

УДК 539.3

МЕХАНИКА

М. В. Белубекян

Условия отсутствия электрического заряда в задачах
 электро-магнитоупругости

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 16/1 1973)

Показывается существование широкого класса задач электро-магнитоупругости пластин и оболочек с начальными условиями, достаточными для отсутствия электрического заряда.

1. Задачи электро-магнитоупругости сводятся к совместному решению уравнений Максвелла для движущейся проводящей среды, уравнений движения упругой среды с учетом сил и моментов электромагнитного происхождения и уравнений Максвелла для среды, окружающей упругое тело (в частности, для вакуума). Указанные уравнения связаны общими граничными условиями на поверхности раздела двух сред (1).

Уравнения Максвелла для движущейся проводящей среды имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (1.4)$$

Здесь \vec{E} и \vec{H} — соответственно векторы напряженностей электрического и магнитного полей, \vec{D} и \vec{B} — векторы электрической и магнитной индукции, \vec{j} — плотность тока, ρ — плотность электрического заряда, c — скорость света в вакууме.

Из рассмотрения процессов поляризации и возникновения токов следует, что между векторами \vec{H} и \vec{B} , между векторами \vec{E} и \vec{D} , а также векторами \vec{j} , \vec{E} , \vec{B} и вектором скорости перемещений частиц

среды v должны существовать функциональные связи (2).

Для сред, однородных и изотропных в отношении электромагнитных свойств и квазистационарных полей, эти связи имеют вид:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (1.5)$$

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (1.6)$$

где ϵ , μ , σ — постоянные величины, ϵ и μ — соответственно электрическая и магнитная проницаемости, σ — электропроводность среды.

Если учесть также наличие уравнений движения упругой среды, то получается, что из пяти векторов \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} и \vec{j} только два независимы, за них принимают обычно векторы \vec{E} и \vec{H} .

По существу уравнения (1.1), (1.2) совместно с уравнениями движения упругой среды, уравнениями Максвелла вне упругой среды и указанными функциональными связями образуют полную систему уравнений электро-магнитоупругости. Уравнения же (1.3) и (1.4), являясь следствием закона сохранения электрического заряда и отсутствия магнитного заряда, выражают ограничения на возможные распределения электромагнитного поля в пространстве, что должно быть учтено при задании начальных условий. Кроме того, уравнение (1.3) служит для определения плотности заряда ρ .

Следует отметить, что при решении конкретных задач уравнение (1.4) может быть использовано вместо какого-либо более сложного уравнения из (1.2), вследствие чего во многих случаях решение задачи значительно упрощается.

Для такой же цели может послужить и уравнение (1.3), если заранее известно, что в начальный момент и в течение рассматриваемого интервала времени плотность заряда равна нулю. С этой точки зрения и представляет интерес рассмотрение условий, при которых плотность зарядов равна нулю.

Если в начальный момент времени плотность электрических зарядов равна нулю, то условие

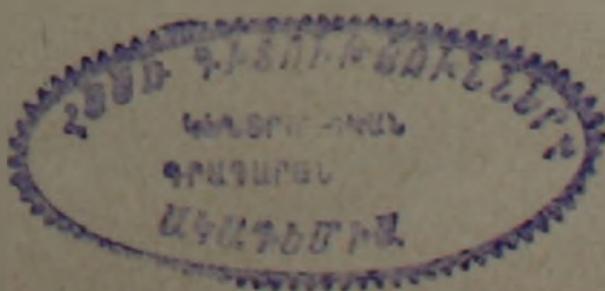
$$\operatorname{div} (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (1.7)$$

является необходимым и достаточным для отсутствия зарядов в рассматриваемом интервале времени. Доказательство этого утверждения следует из уравнения (1.3), из соотношения (1.6) и из закона сохранения электрического заряда.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

2. В случае линейной теории электромагнитоупругости условие отсутствия электрического заряда (1.7) запишется в виде

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \times \vec{B}_0 \right) = 0, \quad (2.1)$$



где \vec{u} — вектор перемещения частиц среды, \vec{B}_0 — начальное значение вектора магнитной индукции. Заметим, что условие (2.1) эквивалентно условию

$$\vec{B}_0 \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}_0 = 0, \quad (2.2)$$

Предполагая в начальный момент времени отсутствие электрического заряда, рассмотрим задачи электро-магнитоупругости, для которых выполнение условия (2.1) можно предсказать заранее без решения соответствующих уравнений задачи.

а) Из условия (2.2) вытекает, что при условии $\operatorname{rot} \vec{B}_0 = 0$ (в частности, если начальное магнитное поле постоянно), если движение среды потенциальное, то условие отсутствия электрического заряда выполняется.

б) Предположим, что магнитное поле в начальный момент таково, что $\operatorname{rot} \vec{B}_0 = 0$. Тогда условие (2.2) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[B_{0x} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + B_{0y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + B_{0z} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] = 0,$$

где x, y, z — координаты в декартовой системе координат.

Для выполнения этого условия достаточно, чтобы выполнялись условия

$$B_{0k} = 0, \quad u_k = 0 \quad (k = x, y, z). \quad (2.3)$$

и чтобы остальные компоненты вектора индукции начального магнитного поля и вектора перемещения частиц не зависели бы от координаты k . Такие задачи можно назвать условно плоскими задачами электро-магнитоупругости.

в) Как показано в работе (3) в задачах магнитоупругих колебаний тонкой пластинки справедлива гипотеза Кирхгофа, т. е.

$$u_x = -z \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad u_z = \omega(x, y, t). \quad (2.4)$$

Здесь срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью xu .

Предполагая $\operatorname{rot} \vec{B}_0 = 0$ и принимая соотношения (2.4), условие (2.2) преобразуем и приводим к виду

$$B_{0x} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial y} - B_{0y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial x} = 0, \quad (2.5)$$

Отсюда получается новое условие отсутствия электрического заряда

$$B_{0x} = B_{0y} = 0, \quad (2.6)$$

т. е. магнитное поле должно быть перпендикулярным срединной поверхности пластинки.

д) Рассмотрим магнитоупругие колебания тонкой пластинки в

случае, когда начальное магнитное поле меняется по толщине пластинки — $\vec{B}_0 = \vec{B}_0(z)$. Такие задачи встречаются часто при наличии отличного от нуля электрического поля.

Условие (2.2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \left(z \frac{dB_{0y}}{dz} + 2B_{0y} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} \left(z \frac{dB_{0x}}{dz} + 2B_{0x} \right) = 0.$$

Для выполнения этого условия достаточно, чтобы

$$B_{0x} = C_1 z^{-2}, \quad B_{0y} = C_2 z^{-2}.$$

Однако, если $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, такое распределение магнитного поля поперек пластинки невозможно, так как $z=0$ — соответствует средней плоскости пластинки. Имея в виду также, что начальное магнитное поле должно удовлетворять уравнению (1.4), искомое достаточное условие отсутствия заряда примет вид

$$B_{0x} = B_{0y} = 0, \quad B_{0z} = \text{const.}$$

Очевидно, что последнее условие является частным случаем условий (2.6).

Аналогично новые условия не получаются также в случаях, когда начальное магнитное поле является функцией либо одной координаты x , либо одной координаты y .

Наконец отметим, что в задачах электро-магнитоупругости тонких оболочек условия типа (2.6) не являются достаточными для отсутствия электрических зарядов.

Таким образом, основными достаточными условиями отсутствия зарядов в задачах электро-магнитоупругости пластин и оболочек следует считать условия, приведенные в случаях б) и в). Они охватывают достаточно широкий класс задач и их выполнение легко проверяется для конкретно поставленной задачи.

Институт механики

Академии наук Армянской ССР

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

էլեկտրական լիցքի բացակայության պայմանները
էլեկտրա-մագնիսաառաձգականության խնդիրներում

Հայտնի է, որ էլեկտրական լիցքի բացակայությունը շատ դեպքերում
հեշտացնում է էլեկտրա-մագնիսաառաձգականության խնդիրների ուսումնա-
սիրումը:

Ծննելով էլեկտրական լիցքի բացակայության անհրաժեշտ և բավարար
պայմանից, ստացված են էլեկտրական լիցքի բացակայության բավարար

պայմաններ, որոնք կարելի է ստուգել, շուծելով դժային էլեկտրա-մադնի-սաառաձգականության խնդիրները:

Այսպես՝

Եթե սկզբնական պահին էլեկտրական լիցքը բացակայում է, ապա որ-պեսզի այն բացակայի նաև հետագայում, բավարար է, որ սկզբնական մադ-նիսական դաշտի լարվածության և միջավայրի մասնիկների առաձգական տեղափոխման վեկտորները լինեն զուգահեռ միևնույն հարթությանը և կախ-ված չլինեն հարթությանն ուղղահայաց ուղղությունից:

Մագնիսաառաձգական բարակ սալերի տատանման խնդիրների համար, բացի նշված դեպքից, տեղի ունի նաև հետևյալը՝

Եթե սկզբնական պահին էլեկտրական լիցքը բացակայում է, ապա որ-պեսզի այն բացակայի նաև հետագայում, բավարար է, որ սկզբնական մադ-նիսական դաշտի լարվածության վեկտորը լինի ուղղահայաց սալի միջին մակերևույթին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. И. Седов, Механика сплошных сред, т. I, М., Изд. «Наука», 1970. ² Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
³ С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, ПММ, т. 35, вып. 2 (1971).