ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LVI 1973 5

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

К. М. Мосесян

Насыщенные графы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/XII 1972)

В настоящей статье мы придерживаемся терминологии, принятой в ([1]). Под словом „граф“ всюду будем понимать конечный граф.

Неориентированный граф, который можно ориентировать так, чтобы он стал базисным графом некоторого орграфа (в частности, графа частичного упорядочения), назовем базируемым (соответственно сильно базируемым), а соответствующую ориентацию—базирующей (сильно базирующей). Через B (соответственно S) обозначим класс базируемых (сильно базируемых) графов, а через $B(L)(S(L))$ — множество базирующих (сильно базирующих) ориентаций графа L.

В монографии ([2]) поставлены следующие задачи: описать класс базируемых (гл. 8, п. 4, проблема 1) и сильно базируемых (гл. 9, п. 1) графов.

Будем говорить, что в орграфе $\vec{L}=(X, \vec{U})$ вершина b достижима из вершины a, если в $\vec{L}$ существует путь из a в b. Множество вершин орграфа $\vec{L}=(X, \vec{U})$, достижимых из вершины a, обозначим через $D(a)$.

Будем говорить, что в орграфе $\vec{L}=(X, \vec{U})$ вершина b почти достижима из вершины a, если существует дуга $\vec{u}=\vec{cd}$ $(\vec{u} \in \vec{U})$, после переориентации которой найдется простой путь из a в b, проходящий через $\vec{dc}$. Множество вершин орграфа $L=(X, \vec{U})$, почти достижимых из вершины a, обозначим через $\bar{D}(a)$.

Орграф $\vec{L}=(X, \vec{U})$ называется бисвязным, если $a \in D(b)$ для любых $a, b \in X$.

Граф $L=(X, U)$ называется насыщенным, если он базируем, и при всякой базирующей ориентации превращается в бисвязный орграф. Через P обозначим класс насыщенных графов, через Λ_q—класс графов, не имеющих циклов длины менее q, через F_i — i — вершинный полный граф, а через C_i — простой цикл длины i (по определению $C_0=F_1$). Ясно, что C_0, C_2, $C_3 \in P$, $C_1 \notin P$.

Стягиванием части $H=(Z, V)$ графа $L=(X, U)$ называется (см. ([3])) процесс, при котором все ребра из V опускаются, вершины из Z отождествляются и оставшиеся ребра из U, инцидентные вершинам из Z, становятся инцидентными вершине, получившейся в результате отождествления вершин Z. В частности, если существует ребро $u=xy \in U/V$, $x, y \in Z$, то в результате стягивания образуется петля. В случае, если $H=C_3$ ($H=C_2$), этот процесс назовем элементарным стягиванием I (II) рода.

Через $\exists_{I, II}(L \Rightarrow H)$ (соответственно $\forall_{I, II}(L \Rightarrow H)$) обозначим высказывание, что существует последовательность элементарных стягиваний I и II рода, переводящая L в H (соответственно, что всякую последовательность элементарных стягиваний I и II рода можно дополнить такими же элементарными стягиваниями до последовательности, переводящей L в H); желая подчеркнуть, например, что последовательности состоят только из стягиваний первого рода, будем вместо $\exists_{I, II}$ и $\forall_{I, II}$ писать соответственно $\exists_I$ и $\forall_I$.

$L(X_0)$ обозначает подграф графа $L=(X, U)$, порожденный множеством вершин $X_0 \subseteq X$, L/H — граф, получающийся в результате стягивания части H графа L, $\rho(x)$ — число ребер, инцидентных вершине x.

Так же, как теорема 2 из ([1]) доказывается

Предложение I. Для базируемости графа $L=(X, U)$ необходимо и достаточно, чтобы после стягивания всех максимальных насыщенных частей получался сильно базируемый граф.

Из-за отсутствия описания насыщенных графов было затруднительно пользоваться предложением I для практической проверки графов на базируемость. В работе ([4]) доказано, что для графов из Λ_1 подклассы базируемых и сильно базируемых графов совпадают. В настоящей работе описывается класс насыщенных графов и дается алгорифм для определения базируемости графов, не входящих в Λ_1.

Будем говорить, что граф $L=(X, U)$ получается из графа $L_1 = (X_1, U_1)$ посредством соединения пары вершин $x_1, y_1 \in X_1$ квазицепью длины n, если L состоит из L_1 и из подграфов $L_i=(X_i, U_i) \in P$, попарно не имеющих общих вершин при $i=2, \ldots, n+2$, причем графы L_i и L_{i+1} $(2 \leq i \leq n+1)$ соединены ребром $x_i y_{i+1}$, $(x_i \in X_i,\ y_{i+1} \in X_{i+1})$, а граф L_2 (соответственно L_{n+2}) имеет с L_1 общую вершину $y_1 \in X_1$ (соответственно $x_1 \in X_1$). Назовем $x_i y_{i+1}$ $(i=2, \cdots, n+1)$ квазиребрами, а L_i $(i=2, \cdots, n+2)$ — квазивершинами этой квазицепи. Если, кроме этого, $L_1 \in P$, то граф L назовем квазициклом длины n.

Пусть M обозначает класс 2-связных ([1]) графов, $M(L)$ — множество 2-компонент ([1]) графа L, $K(L)$ — множество блоков ([1]) графа L, Q_n — класс квазициклов длины n, $n(L), m(L), \gamma(L), \chi(L)$ соответственно обозначают количества вершин, ребер, хроматическое число и число компонент связности графа L, Y_2 — класс удвоенных деревьев, то есть графов, получающихся из дерева дублированием всех ребер.

Известны следующие результаты (см. ([4])).

Предложение 2. Стягивание бисвязного подграфа в базируемо ориентированном графе приводит к базируемо ориентированному графу.

Предложение 3. $S = B \cap \Lambda_4$.

Предложение 4. $(L \in S/\{F_2\})\ \&\ (m(L) > 0) \Rightarrow |S(L)| \geq 2\gamma(L)$..

Можно показать, что справедлива

Лемма 1. $B \cap (Q_2 \cup Q_3) \subset P$.

Теорема 1. *Следующие высказывания равносильны друг другу:*

(1) $L = (X, U) \in P$

(2) $(\forall H \in K(L) H \in P)\ \&\ (\chi(L) = 1)$

(3) $L \in B\ \&\ \forall_{I,\,II}\ (L \Rightarrow F_1)$

(4) $L \in B\ \&\ \exists_{I,\,II}\ (L \Rightarrow F_1)$

(5) $L \in (B \cap (Q_2 \cup Q_3)) \cup \{F_1\}$

(6) $(L = F_1)\ V\ ((\chi(L) = 1)\ \&\ (|M(L)| = \log_2 |B(L)|))$

(7) $L \in B\ \&\ \forall_I\ (L \Rightarrow H \in Y_2)$

(8) $L \in B\ \&\ \exists H \in Y_2\ \exists_I\ (L \Rightarrow H)$

(9) $L \in B\ \&\ \forall H \in P\ ((H \subseteq L) \Rightarrow ((L/H) \in P))$

(10) $L \in B\ \&\ \exists H \in P\ ((H \subseteq L \Rightarrow)((L/H) \in P))$.

Доказательство теоремы 1 проводится в следующем плане: устанавливаются некоторые равносильности и, опираясь на них, получаются некоторые промежуточные теоремы, позволяющие доказать остальные равносильности.

(1)$\Leftrightarrow$(2). Очевидно.

(1) $\Rightarrow$ 3). Допустим, что при каком-нибудь порядке элементарных стягиваний графа L получили граф $L_1 \neq F_1$ и C_2, $C_3 \subset L_1$. В силу предложения 2, $L_1 \in B \cap \Lambda_4$, а по предложению 3 $L_1 \in S$. Графу L дадим такую ориентацию ψ, при которой ребра из L_1 ориентированы как при ориентации $\varphi \in S(L_1)$, а стянутые подграфы имеют произвольные базирующие ориентации. Легко заметить, что ориентация $\psi \in B(L)$ и при ней найдутся вершины a, $b \in X$ такие, что $a \in D(b)$. Противоречие.

(3) $\Rightarrow$(4). Тривиально.

(4) $\Rightarrow$(1). Если одним элементарным стягиванием можно из L получить F_1, то $L \in P$. Допустим, что все базируемые графы, которые с помощью каких-нибудь $t \leq k-1$ $(k \geq 2)$ элементарных стягиваний превращаются в F_1, насыщенные, и пусть граф $L = (X, U) \in B$ можно с помощью k элементарных стягиваний превратить в F_1. Это значит, что с помощью $k-1$ элементарных стягиваний можно L превратить в C_2 или C_3. По предположению индукции, в вершины полученного C_2 или C_3 стянулись насыщенные графы. Следовательно, $L \in Q_2 \cup Q_3$ и, по лемме 1, $L \in P$.

Следствие 1.1. *Если граф $L_1 = (X_1 U_1) \in P$ получается из графа $L = (X, U)$ соединением пары вершин a, $b \in X$ квазицепью длины 3, то $L = (X, U) \in P$.*

Следствие 2.1. $L \in P\ \&\ \exists_{I,\,II}(L \Rightarrow H) \Rightarrow H \in P$.

Теорема 2. $L \in P \succ \frac{3}{2}(n(L)-1) \leq m(L) \leq 2(n(L)-1)$.

Доказательство. Если при каком-нибудь стягивании графа L на F_1 элементарные стягивания I и II рода применялись соответственно k_1 и k_2 раз, то можно написать:

$$\begin{cases} 3k_1 + 2k_2 = m(L) \\ 2k_1 + k_2 = n(L) - 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} k_1 = 2n(L) - m(L) - 2 \\ k_2 = 2m(L) - 3n(L) + 3). \end{cases}$$

Так как $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, то утверждение теоремы 2 будет следовать из решения систем полученных неравенств.

Замечание 1. Верхняя оценка для количества ребер насыщенного графа следует также из теоремы 1 работы ([3]).

Следствие 1. 2. *При различных способах стягивания насыщенного графа L на F_1 количества элементарных стягиваний I рода $p_1(L)$ и II рода $p_2(L)$ не зависят от способа стягивания.*

Ясно, что $\lambda(L) = p_1(L) + p_2(L)$ — цикломатическое число графа L.

(1) $\succ$(5). Легко доказать индукцией по цикломатическому числу.

(5) $\succ$ (1). Следует из леммы 1.

Следствие 3. 1. $L \in P \succ \gamma(L) \leq 3$.

Теорема 3. $\forall L = (X, U) \in P \forall \varphi \in B(L) \forall a, b \in X (a \neq b \succ$
$\succ a \in \bar{D}(b) \vee b \in \bar{D}(a))$.

Доказательство проведем индукцией по числу вершин. Для одновершинных графов утверждение тривиально. Допустим, что оно верно для всех графов, имеющих не более $k-1$ ($k \geq 2$) вершин, и пусть дан граф $L = (X, U) \in P$ с $n(L) = k$. Не нарушая общности, можно считать, что L — квазицикл длины 3 с квазивершинами $L_i = (X_i, U_i)$ и квазиребрами $x_i y_{i+1}$, где $i = 1, 2, 3$, $x_i y_i \in X_i$, $y_4 = y_1$. Если a и b находятся в одной и той же квазивершине квазицикла L, то справедливость теоремы следует из предположения индукции. Допустим, что $a \in X_1$, $b \in X_2$ и при какой-нибудь ориентации φ $B(L)$ ребро $x_1 y_2$ имеет ориентацию $x_1 \to y_2$. Так как L_1 $L_2 \in P$, то при этой ориентации $a \in D(x_1)$, $y_1 \in D(b)$ и, следовательно, $a \in \bar{D}(b)$.

Следствие 1. 3. *Соединением пары вершин $a, b \in X$, $a \neq b$, графа $L = (X, U) \in P$ цепью длины k получается насыщенный граф тогда и только тогда, когда в $B(L)$ имеется такая ориентация, при которой $a \bar{\in} D(b)$ & $b \bar{\in} D(a)$, и $2 \leq k \leq 3$.*

(1) $\succ$(6). Достаточно доказать, что

$\forall L \in M$ $(L \in P \succ |B(L)| = 2)$ $\qquad (a)$.

Для двухвершинных графов (a) верно. Допустим, что оно справедливо для всех графов, имеющих не более $k-1$ ($k \geq 3$) вершин, и пусть дан граф $L \in P \cap M$ с $n(L) = k$. Так как (1) $\succ$(5), то $L \in Q_2 \cup Q_3$. Если все вершины квазицикла L принадлежат M, то $|B(L)| = 2$.

Допустим, что на квазицикле $L = (X, U)$ имеется вершина $L_1 = (X_1, U_1) \bar{\in} M$. Тогда L_1 состоит из насыщенных блоков $L^i = (X^i, U^i)$, $i = 1 \cdot \cdot \cdot, m$, $X^i \cap X^{i+1} = z_i \in X_1$, $i \neq j \succ U^i \cap U^j = \varnothing$, а вершины $x_1 \in X'$ и $y_1 \in X^m$ инцидентны квазиребрам квазицикла L. По индуктивному предположению $|B(L^i)| = 2$ для любого i. Пусть при какой-нибудь базирующей ориентации φ квазицикла L его квазиребро, инцидентное вершине x_1, ориентировано от нее. При ориентации φ в графе $L_1=(X_1, U_1)$ будет $x_1\bar{\in}D(y_1)$. φ окажется той единственной базирующей ориентацией графа L_1, при которой $x_1\bar{\in}D(z_1)$, $\forall i(1 \leqslant i \leqslant m-2)z_i\bar{\in} D(z_{i+1}), z_{m-1}\bar{\in}D(y_1)$.

Значит, ориентация какого-нибудь ребра однозначно определяет базирующую ориентацию всего графа, то есть $|B(L)| = 2$.

(6) $\rightarrow$(1). Достаточно доказать, что $\forall L\in M(|B(L)|=2 \rightarrow L\in P)$.

Пусть $L \in M$ и $|B(L)| = 2$. Из предложений 3 и 4 следует, что $L\in B/\Lambda_4$. Действительно, $L\in \Lambda_4 \rightarrow L\in S \rightarrow |B(L)|\geqslant|S(L)|\geqslant 2\gamma(L)\geqslant 4$.

Производя над L элементарные стягивания, пока они применимы, получим граф $L_2 = (X_2, U_2)$. По предложениям 2 и 3, $L_2\in S$. Если $L_2=F_1$, то $L\in P$. Пусть $L_2\neq F_1$. Так как $m(L_2)\geqslant 1$, то $|S(L_2)|\geqslant 2$. Комбинируя любую базирующую ориентацию стянутого подграфа графа L с любой из сильно базирующих ориентаций графа L_2, получим ориентацию из $B(L)$. Отсюда следует, что $|B(L)|\geqslant 4$.

С л е д с т в и е 4. 1. $|B(L)|=2 \leftrightarrow L \in (((P\cap M)\cup F_2)/F_1)$.

С л е д с т в и е 5. 1. $C_2\subset L\in M\cap P \rightarrow L = C_2$.

Нетрудно доказать, что

(1) $\rightarrow$(7)$\rightarrow$(8) $\rightarrow$(1) $\rightarrow$(9) $\rightarrow$(10) $\rightarrow$(1)

Этим завершится доказательство теоремы 1.

Можно показать, что насыщенные графы обладают также следующим свойством:

Т е о р е м а 4. $\forall C_3 L\subseteq\in P\cap M\exists x\in C_3\rho(x) = 2$.

С л е д с т в и е 1.4. $\forall C_3\subset L\in P(\forall x\in C_3\rho(x)\geqslant 3 \rightarrow\exists y\in C_3\gamma(L(X/\{y\}))>1)$.

С л е д с т в и е 2. 4. $\forall L\in((P\cap M)/C_3)\forall\varphi\in B(L)\forall x\in C_3((\rho(x) = 2) \rightarrow$

$$\rightarrow\forall y\in(X/\{x\})(x\in\bar{D}(y) \,\&\, y\in\bar{D}(x)).$$

Пусть дан граф $L=(X, U)\bar{\in}\Lambda_1$. Если в L имеются петли, то $L\bar{\in}B$. Допустим, что $L\in\Lambda_2/\Lambda_4$. Применяя к L элементарные стягивания I и II рода в произвольном порядке, пока они применимы, получим граф $L_1 = (X_1, U_1)$. Через Z обозначим множество тех вершин из X, которые не участвовали ни в каких элементарных стягиваниях. Пользуясь предложениями 1, 2, 3 и теоремой 1, можно показать, что справедлива

Т е о р е м а 5. $L\in B\leftrightarrow(L_1\in B)\,\&\,(L(X/Z)\in B)$.

Проверку базируемости графа L_1 можно осуществить с помощью результатов работы ([5]), так как $(L_1\in B)\leftrightarrow(L_1\in S)$.

Ясно, что $L(X/Z)\in B$ тогда и только тогда, когда всякая компонента связности графа $L(X/Z)$ – насыщенный граф. Следовательно, для практической проверки условия $L(X/Z)\in B$ можно пользоваться предыдущими результатами и следующей теоремой.

Т е о р е м а 6. *Следующие высказывания равносильны друг другу:*

(1) $L=(X, U)\in P$

(2) $\exists!\, n(L \rightarrow F_1) \,\&\, \forall u = ab\in U((\rho(a) = \rho(b)=2) \rightarrow((L(u)\in P)$

(3) $\forall C_3 = (x_1x_2x_3)\subseteq L((\rho(x_1) = 2 \,\&\, \rho(x_2) \leqslant 3) \rightarrow((L/C_3)\in P)$

(4) $\forall C_4=(x_1x_2x_3x_4)\sqsubset L(((\rho(x_1)=\rho(x_3)=2)\ \&\ x_2x_3\in U)\succ(L(X/\{x\})\in P)$

(5)$\in Q_i$, *где* $i=2$ *или* 3, *и стягиванием произвольных* $i-1$ *квазивершин получается граф из* P *(или из* B*).*

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Կ. Մ. ՄՈՍԵՍՅԱՆ

Հագեցված գրաֆներ

Ոչ կողմնորոշված գրաֆը կանվանենք բազիսացվող, եթե այն կարելի է կողմնորոշել այնպես, որ դառնա որևէ գրաֆի բազիսային գրաֆ։ Կողմնորոշված գրաֆը կոչվում է ուժեղ կապակցված, եթե ցանկացած երկու գագաթների համար գոյություն ունի նրանցով անցնող կողմնորոշված ցիկլ։ Ոչ կողմնորոշված գրաֆը կանվանենք հագեցված, եթե բազիսացվող է և ցանկացած բազիսային կողմնորոշման դեպքում դառնում է ուժեղ կապակցված գրաֆ։

Հոդվածում նկարագրված է հագեցված գրաֆների դասը և տրված է ալգորիթմ՝ գրաֆների բազիսացումն ստուգելու համար։

Մասնավորապես ապացուցված է, որ 2-կապակցված ([1]) գրաֆն ունի երկու բազիսային կողմնորոշում այն և միայն այն դեպքում, եթե այն հագեցված է։

Ստացված են նաև ներքին և վերին ճշգրիտ գնահատականներ՝ հագեցված գրաֆների կողերի քանակի համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Зыков*, Теория конечных графов, I, Изд. «Наука», Новосибирск, 1969. [2] *О. Оре*, Теория графов, Изд. «Наука», М., 1968. [3] *М. К. Гольдберг*, Некоторые применения операций стягивания к сильно связанным графам, Усп. матем. наук, № 5, 20 (1965). [4] *К. М. Мосесян*, ДАН Арм. ССР, т. LV, № 1 (1972). [5] *К. М. Мосесян*, ДАН Арм. ССР, т. LIV, № 3 (1972).