ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVI 1973 5

УДК 62—52 : 517.92

МЕХАНИКА

С. Т. Хачатрян

Об одной закономерности при асимптотическом расщеплении уравнений линейной системы автоматического управления

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 25/I 1973)

Рассматривается система уравнений, содержащая некоторый параметр ε, представленная в векторно-матричной записи в виде

$$L(\tau, \varepsilon)\frac{d^2q}{dt^2} + N(\tau, \varepsilon)q = h(t, \tau, \varepsilon), \tag{1.1}$$

где $\tau=\varepsilon t$—так называемое „медленное время", $h(t, \tau, \varepsilon)$—произвольная непрерывная вектор-функция, регулярная относительно ε в окрестности точки $\varepsilon=0$ а $L(\tau, \varepsilon)$, $N(\tau, \varepsilon)$—квадратные матрицы порядка m, допускающие разложение по степеням ε

$$L(\tau, \varepsilon)=\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k L_k(\tau); \qquad N(\tau, \varepsilon)=\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k N_k(\tau).$$

Пусть на сегменте, соответствующем для τ интервалу времени $[t_0, T]$, матрицы $L_k(\tau)$ и $N_k(\tau)$ имеют нужное число производных по τ, а $L_0(\tau)$, кроме того, является невырожденной матрицей.

Уравнения (1.1) могут быть представлены в нормальном виде следующим образом:

$$\frac{dx}{dt}=U(\tau)x+H(t, \tau, \varepsilon), \tag{1.2}$$

где

$$U(\tau)=\begin{pmatrix} 0; & -L_0(\tau)N_0(\tau) \\ E_m; & 0 \end{pmatrix}; \quad x=\begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ q \end{pmatrix}; \quad H(t, \tau, \varepsilon)=\begin{pmatrix} L_0^{-1}(\tau)h(t, \tau, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix},$$

а E_m—единичная матрица порядка m.

Пусть матрица $U(\tau)$ невырождена и имеет простую структуру. Тогда формальное решение (1.2), представляющее собой невырожденное преобразование

$$x = K^{(r)}(\tau, \varepsilon) y, \tag{1.3}$$

приведет уравнение (1.1) к виду

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda^{(r)}(\tau, \varepsilon) y + M^{(r)}(\tau, \varepsilon) T^{(r)}(\tau, \varepsilon) y + M^{(r)}(\tau, \varepsilon) H(t, \tau, \varepsilon), \tag{1.4}$$

где

$$M^{(r)}(\tau, \varepsilon) = K^{(r)-1}(\tau, \varepsilon)$$

$$T^{(r)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \frac{dK^{(r)}(\tau, \varepsilon)}{d\tau} - U(\tau) K^{(r)}(\tau, \varepsilon) + K^{(r)}(\tau, \varepsilon) \Lambda^{(r)}(\tau, \varepsilon). \tag{1.5}$$

Преобразование (1.4) можно построить таким образом, что матрица $\Lambda^{(r)}(\tau, \varepsilon)$ будет иметь диагональную структуру, а матрица $T^{(r)}(\tau, \varepsilon)$ будет удовлетворять условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T^{(r)}(\tau, \varepsilon)}{\varepsilon^r} = 0. \tag{1.6}$$

Построим $K^{(r)}(\tau, \varepsilon)$ и $\Lambda^{(r)}(\tau, \varepsilon)$ в форме конечных сумм

$$K^{(r)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k K^{[k]}(\tau), \tag{1.7}$$

$$\Lambda^{(r)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k \Lambda^{[k]}(\tau), \tag{1.8}$$

где

$$K^{[k]} = (K_1^{[k]}, \ldots, K_n^{[k]}), \quad \Lambda^{[k]} = \operatorname{diag}\{\lambda_1^{[k]}, \ldots, \lambda_n^{[k]}\}, \quad n = 2m.$$

2. В силу предположений, относительно матрицы U, существует невырожденная и дифференцируемая матрица K, преобразующая матрицу U к диагональному виду

$$MUK = \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\},$$

где $M = K^{-1}$, $n = 2m$.

Элементы диагональной матрицы Λ являются собственными значениями, а столбцы матрицы K—ее собственными векторами. Пусть K_σ — собственный вектор матрицы U, отвечающий собственному значению λ_σ ($\sigma = 1, \ldots, n$). Обозначим $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ собственные значения, а через $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$—соответствующие собственные векторы матрицы $L^{-1}N$. Обозначим $\mu = \varkappa^{-1}$ и представим $\varkappa$ и μ в виде блочных матриц

$$\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m), \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}.$$

Тогда из ([1]) соотношения между собственными значениями и собственными векторами матриц $L^{-1}N$ и U можно представить следующими формулами:

$$\lambda_\sigma = i\sqrt{|\gamma_j|}\left(\cos\frac{\arg\gamma_j}{2} + i\sin\frac{\arg\gamma_j}{2}\right), \tag{2.1}$$

$$\lambda_s = i\sqrt{|\gamma_j|}\left(\cos\frac{\arg\gamma_j + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\arg\gamma_j + 2\pi}{2}\right),$$

$$K_\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_\sigma \varkappa_j \\ \varkappa_j \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где

$$j = \begin{cases} \sigma & \text{при} \quad \sigma \leqslant m \\ \sigma - m & \text{при} \quad \sigma > m, \end{cases} \tag{2.3}$$

$j = 1, \ldots, m$; $\gamma_j \neq 0$, $i = \sqrt{-1}$ и если через Ω_σ и Ω_s обозначить соответственно области определения σ и s, то $\Omega_\sigma, \Omega_s \subset \{1, \ldots, n\}$ и $\Omega_\sigma \cap \Omega_s = \varnothing$.

Ниже везде при использовании индексов j и σ предполагается выполнение условия (2.3).

Из (2.1) следует, что если матрицу Λ представить в блочном виде

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2),$$

где Λ_1 и Λ_2—диагональные матрицы порядка m, то можно выбрать такое размещение собственных значений матрицы U в диагональной матрице Λ, при котором выполняется равенство

$$\Lambda_1 = -\Lambda_2. \tag{2.4}$$

При дальнейших преобразованиях предполагается выполнение (2.4). Из (2.2) следует:

$$K = \begin{pmatrix} \varkappa\Lambda_1 & \varkappa\Lambda_2 \\ \varkappa & \varkappa \end{pmatrix}; \qquad M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Lambda_1^{-1}\mu & \mu \\ \Lambda_2^{-1}\mu & \mu \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

3. При подстановке выражений $K_\sigma^{(r)}(\tau, \varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{r} \varepsilon^k K_\sigma^{[k]}(\tau)$ и $\lambda_\sigma^{(r)}(\tau, \varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{r} \varepsilon^k \lambda_\sigma^{[k]}(\tau)$ в (1.5) получаем:

$$T_\sigma^{(r)}(\tau, \varepsilon) = K_\sigma^{[0]}(\tau)\lambda_\sigma^{[0]}(\tau) + U(\tau)K_\sigma^{[0]}(\tau) + \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k \Big[K_\sigma^{[k]}(\tau)\lambda_\sigma^{[0]}(\tau) + K_\sigma^{[0]}(\tau)\lambda_\sigma^{[k]}(\tau) +$$

$$+ \frac{dK_\sigma^{[k-1]}(\tau)}{d\tau} - U(\tau)K_\sigma^{[k]}(\tau) + \sum_{\alpha=1}^{k-1} K_\sigma^{[k-\alpha]}(\tau)\lambda_\sigma^{[\alpha]}(\tau) \Big] + \varepsilon^{r+1} \Big[\frac{dK_\sigma^{[r]}(\tau)}{d\tau} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\beta=\nu}^{r} \varepsilon^{\nu-1} K_\sigma^{[r-\beta+\nu]}(\tau)\, \lambda_\sigma^{[\beta]}(\tau) \Big], \tag{3.1}$$

где

$$\sigma = 1, \ldots, n.$$

Следуя алгоритму, приведенному в ([2]), построим $K_\sigma^{[k]}(\tau)$ и $\lambda_\sigma^{[k]}(\tau)$ ($k = 0, 1, \ldots, r$) удовлетворяющими соотношениям

$$UK_\sigma^{[0]} = K_\sigma^{[0]}\lambda_\sigma^{[0]}, \tag{3.2}$$

$$UK_\vartheta^{[k]} = K_\vartheta^{[k]}\lambda_\vartheta^{[0]} + K_\vartheta^{[0]}\lambda_\vartheta^{[k]} + D_\vartheta^{[k-1]},$$

где

$$D_\vartheta^{[k-1]} = \sum_{\alpha=1}^{k-1} K_\vartheta^{[k-\alpha]}\lambda_\vartheta^{[\alpha]} + \frac{dK_\vartheta^{[k-1]}}{d\tau}; \quad K_\vartheta^{[0]} \equiv K_\vartheta; \quad \lambda_\vartheta^{[0]} \equiv \lambda_\vartheta. \tag{3.3}$$

Введем обозначение

$$Q_\vartheta^{[k]} = M\, K_\vartheta^{[k-1]}. \tag{3.4}$$

Матрицу $Q_\vartheta^{[k]}$, представляющую собой столбец из n элементов

$$Q_\vartheta^{[k]} = \begin{pmatrix} q_{1\vartheta}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{n\vartheta}^{[k]} \end{pmatrix},$$

где $q_{s\vartheta}^{[k]} = M_s K_\vartheta^{[k]}$, представим в виде

$$Q_\vartheta^{[k]} = \begin{pmatrix} Q_{1\vartheta}^{[k]} \\ Q_{2\vartheta}^{[k]} \end{pmatrix},$$

где

$$Q_{1\vartheta}^{[k]} = \begin{pmatrix} q_{1\vartheta}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{m\vartheta}^{[k]} \end{pmatrix}, \qquad Q_{2\vartheta}^{[k]} = \begin{pmatrix} q_{m+1,\vartheta}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{n\vartheta}^{[k]} \end{pmatrix}.$$

Используя (2.2), (2.4), (2.5), (3.1) ÷ (3.4), имеем:

$$K_\vartheta^{[k]} = \begin{pmatrix} \varkappa\Lambda_1 (Q_{1\vartheta}^{[k]} - Q_{2\vartheta}^{[k]}) \\ \varkappa (Q_{1\vartheta}^{[k]} + Q_{2\vartheta}^{[k]}) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$D_\vartheta^{[k-1]} = \begin{pmatrix} \dfrac{d\varkappa\Lambda_1 (Q_{1\vartheta}^{[k-1]} - Q_{2\vartheta}^{[k-1]})}{d\tau} + \varkappa\Lambda_1 \sum\limits_{\alpha=1}^{k-1} (Q_{1\vartheta}^{[k-\alpha]} - Q_{2\vartheta}^{[k-\alpha]})\lambda_\vartheta^{[\alpha]} \\ \dfrac{d\varkappa (Q_{1\vartheta}^{[k-1]} + Q_{2\vartheta}^{[k-1]})}{d\tau} + \varkappa \sum\limits_{\alpha=1}^{k-1} (Q_{1\vartheta}^{[k-\alpha]} + Q_{2\vartheta}^{[k-\alpha]})\lambda_\vartheta^{[\alpha]} \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$\lambda_\vartheta^{[k]} = -\frac{1}{2}\mu_j \left\{ \frac{1}{\lambda_\vartheta} \left| \frac{d\varkappa\Lambda_1 (Q_{1\vartheta}^{[k-1]} - Q_{2\vartheta}^{[k-1]})}{d\tau} + \varkappa\Lambda_1 \sum_{\alpha=1}^{k-1} (Q_{1\vartheta}^{[k-\alpha]} - Q_{2\vartheta}^{[k-\alpha]})\lambda_\vartheta^{[\alpha]} \right| + \right.$$
$$\left. + \frac{d\varkappa (Q_{1\vartheta}^{[k-1]} + Q_{2\vartheta}^{[k-1]})}{d\tau} + \varkappa \sum_{\alpha=1}^{k-1} (Q_{1\vartheta}^{[k-\alpha]} + Q_{2\vartheta}^{[k-\alpha]})\lambda_\vartheta^{[\alpha]} \right\}, \tag{3.7}$$

$$q_{s\vartheta}^{[k]} = \frac{1}{2(\lambda_s - \lambda_\vartheta)}\mu_i \left\{ \frac{1}{\lambda_s} \left| \frac{d\varkappa\Lambda_1 (Q_{1\vartheta}^{[k-1]} - Q_{2\vartheta}^{[k-1]})}{d\tau} + \varkappa\Lambda_1 \sum_{\alpha=1}^{k-1} (Q_{1\vartheta}^{[k-\alpha]} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - Q_{2\vartheta}^{[k-\alpha]})\lambda_\vartheta^{[\alpha]} \right| + \frac{d\varkappa (Q_{1\vartheta}^{[k-1]} + Q_{2\vartheta}^{[k-1]})}{d\tau} + \varkappa \sum_{\alpha=1}^{k-1} (Q_{1\vartheta}^{[k-\alpha]} + Q_{2\vartheta}^{[k-\alpha]})\lambda_\vartheta^{[\alpha]} \right\}, \tag{3.8}$$

где $$i = \begin{cases} s & \text{при } s \leq m \\ s-m & \text{при } s > m \end{cases}$$

и, наконец,

$$T_\vartheta^{(r)} = \varepsilon^{r+1} \begin{pmatrix} \dfrac{d\varkappa\Lambda_1 (Q_{1\vartheta}^{[r]} - Q_{2\vartheta}^{[r]})}{d\tau} + \varkappa\Lambda_1 \sum\limits_{\nu=1}^{r} \sum\limits_{\beta=\nu}^{r} \varepsilon^{\nu-1} (Q_{1\vartheta}^{[r-\beta+\nu]} - Q_{2\vartheta}^{[r-\beta+\nu]})\lambda_\vartheta^{[\beta]} \\ \dfrac{d\varkappa (Q_{1\vartheta}^{[r]} + Q_{2\vartheta}^{[r]})}{d\tau} + \varkappa \sum\limits_{\nu=1}^{r} \sum\limits_{\beta=\nu}^{r} \varepsilon^{\nu-1} (Q_{1\vartheta}^{[r-\beta+\nu]} + Q_{2\vartheta}^{[r-\beta+\nu]})\lambda_\vartheta^{[\beta]} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

формулы (3.5) ÷ (3.9) являются рекуррентными. С их помощью могут быть последовательно определены все члены конечного ряда (1.7) и (1.8), а, следовательно, и все переходные матрицы для приведения уравнений (1.1) к виду (1.4). Условие (1.6) при этом выполняется при ограниченности членов конечного ряда (1.7).

4. Закономерность построения членов конечного ряда (1.8) сформулируем следующим образом

Теорема. *Пусть уравнение (1.1) невырожденным преобразованием (1.3) приводится к виду (1.4), где* $\Lambda^{[r]}(\tau, \varepsilon)$ *имеет диагональную структуру, а* $T^{[r]}(\tau, \varepsilon)$ *удовлетворяет условию (1.6). Тогда для произвольного члена конечного ряда (1.8)* $\Lambda^{[k]}(\tau) = \mathrm{diag}\{\lambda_1^{[k]}(\tau), \ldots, \lambda_n^{[k]}(\tau)\}$ *любому элементу* $\lambda_\sigma^{[k]}(\tau)$ *соответствует такое* $\lambda_s^{[k]}(\tau)$, *что выполняется равенство*

$$\lambda_\sigma^{[k]}(\tau) = (-1)^{k+1}\lambda_s^{[k]}(\tau), \tag{4.1}$$

где $\sigma, s = 1, \ldots, n$; $s \neq \sigma$.

Доказательство. Представим матрицу $\Lambda^{[k]}(\tau)$ в блочном виде

$$\Lambda^{[k]}(\tau) = \mathrm{diag}\{\Lambda_1^{[k]}(\tau), \Lambda_2^{[k]}(\tau)\},$$

где

$$\Lambda_1^{[k]}(\tau) = \mathrm{diag}\{\lambda_1^{[k]}(\tau), \ldots, \lambda_j^{[k]}(\tau), \ldots, \lambda_m^{[k]}(\tau)\},$$

$$\Lambda_2^{[k]}(\tau) = \mathrm{diag}\{\lambda_{m+1}^{[k]}(\tau), \ldots, \lambda_{j+m}^{[k]}(\tau) \ldots, \lambda_n^{[k]}(\tau)\}.$$

Построив посредством (3,7) и (3,8) первые четыре члена разложения (1,8), легко видеть, что

$$\lambda_j^{[k]}(\tau) = (-1)^{k+1}\lambda_{j+m}^{[k]}(\tau),\ \Lambda_1^{[k]}(\tau) = (-1)^{k+1}\Lambda_2^{[k]}(\tau), \tag{4,2}$$

где $k = 0,1,2,3$; при условии, что произвольные диагональные элементы матрицы $Q^{[k]} = (Q_1^{[k]}, \ldots, Q_n^{[k]})$ выбраны удовлетворяющими равенству

$$q_{jj}^{[k]}(\tau) = (-1)^{k+1}q_{j+m,\,j+m}^{[k]}(\tau),$$

$j = 1, \ldots, m$.

Обобщая полученные результаты, для первых четырех членов разложения (1,8) могут быть установлены следующие закономерности. Для членов разложения при нулевой и четных степенях ε каждому из элементов соответствует другой — равный ему по модулю и обратный по знаку, а при нечетных степенях ε каждому из элементов соответствует равный ему другой. Размещение вышеуказанных пар элементов, при котором индексы при элементах каждой пары отличаются на m приводит к выполнению (4.2). При этом выражение $Q_{1\sigma}^{[k]}(\tau) - Q_{r\sigma}^{[k]}(\tau)$ для $k = 1,2$; при изменении индекса σ на m меняет знак, сохраняя по модулю свое значение, для четного k и не меняется при нечетном k. Для выражения $Q_{1\sigma}^{[k]}(\tau)+Q_{2\sigma}^{[k]}(\tau)$ для $k = 1,2$; наблюдается обратное. Пусть полученные условия выполняются для $k-1$-го члена разложения (1,8). Докажем, что те же закономерности наблюдаются при построении k-го члена разложения.

Рассмотрим два случая.

1. Допустим k — четное число.

Тогда выражение $Q_{1\nu}^{[k-1]}(\tau) - Q_{2\nu}^{[k-1]}(\tau)$ в (3,7) при изменении индекса ν на m не меняется, а выражение $Q_{1\nu}^{[k-1]}(\tau) + Q_{2\nu}^{[k-1]}(\tau)$ сохраняя свое значение по модулю, меняет знак на противоположный.

Выражение $\sum\limits_{\alpha=1}^{k-1}(Q_{1\nu}^{[k-\alpha]}(\tau) - Q_{2\nu}^{[k-\alpha]}(\tau))\,\Lambda_\nu^{[\alpha]}(\tau)$ в (3,7) не меняется при изменении индекса ν на m, поскольку для всех значений $\alpha = 1, \ldots, k-1$, выражения $Q_{1\nu}^{[k-\alpha]}(\tau) - Q_{2\nu}^{[k-\alpha]}(\tau)$ и $\Lambda_\nu^{[\alpha]}(\tau)$, сохраняя свои значения по модулю, либо одновременно меняют знак, либо остаются без изменений.

Из аналогичных соображений следует, что выражение $\sum\limits_{\alpha=1}^{k-1}(Q_{1\nu}^{[k-\alpha]}(\tau) + Q_{2\nu}^{[k-\alpha]}(\tau))\,\Lambda_\nu^{[\alpha]}(\tau)$ в (3,7) сохраняя свое значение по модулю, меняет знак на противоположный при изменении индекса ν на m. Следовательно, для четных k при изменении индекса ν на m выражение $\Lambda_\nu^{[k]}(\tau)$ из (3,7) сохраняя свое значение по модулю, меняет знак на противоположный.

2. Допустим k — нечетное число.

Рассуждения совершенно аналогичные случаю 1° приводят к следующему выводу: для нечетных k выражение $\Lambda_\nu^{[k]}(\tau)$ из (3,7) не меняется при изменении индекса ν на m.

Таким образом доказано, что для всех $k = 0, 1, \ldots, r$

$$\Lambda_j^{[k]}(\tau) = (-1)^{k+1}\Lambda_{j+m}^{[k]}(\tau) \tag{4,3}$$

а, следовательно,

$$\Lambda_1^{[k]}(\tau) = (-1)^{k+1}\Lambda_2^{[k]}(\tau). \tag{4,4}$$

Очевидно, что использование размещения элементов диагональной матрицы $\Lambda^{[k]}(\tau)$ при котором выполняются условия (4,3) и (4,4), не является необходимым, а только существенно сокращает схему расчета членов разложения (1,8) и совершенно не влияет на общность условия (4,1) и формулировки теоремы. Теорема доказана

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ս. Ի. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ավտոմատիկ ղեկավարման սխեմի հավասարումների ասիմպտոտիկ մասնատման մի օրինաչափության մասին

Հոդվածում դիտարկվում է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներով նկարագրվող ավտոմատիկ ղեկավարման ոչ ստացիոնար սխեմ, երբ

դիսիպատիվ ուժերը բացակայում են, հավասարումների գործակիցները դանդաղ փոփոխվող են, և նրանց գծային մասի մատրիցան ունի պարզ կառուցվածք։ Այդ հավասարումներին համապատասխանող, նորմալ տեսքի բերված առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի ասիմպտոտիկ մասնատման համար, բերվում է մի մեթոդ, որում օգտագործելով ([2]) աշխատությունում ստացված որոշ արդյունքներ, այդ մասնատման հետ կապված հաշվարկները զգալիորեն կրճատվում են։ Ըստ այդ մեթոդի, երկրորդ կարգի հավասարումների գծային մասի մատրիցային համապատասխանող սեփական արժեքների և սեփական վեկտորների միջոցով կառուցվում են ռեկուրենտ բանաձևեր, որոնց օգնությամբ հաջորդաբար որոշվում են մասնատված տեսքի բերման համար պահանջվող բոլոր մատրիցաները։ Այս մատրիցաներին համապատասխանող վերջավոր շարքերի բոլոր անդամներն ստացվում են կրկնակի անգամ փոքր կարգի մատրիցաների միջոցով, ի տարբերություն նույն նպատակի համար հավասարումների սիստեմի նորմալ տեսքին համապատասխանող գծային մասի մատրիցայի կիրառմանը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. А. Абгарян*, Матрицы и дифференциальные уравнения (Пособие для аспирантов), М., 1971. [2] *К. А. Абгарян*, ДАН СССР, т. 166, № 2, (1966).