принимая свертку с функцией Грина $G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ для оператора $(1 - \partial_x^2)$, получаем эквивалентные нелинейные формы уравнения (1.5) следующим образом

$$(2.1) \quad u_t + u^2 u_x + G * \partial_x \left(u^3 + \frac{3}{2}uu_x^2 + \frac{1}{p+1}\gamma u^{p+1} \right) + \frac{1}{2}G * u_x^3 = 0.$$

2.1. Законы сохранения для уравнения Новикова с нелинейным членом высокого порядка.

Лемма 2.1. Уравнение (1.5) имеет закон сохранения

$$\|u\|_{H^1} = \|u_0\|_{H^1}.$$

Доказательство. Умножив обе стороны уравнения (1.5) на u и проинтегрировав по \mathbb{R} , получаем, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^2 + u_x^2 dx = \int_{\mathbb{R}} u m_t dx = - \int_{\mathbb{R}} u (u^2 m_x + 3uu_x m + \gamma u^p u_x) dx = 0.$$

Доказательство завершено. \square

Лемма 2.2. Если

$$(2.2) \quad H(t) = \int_{\mathbb{R}} u^4 + 2u^2 u_x^2 - \frac{1}{3} u_x^4 + \frac{8\gamma}{3(p+1)(p+2)} u^{p+2} dx$$

тогда выполняется следующее тождество типа Моравецца

$$(2.3) \quad \frac{dH(t)}{dt} = -\frac{4\gamma}{3(p+1)} \int_{\mathbb{R}} u_x^3 u^{p+1} dx.$$

Доказательство. Из уравнения (2.1) можно получить:

$$(2.4) \quad u_t = -u^2 u_x - G * \partial_x \left(u^3 + \frac{3}{2} uu_x^2 + \frac{1}{p+1} \gamma u^{p+1} \right) - \frac{1}{2} G * u_x^3.$$

Нахождение частной производной уравнения (1.5) по x дает следующее уравнение

$$(2.5) \quad u_{xt} + u^2 u_{xx} + \frac{1}{2} uu_x^2 - u^3 - \frac{1}{p+1} \gamma u^{p+1} + G * \left(u^3 + \frac{3}{2} uu_x^2 + \frac{1}{p+1} \gamma u^{p+1} \right) + \frac{1}{2} G * \partial_x u_x^3 = 0.$$

Итак, мы получаем

$$(2.6) \quad u_{xt} = -u^2 u_{xx} - \frac{1}{2} uu_x^2 + u^3 + \frac{1}{p+1} \gamma u^{p+1} - G * \left(u^3 + \frac{3}{2} uu_x^2 + \frac{1}{p+1} \gamma u^{p+1} \right) - \frac{1}{2} G * \partial_x u_x^3.$$

Взяв производную (2.2) по t и затем применив интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= \int_{\mathbb{R}} 4u^3 u_t + 4uu_x^2 u_t + 4u^2 u_x u_{xt} - \frac{4}{3} u_x^3 u_{xt} + \frac{8\gamma}{3(p+1)} u^{p+1} u_t dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{8}{3} u^3 + 4uu_x^2 + \frac{8}{3(p+1)} \gamma u^{p+1} \right) u_t + \frac{4}{3} u^3 m_t - \frac{4}{3} u_x^3 u_{xt} dx \\ &= -\frac{4\gamma}{3(p+1)} \int_{\mathbb{R}} u_x^3 u^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Здесь мы используем (2.4), (2.6) и $\int_{\mathbb{R}} f(x) \partial_x (1 - \partial_x^2)^{-1} f(x) dx = 0$. \square

2.2. Локальная хорошо поставленность и сценарий взрыва.

Теорема 2.1. *Предположим, что $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ с $s > \frac{3}{2}$, существует $T > 0$ и единственное решение $u(t, x)$ уравнения (1.5) такое, что*

$$u(t, x) \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R})).$$

Доказательство аналогично доказательству для уравнения Новикова в [13, 15] и уравнения Камасса-Холма в [5]. Для краткости статьи мы опускаем подробное доказательство.

Лемма 2.3. *Пусть $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ для $s > \frac{3}{2}$. Решение уравнения (1.5) с начальными данными u_0 взрывается в конечном времени T^* тогда и только тогда, когда*

$$\liminf_{t \rightarrow T^*} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{uu_x(t, x)\} = -\infty.$$

Доказательство. Нам нужно доказать только случай для $s = 2$, поскольку доказательство для $s > 2$ будет аналогичным случаю для $s = 2$.

Умножив уравнение (1.5) на m и проинтегрировав по \mathbb{R} относительно x , получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} m^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}} uu_x m^2 dx + \gamma \int_{\mathbb{R}} u^p u_x m dx = 0.$$

Если uu_x ограничено снизу на $[0, T^*] \times \mathbb{R}$, т. е. существует $M > 0$ такое, что $uu_x \geq -M$ на $[0, T^*] \times \mathbb{R}$. Согласно лемме 2.1, имеем $\|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_{H^1}$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} m^2 dx &\leq 2M \int_{\mathbb{R}} m^2 dx + |\gamma| \int_{\mathbb{R}} |u^p u_x m| dx \\ &\leq 2M \int_{\mathbb{R}} m^2 dx + |\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} |u_x m| dx \\ &\leq 2M \int_{\mathbb{R}} m^2 dx + |\gamma| \left(\frac{1}{2^2} \|u\|_{H^1}^p \right) \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx + |\gamma| \left(\frac{1}{2^2} \|u\|_{H^1}^p \right) \int_{\mathbb{R}} m^2 dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} m^2 dx. \end{aligned}$$

В силу неравенства Гронвалля получаем

$$\int_{\mathbb{R}} m^2 dx \leq e^{2Ct} \int_{\mathbb{R}} m_0^2 dx, \quad \text{п.в. } t \in [0, T^*].$$

Несложно вычислить, что

$$\|m\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} (u - u_{xx})^2 dx = \int_{\mathbb{R}} u^2 + 2u_x^2 + u_{xx}^2 dx.$$

Следовательно,

$$\|u\|_{H^2}^2 \leq \|m\|_{L^2}^2 \leq 2 \|u\|_{H^2}^2.$$

Следовательно, если uu_x ограничено снизу на $[0, T^*]$, тогда норма $H^2(\mathbb{R})$ решения уравнения (1.5) не взрывает за конечное время.

С другой стороны, мы можем получить, используя неравенство Соболева

$$\|uu_x\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{H^s}^2.$$

Тогда, если норма H^s решения ограничена, из этого следует, что uu_x ограничено. \square

2.3. Явление взрыва для уравнения Новикова с нелинейным членом высокого порядка. Характеристики $q(t, x)$, связанные с уравнением (1.5), определяются следующим образом

$$\begin{cases} q_t(t, x) = u^2(t, q(t, x)), & x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T]. \\ q(0, x) = x, \end{cases}$$

Лемма 2.4. Пусть $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3$. Тогда $u(t, q(t, x))$ и $u_x(t, q(t, x))$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$\begin{aligned} (2.7) \quad \frac{d}{dt} u(t, q(t, x)) &= -\gamma G * u^p u_x + \frac{1}{2} e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y \left(u^3 + \frac{3}{2} uu_y^2 - \frac{1}{2} u_y^3 \right) dy \\ &\quad - \frac{1}{2} e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} \left(u^3 + \frac{3}{2} uu_y^2 + \frac{1}{2} u_y^3 \right) dy, \\ \frac{d}{dt} u_x(t, q(t, x)) &= u^3(t, q(t, x)) - \frac{1}{2} uu_x^2(t, q(t, x)) + \frac{\gamma}{p+1} (u^{p+1}(t, q(t, x)) - G * u^{p+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y \left(u^3 + \frac{3}{2} uu_y^2 - \frac{1}{2} u_y^3 \right) dy - \frac{1}{2} e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} \left(u^3 + \frac{3}{2} uu_y^2 + \frac{1}{2} u_y^3 \right) dy. \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала воспользуемся (2.1) для вычисления $\frac{d}{dt} u(t, q(t, x))$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t, q(t, x)) &= u_t(t, q(t, x)) + u^2 u_x(t, q(t, x)) \\ &= -\gamma G * u^p u_x(t, q(t, x)) - \frac{1}{2} G * u_x^3 - G * \partial_x \left(u^3 + \frac{3}{2} uu_x^2 + \frac{\gamma}{p+1} u^{p+1} \right) \\ &= -\gamma G * u^p u_x + \frac{1}{2} e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y \left(u^3 + \frac{3}{2} uu_y^2 - \frac{1}{2} u_y^3 \right) dy \\ &\quad - \frac{1}{2} e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} \left(u^3 + \frac{3}{2} uu_y^2 + \frac{1}{2} u_y^3 \right) dy. \end{aligned}$$

Используя (2.5), мы можем получить

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}u_x(t, q(t, x)) &= u_{tx}(t, q(t, x)) + u^2u_{xx}(t, q(t, x)) \\
 &= u^3 - \frac{1}{2}uu_x^2 + \frac{\gamma}{p+1} (u^{p+1}(t, q(t, x)) - G * u^{p+1}(t, q(t, x))) \\
 &\quad - G * \left(u^3 + \frac{3}{2}uu_x^2 \right) - \frac{1}{2}G * \partial_x u^3 \\
 &= u^3(t, q(t, x)) - \frac{1}{2}uu_x^2(t, q(t, x)) + \frac{\gamma}{p+1} (u^{p+1}(t, q(t, x)) - G * u^{p+1}) - \\
 &\quad \frac{1}{2}e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y \left(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 - \frac{1}{2}u_y^3 \right) dy - \frac{1}{2}e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} \left(u^3 + \frac{3}{2}uu_y^2 + \frac{1}{2}u_y^3 \right) dy.
 \end{aligned}$$

□

Теперь определим следующие формулы

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad f(t) &= \left(\int_{\mathbb{R}} u_x^4 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad C_1 = \frac{4}{3}|\gamma| \left(\frac{1}{2^{\frac{p+1}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^{p+2} \right), \\
 C_2 &= -H(0) + \|u_0\|_{H^1}^4 + \frac{8|\gamma|}{3 \cdot 2^{\frac{p}{2}}(p+1)(p+2)} (\|u_0\|_{H^1})^{p+2}, \\
 C_3 &= \frac{3}{2} \|u_0\|_{H^1} C_1, \quad C_4 = |\gamma| \left(\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^{p+1} \right) + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \|u_0\|_{H^1}^3 + \sqrt{3C_2} \|u_0\|_{H^1} \right), \\
 K(t) &= \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \|u_0\|_{H^1}^3 + \|u_0\|_{H^1} \left(\frac{3}{2} C_1 t + \sqrt{3C_2} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Теорема 2.2. Пусть $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ для $s > \frac{3}{2}$. Предположим, что существуют некоторые $0 < \beta < 1$ и $x_1 \in \mathbb{R}$ такие, что $u_0(x_1) > 0$ и

$$(2.9) \quad u_{0,x}(x_1) < -\frac{B+1}{B-1} \sqrt{\frac{2K_1(T_1)}{\beta u_0(x_1)}},$$

где

$$\begin{aligned}
 B &= e^{T_1 \sqrt{2\beta u_0(x_1) K_1(T_1)}}, \\
 T_1 &= \frac{-C_4 + \sqrt{C_4^2 + 4C_3(1-\beta)u_0(x_1)}}{2C_3},
 \end{aligned}$$

$$(2.10) \quad K_1(t) = (2-\beta)^3 u_0^3(x_1) + \frac{|\gamma|}{p+1} \left(\frac{1}{2^{\frac{p+1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \right) \|u_0\|_{H^1}^{p+1} + K(t),$$

с C_3 , C_4 и $K(t)$, определёнными в (2.8). Тогда соответствующее решение $u(t, x)$ взрывает за конечное время с оценкой времени взрыва T^* , граница

которого составляет

$$(2.11) \quad T^* \leq T_2 = \frac{1}{\sqrt{2\beta u_0(x_1)K_1(T_1)}} \ln \frac{u_{0,x}(x_1) - \sqrt{\frac{2K_1(T_1)}{\beta u_0(x_1)}}}{u_{0,x}(x_1) + \sqrt{\frac{2K_1(T_1)}{\beta u_0(x_1)}}.$$

Доказательство. Пусть

$$Q(t) = \int_{\mathbb{R}} u^4 + 2u^2 u_x^2 + \frac{8\gamma}{3(p+1)(p+2)} u^{p+2} dx.$$

Из леммы 2.1 следует

$$\int_{\mathbb{R}} u^2 u_x^2 dx \leq \|u\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{H^1}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{H^1}^4$$

и

$$(2.12) \quad \begin{aligned} Q(t) &\leq \|u\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{L^2}^2 + 2 \int_{\mathbb{R}} u^2 u_x^2 dx + \frac{8|\gamma|}{3(p+1)(p+2)} \|u\|_{L^\infty}^p \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|u_0\|_{H^1}^4 + \frac{8|\gamma|}{3 \cdot 2^{\frac{p}{2}}(p+1)(p+2)} (\|u_0\|_{H^1})^{p+2}. \end{aligned}$$

Пусть

$$f(t) = \left(\int_{\mathbb{R}} u_x^4 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

По (2.3) и определению C_1 получаем

$$(2.13) \quad \begin{aligned} -\frac{dH(t)}{dt} &= \frac{4\gamma}{3(p+1)} \int_{\mathbb{R}} u^3 u_x^{p+1} dx \\ &\leq \frac{4}{3} |\gamma| \left[\int_{\mathbb{R}} (u^{p+1} u_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} u_x^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{4}{3} |\gamma| \left(\|u\|_{L^\infty}^{2p+2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} f(t) \\ &\leq \frac{4}{3} |\gamma| \left(\frac{1}{2^{\frac{p+1}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^{p+2} \right) f(t) = C_1 f(t), \end{aligned}$$

затем находим производную (2.13) по t ,

$$-H(t) \leq C_1 \int_0^t f(s) ds - H(0).$$

Из определения $H(t)$ получаем

$$\frac{1}{3} f^2(t) \leq C_1 \int_0^t f(s) ds - H(0) + Q(t).$$

Поэтому имеем

$$(2.14) \quad f^2(t) \leq 3C_1 \int_0^t f(s) ds + 3C_2,$$

где мы использовали (2.12) и определение C_2 .

Возьмем

$$g(t) = 3C_1 \int_0^t f(s) ds + 3C_2.$$

Тогда из (2.14) получаем

$$g'(t) = 3C_1 f(t) \leq 3C_1 g^{\frac{1}{2}}(t).$$

Интегрирование по интервалу $[0, t]$ дает

$$\sqrt{g(t)} \leq \frac{3}{2}C_1 t + \sqrt{g(0)} = \frac{3}{2}C_1 t + \sqrt{3C_2}.$$

Таким образом

$$f(t) \leq \sqrt{g(t)} \leq \frac{3}{2}C_1 t + \sqrt{3C_2}.$$

Применяя вышеуказанное неравенство, мы можем получить следующие оценки

(2.15)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y (u^3 + \frac{3}{2} u u_y^2 - \frac{1}{2} u_y^3) dy \pm \frac{1}{2} e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} (u^3 + \frac{3}{2} u u_y^2 + \frac{1}{2} u_y^3) dy \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x |u|^3 + \frac{3}{2} |u u_y^2| + \frac{1}{2} |u_y|^3 dy + \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} |u|^3 + \frac{3}{2} |u u_y^2| + \frac{1}{2} |u_y|^3 dy \\ & \leq \frac{3}{4} \int_{-\infty}^x |u|^3 + |u_y|^3 dy + \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} |u|^3 + |u_y|^3 dy \\ & = \frac{3}{4} \int_{\mathbb{R}} |u|^3 + |u_y|^3 dy \\ & \leq \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \|u_0\|_{H^1}^3 + \|u_y\|_{L^4}^2 \|u_0\|_{H^1} \right) \\ & \leq \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \|u_0\|_{H^1}^3 + \|u_0\|_{H^1} \left(\frac{3}{2} C_1 t + \sqrt{3C_2} \right) \right) = K(t). \end{aligned}$$

Из (2.7) и (2.15) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} u(t, q(t, x_1)) \right| & \leq |\gamma| |G * u^p u_x| + \left| \frac{1}{2} e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y \left(u^3 + \frac{3}{2} u u_y^2 - \frac{1}{2} u_y^3 \right) dy \right| \\ & \quad + \left| \frac{1}{2} e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} \left(u^3 + \frac{3}{2} u u_y^2 + \frac{1}{2} u_y^3 \right) dy \right| \\ & \leq |\gamma| \|G\|_{L^2} \|u^p u_x\|_{L^2} + K(t) \\ & \leq |\gamma| \left(\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^{p+1} \right) + K(t) = 2C_3 t + C_4, \end{aligned}$$

где C_3 и C_4 определены в (2.8). Интегрирование по интервалу времени $[0, t]$ дает

$$(2.16) \quad u_0(x_1) - C_3 t^2 - C_4 t \leq u(t, q(t, x_1)) \leq u_0(x_1) + C_3 t^2 + C_4 t.$$

Теперь рассмотрим (2.16) во времени $0 \leq t \leq T_1 = \frac{-C_4 + \sqrt{C_4^2 + 4C_3(1-\beta)u_0(x_1)}}{2C_3}$, которое можно получить

$$0 < \beta u_0(x_1) \leq u(t, q(t, x_1)) \leq (2 - \beta)u_0(x_1).$$

Применяя оценку свертки (2.15) к динамике u_x в (2.7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_x(t, q(t, x_1)) &\leq u \left(u^2 - \frac{1}{2} u_x^2 \right) (t, q(t, x_1)) \\ &+ \frac{|\gamma|}{p+1} |u^{p+1}(t, q(t, x_1)) - G * u^{p+1}(t, q(t, x_1))| + K(t) \\ &\leq u \left(u^2 - \frac{1}{2} u_x^2 \right) (t, q(t, x_1)) + \frac{|\gamma|}{p+1} \left(\|u\|_{L^\infty}^{p+1} + |G|_{L^1} \|u^{p+1}\|_{L^2} \right) + K(t) \\ &\leq u \left(u^2 - \frac{1}{2} u_x^2 \right) (t, q(t, x_1)) + \frac{|\gamma|}{p+1} \left(\frac{1}{2^{\frac{p+1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \right) \|u_0\|_{H^1}^{p+1} + K(t). \end{aligned}$$

Следовательно, для $0 \leq t \leq T_1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_x(t, q(t, x_1)) &\leq -\frac{\beta}{2} u_0(x_1) u_x^2(t, q(t, x_1)) + (2 - \beta)^3 u_0^3(x_1) \\ (2.17) \quad &+ \frac{|\gamma|}{p+1} \left(\frac{1}{2^{\frac{p+1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \right) \|u_0\|_{H^1}^{p+1} + K(t) \\ &\leq -\frac{\beta}{2} u_0(x_1) u_x^2(t, q(t, x_1)) + K_1(T_1), \end{aligned}$$

где $K(t)$ возрастает по отношению к t , а $K_1(t)$ определено в (2.10).

Пусть $\eta = \sqrt{\frac{2K_1(T_1)}{\beta u_0(x_1)}}$. Из (2.9) можно заметить, что $u_{0,x}(x_1) < -\eta$, а из (2.17) можно сделать вывод, что

$$u_x(t, q(t, x_1)) \leq \frac{\eta \left[1 + \frac{u_{0,x}(x_1) - \eta}{u_{0,x}(x_1) + \eta} e^{-\eta \beta u_0(x_1) t} \right]}{1 - \frac{u_{0,x}(x_1) - \eta}{u_{0,x}(x_1) + \eta} e^{-\eta \beta u_0(x_1) t}}.$$

Пусть

$$(2.18) \quad h(t) = 1 - \frac{u_{0,x}(x_1) - \eta}{u_{0,x}(x_1) + \eta} e^{-\eta \beta u_0(x_1) t},$$

а затем, вычислив производную этого уравнения по t , получаем

$$h'(t) = \eta \beta u_0(x_1) \frac{u_{0,x}(x_1) - \eta}{u_{0,x}(x_1) + \eta} e^{-\eta \beta u_0(x_1) t}$$

следовательно, $h'(t) \geq 0$. Из (2.9), (2.11) и (2.18), получаем, что $h(0) < 0$, $h(T_2) = 0$ и $h(T_1) > 0$, что означает $T_2 < T_1$.

Таким образом, из приведенных выше вычислений можно сделать вывод, что $u_x(t, q(t, x_1)) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow T^*$. Наконец, при $t \rightarrow T^*$, $u(t, q(t, x_1)) \geq \beta u_0(x_1) > 0$. Это приводит к взрыву $u u_x(t, q(t, x_1))$. На этом доказательство Теоремы 2.2 завершено. \square

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ FORQ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЧЛЕНОМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Уравнение (1.6) также можно записать в виде

$$u_t - u_{txx} + 3u^2u_x - u_x^3 - u^2u_{xxx} - u_x^2u_{xxx} - 4uu_xu_{xx} + 2u_xu_{xx}^2 + \gamma u^p u_x = 0.$$

Принимая свертку с функцией Грина $G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ для оператора Гельмгольца $(1 - \partial_x^2)$, получаем следующие эквивалентные нелокальные уравнения

$$(3.1) \quad u_t + \left(u^2 - \frac{1}{3}u_x^2\right)u_x + \partial_x G * \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_x^2 + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1}\right) + \frac{1}{3}G * u_x^3 = 0$$

3.1. Законы сохранения для уравнения FORQ с нелинейным членом высокого порядка.

Лемма 3.1. Уравнение (1.6) имеет законы сохранения

$$(3.2) \quad \|u\|_{H^1} = \|u_0\|_{H^1}$$

и

$$(3.3) \quad H_2 = \int_{\mathbb{R}} u^4 + 2u^2u_x^2 - \frac{1}{3}u_x^4 + \frac{4}{(p+2)(p+1)}\gamma u^{p+2} dx = H_2[u_0].$$

Доказательство. Умножив обе стороны уравнения (1.6) на u и проинтегрировав по \mathbb{R} , получаем, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^2 + u_x^2 dx = \int_{\mathbb{R}} um_t dx = - \int_{\mathbb{R}} u[2u_x m^2 + (u^2 - u_x^2)m_x + \gamma u^p u_x] dx = 0.$$

Из приведенного выше уравнения мы делаем вывод, что $\|u\|_{H^1} = \|u_0\|_{H^1}$.

Мы знаем, что уравнение (1.6) можно переписать в виде

$$(3.4) \quad m_t + \partial_x \left((u^2 - u_x^2)m + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1} \right) = 0.$$

Находим производную уравнения (1.6) по t , а затем подставляем в (3.4), чтобы получить

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_2 &= \int_{\mathbb{R}} 4u^3 u_t + 4uu_x^2 u_t + 4u^2 u_x u_{xt} - \frac{4}{3}u_x^3 u_{xt} + \frac{4}{p+1}\gamma u^{p+1} u_t dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 4u^3 u_t - 4uu_x^2 u_t - 4u^2 u_{xx} u_t + 4u_x^2 u_{xx} u + \frac{4}{p+1}\gamma u^{p+1} u_t dx \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}} \left((u^2 - u_x^2)m + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1} \right) u_t dx \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}} \left((u^2 - u_x^2)m + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1} \right) (1 - \partial_x^2)^{-1} m_t dx \\ &= -4 \int_{\mathbb{R}} \left((u^2 - u_x^2)m + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1} \right) (1 - \partial_x^2)^{-1} \left((u^2 - u_x^2)m + \frac{\gamma}{p+1}u^{p+1} \right) dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

где мы использовали

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \partial_x (1 - \partial_x^2)^{-1} f(x) dx = 0.$$

Таким образом, мы завершили доказательство этой леммы. \square

3.2. Локальная хорошо поставленность и сценарий взрыва.

Теорема 3.1. *Предположим, что $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ с $s > \frac{5}{2}$, существует $T > 0$ и единственное решение $u(t, x)$ уравнения (1.6) такое, что*

$$u(t, x) \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R})).$$

Доказательство аналогично доказательству уравнения FORQ в [26] и уравнения Камасса-Холма в [5]. Для краткости статьи мы опускаем подробное доказательство.

Лемма 3.2. *Пусть $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ для $s > \frac{5}{2}$. Решение уравнения (1.6) с начальными данными u_0 взрывается в конечном времени T^* тогда и только тогда, когда*

$$\liminf_{t \rightarrow T^*} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{u_x m(t, x)\} = -\infty.$$

Доказательство. Нам нужно доказать только случай для $s = 3$. Доказательство будет аналогичным для $s > 3$.

Из леммы 3.1 можно сделать вывод, что

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_{H^1}, \quad \text{и} \quad \|u_x\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|m\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Умножив уравнение (1.6) на m , проинтегрировав x по \mathbb{R} , а затем применив интегрирование по частям, получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} m^2 dx &= - \int_{\mathbb{R}} (u^2 - u_x^2) m m_x dx - 2 \int_{\mathbb{R}} u_x m^3 dx - \gamma \int_{\mathbb{R}} u^p u_x m dx \\ (3.5) \quad &\leq - \int_{\mathbb{R}} (m u_x) m^2 dx + |\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} |u_x m| dx \\ &\leq - \int_{\mathbb{R}} (m u_x) m^2 dx + 2 |\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} m^2 dx. \end{aligned}$$

Если $u_x m$ ограничено снизу на $[0, T^*] \times \mathbb{R}$, т. е. существует $M_1 > 0$ такое, что $u_x m \geq -M_1$ на $[0, T^*] \times \mathbb{R}$. Тогда (3.5) принимает вид:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} m^2 dx \leq M_1 \int_{\mathbb{R}} m^2 dx + 2 |\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} m^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}} m^2 dx.$$

Используя неравенство Гронвалля, получаем

$$\int_{\mathbb{R}} m^2 dx \leq e^{2Ct} \int_{\mathbb{R}} m_0^2 dx.$$

Таким образом, $\|m\|_{L^2}$ ограничено.

Мы берем производную уравнения (1.6) по x , то есть

$$\begin{aligned} m_{tx} &= -2u_{xx}m^2 - 6u_xmm_x - (u^2 - u_x^2)m_{xx} - \gamma pu^{p-1}u_x^2 - \gamma u^p u_{xx} \\ &= -2um^2 + 2m^3 - 6u_xmm_x - (u^2 - u_x^2)m_{xx} - \gamma pu^{p-1}u_x^2 - \gamma u^{p+1} + \gamma u^p m. \end{aligned}$$

Умножим обе части уравнения на m_x , а затем проинтегрируем x по \mathbb{R} , получим

$$\begin{aligned} (3.6) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx &= -5 \int_{\mathbb{R}} u_x mm_x^2 dx + \frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}} u_x m^3 dx - \gamma p \int_{\mathbb{R}} u^{p-1} u_x^2 m_x dx \\ &\quad - \gamma \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} m_x dx + \gamma \int_{\mathbb{R}} u^p mm_x dx \\ &\leq -5 \int_{\mathbb{R}} u_x mm_x^2 dx + \frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}} u_x m^3 dx + 2|\gamma|p \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_x\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx \\ &\quad + |\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} |um_x| dx + |\gamma|p \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} |mm_x| dx \\ &\leq -5 \int_{\mathbb{R}} u_x mm_x^2 dx + \frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}} u_x m^3 dx + 2|\gamma|p \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_x\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx \\ &\quad + |\gamma|p \|u\|_{L^\infty}^p \|u\|_{H^1}^2 + 2|\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx + |\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} m^2 dx. \end{aligned}$$

Следовательно, из (3.5) и (3.6) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} (m^2 + m_x^2) dx &\leq -5 \int_{\mathbb{R}} u_x mm_x^2 dx - \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} u_x m^3 dx \\ &\quad + 2|\gamma|p \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_x\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx \\ &\quad + |\gamma|p \|u\|_{L^\infty}^p \|u\|_{H^1}^2 + 2|\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx + 3|\gamma| \|u\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} m^2 dx \\ &\leq 5M_1 \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx + \frac{1}{3}M_1 \int_{\mathbb{R}} m^2 dx + C \int_{\mathbb{R}} m_x^2 dx + C \int_{\mathbb{R}} m^2 dx + C \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} (m^2 + m_x^2) dx + C. \end{aligned}$$

В силу неравенства Гронвалля получаем

$$\|u\|_{H^3} \leq \int_{\mathbb{R}} m^2 + m_x^2 dx \leq e^{2Ct} \left(\int_{\mathbb{R}} m_0^2 + m_{0x}^2 dx + 2Ct \right), \quad \text{п.в. } t \in [0, T^*].$$

Следовательно, если $u_x m$ ограничено снизу на $[0, T^*]$, то норма $H^3(\mathbb{R})$ решения (1.6) не взрывается за конечное время. С другой стороны, используя неравенство Соболева, если $\lim_{t \rightarrow T^*} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{u_x m(t, x)\} = -\infty$, то решение взорвется за конечное время. \square

3.3. Явление взрыва для уравнения FORQ с нелинейным членом высокого порядка. Характеристики уравнения (1.6) следующие

$$\begin{cases} q_t(t, x) = u^2(t, q(t, x)) - u_x^2(t, q(t, x)), & x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]. \\ q(0, x) = x, \end{cases}$$

Лемма 3.3. Пусть $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3$. Тогда $u(t, q(t, x))$, $u_x(t, q(t, x))$ и $m(t, q(t, x))$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t, q(t, x)) &= -\frac{2}{3}u_x^3(t, q(t, x)) - \gamma G * u^p u_x + \frac{1}{2}e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 - \frac{1}{3}u_y^3 \right) dy \\ &\quad - \frac{1}{2}e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 + \frac{1}{3}u_y^3 \right) dy, \\ \frac{d}{dt}u_x(t, q(t, x)) &= \frac{2}{3}u^3(t, q(t, x)) - uu_x^2(t, q(t, x)) + \frac{\gamma}{p+1} (u^{p+1}(t, q(t, x)) - G * u^{p+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2}e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 - \frac{1}{3}u_y^3 \right) dy - \frac{1}{2}e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 + \frac{1}{3}u_y^3 \right) dy, \\ \frac{d}{dt}m(t, q(t, x)) &= -2u_x m^2(t, q(t, x)) - \gamma u^p u_x(t, q(t, x)). \end{aligned}$$

Доказательство. Вычислим сначала $\frac{d}{dt}u(t, q(t, x))$ и воспользуемся формулой (3.1), чтобы получить

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t, q(t, x)) &= u_t(t, q(t, x)) + (u^2 - u_x^2) u_x(t, q(t, x)) \\ &= -\frac{2}{3}u_x^3(t, q(t, x)) - \gamma G * u^p u_x - G * \partial_x \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_x^2 \right) - \frac{1}{3}G * u_x^3 \\ &= -\frac{2}{3}u_x^3(t, q(t, x)) - \gamma G * u^p u_x + \frac{1}{2}e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 - \frac{1}{3}u_y^3 \right) dy \\ &\quad - \frac{1}{2}e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 + \frac{1}{3}u_y^3 \right) dy. \end{aligned}$$

Взяв производную (3.1) по x , мы получаем

$$\begin{aligned} u_{tx} + uu_x^2 + u^2 u_{xx} - u_x^2 u_{xx} - \frac{2}{3}u^3 - \frac{\gamma}{p+1} u^{p+1} + \frac{1}{3}G * \partial_x u_x^3 \\ + G * \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_x^2 + \frac{\gamma}{p+1} u^{p+1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_x(t, q(t, x)) &= u_{tx}(t, q(t, x)) + (u^2 - u_x^2) u_{xx}(t, q(t, x)) \\ &= \frac{2}{3}u^3(t, q(t, x)) - uu_x^2(t, q(t, x)) + \frac{\gamma}{p+1} (u^{p+1}(t, q(t, x)) - G * u^{p+1}) \\ &\quad - \frac{1}{3}G * \partial_x u_x^3 - G * \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_x^2 \right) \\ &= \frac{2}{3}u^3(t, q(t, x)) - uu_x^2(t, q(t, x)) + \gamma \left(\frac{1}{p+1} u^{p+1}(t, q(t, x)) - G * \frac{1}{p+1} u^{p+1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2}e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 - \frac{1}{3}u_y^3 \right) dy - \frac{1}{2}e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{2}{3}u^3 + uu_y^2 + \frac{1}{3}u_y^3 \right) dy. \end{aligned}$$

Наконец, из (1.6) вытекает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(t, q(t, x)) &= m_t(t, q(t, x)) + (u^2 - u_x^2)_x m(t, q(t, x)) \\ &= -(2uu_x - 2u_x u_{xx})m(t, q(t, x)) - \gamma u^p u_x(t, q(t, x)) \\ &= -2u_x m^2(t, q(t, x)) - \gamma u^p u_x(t, q(t, x)). \quad \square \end{aligned}$$

Теперь определим

$$(3.8) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \|u_0\|_{H^1}^3 + \frac{1}{2} \|u_0\|_{H^1} \left[3 \left(\|u_0\|_{H^1}^4 - H_2[u_0] \right) + \frac{12|\gamma|}{2^{\frac{p}{2}}(p+1)(p+2)} \|u_0\|_{H^1}^{p+2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ A_2 &= |\gamma| \frac{3}{2^{\frac{p+1}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^{p+1} + \frac{3}{2} A_1, \quad A_3 = A_1 + \frac{|\gamma|}{p+1} \frac{1}{2^{\frac{p-1}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^{p+1} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \|u_0\|_{H^1}^3. \end{aligned}$$

Теорема 3.2. Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$ и $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ с $s > \frac{5}{2}$. Предположим, что существует некоторая $x_2 \in \mathbb{R}$ такая, что

$$(3.9) \quad \begin{aligned} u_0(x_2) &> 0, \quad u_{0,x}(x_2) \leq \min \left\{ -(A_2)^{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{A_3}{u_0(x_2)}} \right\}, \\ m_0(x_2) &> \sqrt{-\frac{\gamma}{2^{\frac{p+2}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^p} (\gamma \leq 0), \quad m_0 \in \mathbb{R} (\text{нет ограничений}) (\gamma > 0), \end{aligned}$$

где A_2 и A_3 определены в (3.8). Тогда соответствующее решение $u(t, x)$ взрывается за конечное время с оценкой времени взрыва T^* как

$$T^* \leq \begin{cases} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{m_0(x_2)}{\sqrt{\frac{\gamma}{2} u_0^p(x_2)}}\right)}{-2u_{0,x}(x_2)}, & \text{если } \gamma > 0, \\ \frac{1}{-4\sqrt{\Delta}u_{0,x}(x_2)} \ln \frac{m_0(x_2) + \sqrt{\Delta}}{m_0(x_2) - \sqrt{\Delta}}, & \text{если } \gamma < 0, \\ \frac{1}{-2u_{0,x}(x_2)m_0(x_2)}, & \text{если } \gamma = 0, \end{cases} \quad \text{где } \Delta = -\frac{\gamma}{2^{\frac{p+2}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^p.$$

Доказательство. Сначала получим некоторые полезные оценки, которые будут использованы позже. Используя (3.2) и (3.3), получаем следующие оценки:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \|u_x\|_{L^4}^4 &= 3 \int_{\mathbb{R}} u^4 + 2u^2 u_x^2 dx + \frac{12\gamma}{(p+1)(p+2)} \int_{\mathbb{R}} u^{p+2} dx - 3H_2[u_0] \|u_x\|_{L^4}^4 \\ &= 3 \int_{\mathbb{R}} u^4 + 2u^2 u_x^2 dx + \frac{12\gamma}{(p+1)(p+2)} \int_{\mathbb{R}} u^{p+2} dx - 3H_2[u_0] \\ &\leq 3 \left(\|u\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{L^2}^2 + 2 \|u\|_{L^\infty}^2 \|u_x\|_{L^2}^2 \right) - 3H_2[u_0] + \frac{12|\gamma|}{(p+1)(p+2)} \|u\|_{L^\infty}^{p+2} \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq 3 \left(\|u_0\|_{H^1}^4 - H_2[u_0] \right) + \frac{12|\gamma|}{2^{\frac{p}{2}}(p+1)(p+2)} \|u_0\|_{H^1}^{p+2}. \end{aligned}$$

Из вышесказанного получаем следующую оценку

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{2} e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y \left(\frac{2}{3} u^3 + uu_y^2 - \frac{1}{3} u_y^3 \right) dy \pm \frac{1}{2} e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{2}{3} u^3 + uu_y^2 + \frac{1}{3} u_y^3 \right) dy \right| \\
 & \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \frac{2}{3} |u|^3 + |uu_y^2| + \frac{1}{3} |u_y|^3 dy + \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{2}{3} |u|^3 + |uu_y^2| + \frac{1}{3} |u_y|^3 dy \\
 & \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x |u|^3 + |u_y|^3 dy + \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} |u|^3 + |u_y|^3 dy \\
 & = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^3 + |u_y|^3 dy \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \|u_0\|_{H^1}^3 \\
 & + \frac{1}{2} \|u_0\|_{H^1} \left[3 \left(\|u_0\|_{H^1}^4 - H_2[u_0] \right) + \frac{12|\gamma|}{2^{\frac{p}{2}}(p+1)(p+2)} \|u_0\|_{H^1}^{p+2} \right]^{\frac{1}{2}} = A_1.
 \end{aligned}$$

Используя снова (3.2), получаем

$$(3.11) \quad |u^{p+1} - G * u^{p+1}| \leq 2 \|u\|_{L^\infty}^{p+1} \leq \frac{1}{2^{\frac{p-1}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^{p+1}.$$

Подставляя оценки (3.10)-(3.11) в (3.7), получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} u(t, q(t, x_2)) & \geq -\frac{2}{3} u_x^3(t, q(t, x_2)) - |\gamma| \frac{1}{2^{\frac{p-1}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^{p+1} - A_1, \\
 \frac{d}{dt} u_x(t, q(t, x_2)) & \leq -uu_x^2(t, q(t, x_2)) + A_1 + \frac{|\gamma|}{p+1} \frac{1}{2^{\frac{p-1}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^{p+1} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \|u_0\|_{H^1}^3.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $u(t, q(t, x_2))$ монотонно возрастает, когда

$$u_x^3(t, q(t, x_2)) \leq -|\gamma| \frac{3}{2^{\frac{p+1}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^{p+1} - \frac{3}{2} A_1 = -A_2$$

и $u_x(t, q(t, x_2))$ монотонно убывает, когда

$$uu_x^2(t, q(t, x_2)) \geq A_1 + \frac{|\gamma|}{p+1} \frac{1}{2^{\frac{p-1}{2}}} \|u_0\|_{H^1}^{p+1} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \|u_0\|_{H^1}^3 = A_3.$$

Исходя из заданных начальных условий (3.9), мы можем получить

$$(3.12) \quad u(t, q(t, x_2)) \geq u_0(x_2) > 0, \quad u_x(t, q(t, x_2)) \leq u_{0,x}(x_2) < 0.$$

Когда $\gamma > 0$, используя (3.7) и (3.12), мы можем получить

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad \frac{d}{dt} m(t, q(t, x_2)) & \geq -u_{0x}(x_2)(2m^2 + \gamma u^p)(t, p(t, x_2)) \\
 & \geq -u_{0x}(x_2) (2m^2(t, q(t, x_2)) + \gamma u_0^p(x_2)) > 0.
 \end{aligned}$$

Тогда мы приходим к выводу, что $m(t, q(t, x_2))$ возрастает.

Интегрируя неравенство (3.13) по $[0, t]$, получаем

$$m(t, q(t, x_2)) \geq \sqrt{\frac{\gamma}{2} u_0^p(x_2)} \tan \left(-2u_{0x}(x_2) \sqrt{\frac{\gamma}{2} u_0^p(x_2)} t + \arctan \left(\frac{m_0(x_2)}{\sqrt{\frac{\gamma}{2} u_0^p(x_2)}} \right) \right).$$

Следовательно, $m(t, q(t, x_2)) \rightarrow +\infty$, при

$$t \rightarrow \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{m_0(x_2)}{\sqrt{\frac{\gamma}{2}u_0^p(x_2)}}\right)}{-2u_{0x}(x_2)}.$$

Таким образом,

$$u_x m(t, q(t, x_2)) \rightarrow -\infty, \quad \text{при } t \rightarrow \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{m_0(x_2)}{\sqrt{\frac{\gamma}{2}u_0^p(x_2)}}\right)}{-2u_{0x}(x_2)}.$$

Для $\gamma < 0$ и вследствие того, что $m_0(x_2) > \sqrt{-\frac{\gamma}{\frac{p+2}{2}}\|u_0\|_{H^1}^p}$, получаем

$$m_0^2 + \frac{\gamma}{\frac{p+2}{2}}\|u_0\|_{H^1}^p > 0.$$

Таким образом, $m(t, q(t, x_2))$ монотонно возрастает, и $m(t, q(t, x_2)) > m_0(x_2)$.

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(t, q(t, x_2)) &= -u_x(2m^2 + \gamma u^p)(t, p(t, x_2)) \\ (3.14) \quad &\geq -2u_{0x}(x_2) \left(m^2(t, q(t, x_2)) + \frac{\gamma}{\frac{p+2}{2}}\|u_0\|_{H^1}^p \right) \\ &= -2u_{0x}(x_2) \left(m - \sqrt{-\frac{\gamma}{\frac{p+2}{2}}\|u_0\|_{H^1}^p} \right) \left(m + \sqrt{-\frac{\gamma}{\frac{p+2}{2}}\|u_0\|_{H^1}^p} \right) > 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем неравенство (3.14) по $[0, t]$, получим

$$m(t, q(t, x_2)) \geq \frac{\sqrt{\Delta}(1 + E(t))}{1 - E(t)} \rightarrow +\infty, \quad \text{при } t \rightarrow \frac{1}{-4\sqrt{\Delta}u_{0x}(x_2)} \ln \frac{m_0(x_2) + \sqrt{\Delta}}{m_0(x_2) - \sqrt{\Delta}},$$

где $E(t) = e^{-4\sqrt{\Delta}u_{0x}(x_2)t \frac{m_0(x_2) - \sqrt{\Delta}}{m_0(x_2) + \sqrt{\Delta}}}$ и $\Delta = -\frac{\gamma}{\frac{p+2}{2}}\|u_0\|_{H^1}^p$. Таким образом,

$$u_x m(t, q(t, x_2)) \rightarrow -\infty, \quad \text{при } t \rightarrow \frac{1}{-4\sqrt{\Delta}u_{0x}(x_2)} \ln \frac{m_0(x_2) + \sqrt{\Delta}}{m_0(x_2) - \sqrt{\Delta}}.$$

Для $\gamma = 0$ с заданными начальными условиями (3.9) имеем

$$\begin{aligned} (3.15) \quad \frac{d}{dt}m(t, q(t, x_2)) &= -2u_x m^2(t, p(t, x_2)) \\ &\geq -2u_{0x}(x_2)m^2(t, q(t, x_2)) > 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем неравенство (3.15) по $[0, t]$, получим

$$m(t, q(t, x_2)) \geq \frac{m_0(x_2)}{1 + 2u_{0x}(x_2)m_0(x_2)t},$$

тогда, имеем

$$m(t, q(t, x_2)) \rightarrow +\infty, \quad \text{при } t \rightarrow \frac{1}{-2u_{0x}(x_2)m_0(x_2)}.$$

Следовательно, получаем, что

$$u_x m(t, q(t, x_2)) \rightarrow -\infty, \quad \text{при } t \rightarrow \frac{1}{-2u_{0x}(x_2)m_0(x_2)}.$$

Таким образом, теорема полностью доказана. \square

Abstract. In this paper, we investigate the blow-up phenomena for the Novikov equation and the FORQ equation with high-order nonlinear term $\gamma u^p u_x$. It is the special structure of these two equations that we can apply to establish sufficient conditions on the initial data to guarantee blow-up phenomena in finite time.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Fuchssteiner, A. S. Fokas “Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries”, *Phys. D*, **4** (1), 47 – 66 (1981/82).
- [2] R. Camassa, D. D. Holm, “An integrable shallow water equation with peaked solitons”, *Phys. Rev. Lett.*, **71** (11), 1661 – 1664 (1993).
- [3] Y. Zhou, H. Chen, “Wave breaking and propagation speed for the Camassa-Holm equation with $\kappa \neq 0$ ”, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **12** (3), 1875 – 1882 (2011).
- [4] A. Constantin, W. A. Strauss, “Stability of the Camassa-Holm solitons”, *J. Nonlinear Sci.*, **12** (4), 415 – 422 (2002).
- [5] A. Constantin, J. Escher, “Well-posedness, global existence, and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **51** (5), 475 – 504 (1998).
- [6] Yi A. Li, P. J. Olver, “Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation”, *J. Differential Equations*, **162** (1), 27 – 63 (2000).
- [7] R. Camassa, D. D. Holm, J. M. Hyman, “A new integrable shallow water equation”, *Advances in Applied Mechanics*, **31**, 1 – 33 (1994).
- [8] A. Constantin, W. A. Strauss, “Stability of peakons”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **53** (5), 603 – 610 (2000).
- [9] H. P. McKean, “Breakdown of a shallow water equation”, *Asian J. Math.*, **2** (4), 867 – 874 (1998).
- [10] Z. Jiang, L. Ni, Y. Zhou, “Wave breaking of the Camassa-Holm equation”, *J. Nonlinear Sci.*, **22**(2), 235 – 245 (2012).
- [11] Z. Guo, “Blow up, global existence, and infinite propagation speed for the weakly dissipative Camassa-Holm equation”, *J. Math. Phys.*, **49** (3), 033516 (2008).
- [12] A. N. W. Hone, J. Wang, “Integrable peakon equations with cubic nonlinearity”, *J. Phys. A*, **41** (37), 372002 (2008).
- [13] A. Himonas, C. Holliman, “The Cauchy problem for the Novikov equation”, *Nonlinearity*, **25** (2), 449 – 479 (2012).
- [14] X. Wu, Z. Yin, “Well-posedness and global existence for the Novikov equation”, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5), **11** (3), 707 – 727 (2012).
- [15] L. Ni, Y. Zhou, “Well-posedness and persistence properties for the Novikov equation”, *J. Differential Equations*, **250** (7), 3002 – 3021 (2011).
- [16] W. Yan, Y. Li, Y. Zhang, “The Cauchy problem for the integrable Novikov equation”, *J. Differential Equations*, **253** (1), 298 – 318 (2012).
- [17] A. Himonas, J. Holmes, “Hölder continuity of the solution map for the Novikov equation”, *J. Math. Phys.*, **54** (6), 061501 (2013).

- [18] S. Lai, “Global weak solutions to the Novikov equation”, *J. Funct. Anal.*, **265** (4), 520 – 544 (2013).
- [19] S. Zhou, L. Yang, C. Mu, “Global dissipative solutions of the Novikov equation”, *Commun. Math. Sci.*, **16** (6), 1615 – 1633 (2018).
- [20] Z. Jiang, L. Ni, “Blow-up phenomenon for the integrable Novikov equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **385**(1), 551 – 558 (2012).
- [21] W. Yan, Y. Li, Y. Zhang, “The Cauchy problem for the Novikov equation”, *Nonlinear Differential Equations Appl.*, **20** (3), 1157 – 1169 (2013).
- [22] R. M. Chen, F. Guo, Y. Liu, C. Z. Qu, “Analysis on the blow-up of solutions to a class of integrable peakon equations”, *J. Funct. Anal.*, **270** (6), 2343 – 2374 (2016).
- [23] B. Fuchssteiner, “Some tricks from the symmetry-toolbox for nonlinear equations: generalizations of the Camassa-Holm equation”, *Phys. D*, **95** (3), 229 – 243 (1996).
- [24] P. J. Olver, P. Rosenau, “Tri-Hamiltonian duality between solitons and solitary-wave solutions having compact support”, *Phys. Rev. E*, **53**(2), 1900 – 1906 (1996).
- [25] Z. J. Qiao, “A new integrable equation with cuspons and W/M-shape-peaks solitons”, *J. Math. Phys.*, **47** (11), 112701 (2006).
- [26] A. A. Himonas, D. Mantzavinos, “The Cauchy problem for the Fokas-Olver-Rosenau-Qiao equation”, *Nonlinear Anal.*, **95**, 499 – 529 (2014).
- [27] J. M. Holmes, F. Tığlay, R. C. Thompson, “Continuity of the data-to-solution map for the FORQ equation in Besov spaces”, *Differential Integral Equations*, no. 5-6: 295 – 314 (2021).
- [28] A. Himonas, D. Mantzavinos, “Hölder continuity for the Fokas-Olver-Rosenau-Qiao equation”, *J. Nonlinear Sci.*, **24**(6), 1105 – 1124 (2014).
- [29] A. A. Himonas, C. Holliman, “Non-uniqueness for the Fokas-Olver-Rosenau-Qiao equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **470** (1), 647 – 658 (2019).
- [30] Q. Zhang, “Global well posedness of cubic Camassa-Holm equations”, *Nonlinear Anal.*, **133**, 61 – 73 (2016).
- [31] Y. Liu, P. Olver, C. Qu, S. Zhang, “On the blow-up of solutions to the integrable modified Camassa-Holm equation”, *Anal. Appl.*, **12** (4), 355 – 368 (2014).
- [32] R. M. Chen, Y. Liu, C. Qu, S. Zhang, “Oscillation-induced blow-up to the modified Camassa-Holm equation with linear dispersion”, *Adv. Math.*, **272**, 225 – 251 (2015).

Поступила 23 февраля 2025

После доработки 27 мая 2025

Принята к публикации 02 июня 2025