ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVI 1973 5

МАТЕМАТИКА

УДК 513.838

А. В. Чакмазян

О плоскостной три-ткани в проективном пространстве

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 21/II 1973)

1. Вопросы общей теории три-ткани многомерных поверхностей рассматривались в работе М. А. Акивиса [1]. Представляет интерес изучение различных частных типов три-тканей, а также моделей этих тканей. В настоящей работе изучается три-ткань, образованная тремя r-параметрическими семействами r-мерных плоскостей в проективном пространстве P_{2r} размерности $2r$ при $r > 2$.

При изучении этой три-ткани мы будем пользоваться проективным подвижным репером, состоящим из точек A_α ($\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \ldots, 2r$) находящихся в общем положении. Уравнения инфинитезимального перемещения этого репера записываются в виде

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1}$$

где формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства.

$$d\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha. \tag{2}$$

2. Пусть A общая точка рассматриваемой три-ткани и E_r^1, E_r^2, E_r^3 — три r-мерные плоскости ткани, проходящие через эту точку. Совместим с точкой A точку A_0 подвижного репера, точки A_{r+i} ($i, j, k = 1, 2, \cdots r$) поместим в плоскости E_r^1 первого семейства, точки A_i — в плоскости E_r^2 второго и выберем эти точки так, чтобы точки $A_i - A_{r+i}$ лежали в плоскости E_r^3 третьего семейства.

Так как точка A_0 описывает $2r$-мерную область пространства P_{2r}, то формы Пфаффи ω_0^i, ω_0^{r+i} определяющие ее перемещение, будут линейно независимыми.

Условие неподвижности плоскости E_r^1 запишется в виде $\omega_0^i = 0$, $\omega_{i+r}^j = 0$. Так как первое семейство плоскостей зависит от r параметров, то на нем формы ω_{i+r}^j должны выражаться через r линейно независимые базисные формы $\omega_0^j \operatorname{def} \omega^j$. Поэтому дифференциальные уравнения рассматриваемого семейства плоскостей запишутся в виде

$$\omega_{j+r}^{i} = \lambda_{jk}^{i}\,\omega^{k} \tag{3}$$

Аналогично мы можем получить дифференциальные уравнения семейства плоскостей E_r^2 и E_r^3. Эти уравнения будут иметь соответственно вид

$$\omega_j^{i+r} = -\mu_{jk}^{i}\omega^{k+r}, \tag{4}$$

$$\omega_j^i - \omega_{j+r}^i + \omega_j^{i+r} - \omega_{j+r}^{i+r} = \nu_{jk}^i(\omega^k + \omega^{k+r}), \tag{5}$$

где

$$\omega_0^{k+r} \overset{\text{def}}{=} \omega^{k+r}.$$

3. Выясним геометрический смысл объектов λ_{jk}^i, μ_{jk}^i и ν_{jk}^i. Для этого определим фокальные образы семейства плоскостей, образующих три-ткань. Пусть A точка, принадлежащая E_r^1, тогда

$$A = x^0 A_0 + x^{i+r} A_{i+r}.$$

Дифференцируя это выражение, и имея в виду (1), получим

$$dA = (dx^0 + x^0\omega_0^0 + x^{i+r}\omega_{i+r}^0)A_0 + (dx^{j+r} + x^0\omega^{j+r} +$$

$$+ x^{i+r}\omega_{i+r}^{j+r})A_{j+r} + A_j(x^0\omega^j + x^{i+r}\omega_{i+r}^j) \tag{6}$$

Будем искать фокусы плоскости E_r^1, то есть точки, дифференциалы которых хотя бы для одного значения форм ω^i принадлежат E_r^1. Для этого, как это следует из (6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(x^0\delta_k^j + x^{i+r}\lambda_{ik}^j)\omega^k = 0.$$

Имеем r уравнений относительно r переменных ω^k, для получения нетривиального решения этой системы необходимо, чтобы

$$Det\,(x^0\delta_k^j + x^{i+r}\lambda_{ik}^j) = 0.$$

Это уравнение определяет в плоскости E_r^1 фокусную поверхность. Она будет алгебраической поверхностью порядка r размерности $(r-1)$. Аналогично мы можем получить уравнения фокусных поверхностей для плоскостей E_r^2 и E_r^3. Эти уравнения соответственно запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} Det(x^0\delta_k^j - x^i\mu_{ik}^j) = 0 \\ Det(x^0\delta_k^j + x^i\nu_{ik}^j) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Таким образом геометрические объекты λ_{jk}^i, μ_{jk}^i, ν_{jk}^i определяют фокусные поверхности на плоскостях ткани.

4. Найдем теперь тензор кручения нашей три-ткани. Уравнения (5) в силу (3) и (4) примут вид

$$\omega_j^i - (\lambda_{jk}^i + \nu_{jk}^i)\omega^k = \omega_{j+r}^{i+r} + (\mu_{jk}^i + \nu_{jk}^i)\omega^{k+r}.$$

Теперь, вводя новые дифференциальные формы $\tilde{\Theta}^i_j$, мы можем предыдущие уравнения записать следующим образом

$$\left.\begin{aligned}\omega^i_j &= \tilde{\Theta}^i_j + (\lambda^i_{jk} + \nu^i_{jk})\omega^k \\ \omega^{i+r}_{j+r} &= \tilde{\Theta}^i_j - (\mu^i_{jk} + \nu^i_{jk})\omega^{k+2}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из структурных уравнений (2) получим

$$d\omega^i = \omega^0_0\wedge\omega^i + \omega^j\wedge\omega^i_j + \omega^{j+r}\wedge\omega^i_{j+r}$$

$$d\omega^{i+r} = \omega^0_0\wedge\omega^{i+r} + \omega^j\wedge\omega^{i+r}_j + \omega^{j+r}\wedge\omega^{i+r}_{j+r}.$$

В силу соотношений (3), (4) и (8) эти уравнения примут следующий вид

$$d\omega^i = \omega^j\wedge(\tilde{\Theta}^i_j - \delta^i_j\omega^0_0 - \lambda^i_{kj}\omega^{k+r}) + (\lambda^i_{jk} + \nu^i_{jk})\omega^j\wedge\omega^k$$

$$d\omega^{i+r} = \omega^{j+r}\wedge(\tilde{\Theta}^i_j - \delta^i_j\omega^0_0 + \mu^i_{kj}\omega^k) - (\mu^i_{jk} + \nu^i_{jk})\omega^{j+r}\wedge\omega^{k+r}.$$

Если теперь ввести новые формы

$$\Theta^i_j = \tilde{\Theta}^i_j - \delta^i_j\omega^0_0 - \lambda^i_{kj}\omega^{k+r} + \mu^i_{kj}\omega^k, \tag{9}$$

то предыдущие уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned}d\omega^i &= \omega^j\wedge\Theta^i_j + a^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k \\ d\omega^{i+r} &= \omega^{j+r}\wedge\Theta^i_j - a^i_{jk}\omega^{j+r}\wedge\omega^{k+r}\end{aligned}\right| \tag{10}$$

где

$$a^i_{jk} = \lambda^i_{[jk]} + \mu^i_{[jk]} + \nu^i_{[jk]} \tag{11}$$

—тензор кручения три-ткани, являющийся кососимметричным тензором. Формы Θ^i_j, будет определять аффинную связность на ткани. Имея в виду (9) соотношения (8) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}\omega^i_j &= \Theta^i_j + \delta^i_j\omega^0_0 + (\lambda^i_{jk} + \nu^i_{jk} - \mu^i_{kj})\omega^k + \lambda^i_{kj}\omega^{k+r} \\ \omega^{i+r}_{j+r} &= \Theta^i_j + \delta^i_j\omega^0_0 - (\mu^i_{jk} + \nu^i_{jk} - \lambda^i_{kj})\omega^{k+r} - \mu^i_{kj}\omega^k\end{aligned}\right| \tag{12}$$

5. Предположим теперь, что второе семейство r-плоскостей рассматриваемой три-ткани образует связку с $(r-1)$-мерной осью E^2_{r-1}. Точка A_0 не принадлежит плоскости E^2_{r-1}, т. к. эта плоскость лежит вне области ткани. Обозначим через M_i точки пересечения прямых A_0A_i с плоскостью E^2_{r-1}. Эти точки можно представить в виде

$$M_i = A_i + \mu_i A_0. \tag{13}$$

Так как плоскость E^2_{r-1} неподвижна, то должны иметь место соотношения

$$dM_i = \varphi_i^j M_j. \tag{14}$$

Но дифференцируя соотношение (13), мы получим

$$dM_i = \Delta\mu_i A_0 + (\omega_i^j + \mu_i \omega^j) M_j + (\omega_i^{r+j} + \mu_i \omega^{r+j}) A_{r+j}, \tag{15}$$

где

$$\Delta\mu_i = d\mu_i - \mu_j \omega_i^j + \mu_i \omega_0^0 + \omega_i^0 - \mu_i \mu_j \omega^j.$$

В силу условия неподвижности (14) плоскости E^2_{r-1}, отсюда следует, что

$$\Delta\mu_i = 0, \quad \omega_i^{r+j} = -\mu_i \omega^{r+j}. \tag{16}$$

Сравнивая последнее соотношение с формулами (4), мы найдем, что на рассматриваемом семействе плоскостей

$$\mu^i_{jk} = \mu_j \delta^i_k. \tag{17}$$

Формулы (7) показывают теперь, что фокусные поверхности плоскостей E^2_r становятся r-кратными плоскостями, совпадающими с E^2_{r-1}.

Докажем далее, что и обратно, если объект μ^i_{jk} имеет строение (16), то второе семейство плоскостей ткани представляет собой связку с $(r-1)$-мерной осью. В самом деле, дифференцируя внешним образом вторую группу из уравнений (16), равносильную соотношениям (17), получим

$$\Delta\mu_i \wedge \omega^{j+r} = 0.$$

Так как $r > 2$, то из этих уравнений следует, что

$$\Delta\mu_i = 0,$$

в силу чего соотношения (15) совпадают с (14) и плоскость $[M_1 M_2 \ldots M_r]$ неподвижна.

Аналогично получим, что условия

$$\lambda^i_{jk} = \lambda_j \delta^i_k, \qquad \nu^i_{jk} = \nu_j \delta^i_k$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы первое и третье семейства r-плоскостей, образующих три-ткань, вырождались в связки плоскостей с $(r-1)$-мерными осями. Фокусные поверхности этих семейств плоскостей также будут r-кратными $(r-1)$-плоскостям, совпадающими с осями связок.

Если теперь поместить точки A_i и A_{i+r} в осевые плоскости первого и второго семейства плоскостей три-ткани, то мы получим $\lambda_i = \mu_i = 0$ и поэтому соотношения (3), (4) и (5) примут соответственно вид

$$\left.\begin{aligned} &\omega^i_{j+r} = 0, \qquad \omega^{i+r}_j = 0 \\ &\omega^i_j - \omega^{i+r}_{j+r} = \nu_j(\omega^i + \omega^{i+r}) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Из формулы (11) и (12) следует, что

$$a^i_{jk} = \nu_{(j}\delta^i_{k)} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega^i_j &= \Theta^i_j + \delta^i_j\omega^0_0 + \nu_j\omega^i \\ \omega^{i+r}_{j+r} &= \Theta^i_j + \delta^i_j\omega^0_0 - \nu_j\omega^{i+r} \end{aligned}\right| \tag{21}$$

Продолжая уравнения (19), получим

$$\omega^0_{j+r} = 0, \quad \omega^0_j = 0, \quad \nabla\nu_j = 0,$$

где

$$\nabla\nu_j = d\nu_j - \nu_k\Theta^k_j$$

Дифференцируя внешним образом соотношения (21), будем иметь:

$$d\Theta^i_j - \Theta^k_j \wedge \Theta^i_k = 0.$$

Это означает, что тензор кривизны ткани равен нулю, т. е. связность присоединенной к три-ткани будет евклидовой. Значит ([2]) на ней замыкаются фигуры Рейдеместера, а все ее координатные квазигруппы будут группами со следующей структурой:

$$d\omega^i = \nu_j\,\omega^j \wedge \omega^i.$$

Если $\nu_i = 0$, то тензор кручения рассматриваемой ткани также будет равен нулю. Тогда наша ткань будет паралелизуемой ([1]). В этом случае оси всех трех связок плоскостей, образующих три-ткань, лежат в одной гиперплоскости пространства P_{2r}. Легко видеть, что справедливо и обратное предложение.

Выражаю искреннюю благодарность М. А. Акивису за постановку задачи и полезные замечания.

Ереванский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Ս. Վ. ՉԱՔՄԱԶՅԱՆ

Հարթություններից կազմված եռ հյուսվածքը պրոյեկտիվ տարածությունում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է r—պարամետրից կախված r—չափանի հարթություններից կազմված եռ հյուսվածքը $2r$—չափանի պրոյեկտիվ տարածությունում։ Ստացված է եռ հյուսվածքի հիմնական հավասարումները հետևյալ տեսքով՝

$$\omega^i_{j+r} = \lambda^i_{jk}\omega^k, \qquad \omega^{i+r}_j = -\mu^i_{jk}\omega^{k+r}$$

$$\omega^i_j - \omega^{i+r}_{j+r} + \omega^{i+r}_j - \omega^i_{j+r} = \nu^i_{jk}(\omega^k + \omega^{k+r})$$

λ^i_{jk}, μ^i_{jk}, ν^i_{jk} *երկրաչափական օբյեկտներն որոշում են ֆոկալ մակերևույթները*

հարթությունների ընտանիքի, որոնք կազմում են եռ հյուսվածքը։ Դիտարկվող եռ հյուսվածքն ինդուցում է այդ պրոյեկտիվ տարածության մեջ աֆինական կապակցություն, որի համար հյուսվածքի հարթությունները կլինեն լրիվ գեոդեզիական մակերևույթներ։ Այդ կապակցությամբ ոլորման տենզորն արտահայտվում է λ^i_{jk}, μ^i_{jk}, ν^i_{jk} երկրաչափական օբյեկտներով։ Դիտարկվում է դեպք, երբ այդ եռ հյուսվածքի հարթությունները կազմում են խուրձ $(r-1)$—առանցքներով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. А. Акивис*, Тр. геометрического семинара, т. II, ВИНИТИ, стр. 7—31, 1969.
[2] *М. А. Акивис, А. М. Шелехов*, Сиб. мат. ж., XII, № 5, стр. 953—960 (1971).