ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVI 1973 4

УДК 539.30

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Хачатрян

Единственность решения в разномодульной теории упругости

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 27/IX 1972)

В работе [1] было доказано, что удельная потенциальная энергия деформации упругого разномодульного тела является выпуклой функцией своих аргументов (компонентов деформации) и, исходя из общего метода Р. Хилла [2,3], была доказана единственность решения краевой задачи для разномодульной среды в предположении, что вся область, занимаемая телом, является областью второго рода.

В настоящей работе, пользуясь указанным методом, доказывается единственность решения краевой задачи для разномодульного тела без каких-либо дополнительных предположений о роде решения.

1. Для разномодульного материала в постановке [4–6] законы упругости записываются в виде

$$\varepsilon_{ij} = (a_{11} - a_{12})\sigma_{ij} + a_{12}\Theta\delta_{ij} + (a_{22} - a_{11})\, m_i m_j \sigma_\beta\,, \tag{1.1}$$

когда главные напряжения в данной точке имеют различные знаки (область второго рода), и в виде обычных законов Гука

$$\varepsilon_{ij} = (a_{11} - a_{12})\sigma_{ij} + a_{12}\Theta\delta_{ij}, \tag{1.2}$$

если главные напряжения в данной точке одного и того же знака (область первого рода).

Здесь σ_{ij}, ε_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — компоненты тензора напряжения и деформации; σ_β — главное напряжение в данной точке, знак которого отличен от двух других $(\sigma_\alpha, \sigma_\gamma)$; m_i — направляющие косинусы главного направления β относительно координатной системы x_i; u_i — компоненты вектора перемещения:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \qquad \Theta = \sigma_{ij}\delta_{ij}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{1.3}$$

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \quad a_{22} = \frac{1}{E^-}, \quad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-} \quad (\text{при } \sigma_\beta < 0) \tag{1.4}$$

E^+, ν^+ и E^-, ν^- — модуль упругости и коэффициент Пуассона при простом растяжении и сжатии соответственно.

В работе ([1]) доказано, что для разномодульного материала при законе упругости (1.1) (т. е. в областях второго рода) удельная потенциальная энергия деформации $W(e_{ij})$ является выпуклой функцией своих аргументов, причём

$$e_{ij}=\begin{cases}\varepsilon_{ij} & (i=j)\\ 2\varepsilon_{ij} & (i\neq j)\end{cases}, \qquad \frac{\partial W}{\partial e_{pq}}=\sigma_{pq} \quad (p\leqslant q), \tag{1.5}$$

e_{ij} представляют собой компоненты деформации.

Нетрудно показать, что $W(e_{ij})$ является выпуклой функцией своих аргументов также и при законе упругости (1.2) (т. е. в областях первого рода).

Отметим, что условие строгой выпуклости дифференцируемой непрерывной функции f от n переменных $\theta_i(i=1, 2, \ldots n)$ записывается в виде

$$\Delta f-\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\Delta\theta_i>0 \qquad \text{или} \qquad \Delta\left(\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right)\Delta\theta_i>0, \tag{1.6}$$

где Δ означает приращение соответствующей переменной.

Имеем уравнения равновесия и напряжения на поверхности

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+X_i=0, \qquad F_i=\sigma_{ij}l_j, \tag{1.7}$$

где X_i — компоненты объемной силы, l_i — направляющие косинусы внешней нормали поверхности в данной точке.

Ниже будет использовано также следующее преобразование для выражения виртуальной работы поверхностных и объемных сил ([1, 3]).

$$\int F_i\delta u_i\,dS+\int X_i\delta u_i\,dV=\int\sigma_{ij}\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,dV=\int\frac{\partial W}{\partial e_{pq}}\delta e_{pq}\,dV. \tag{1.8}$$

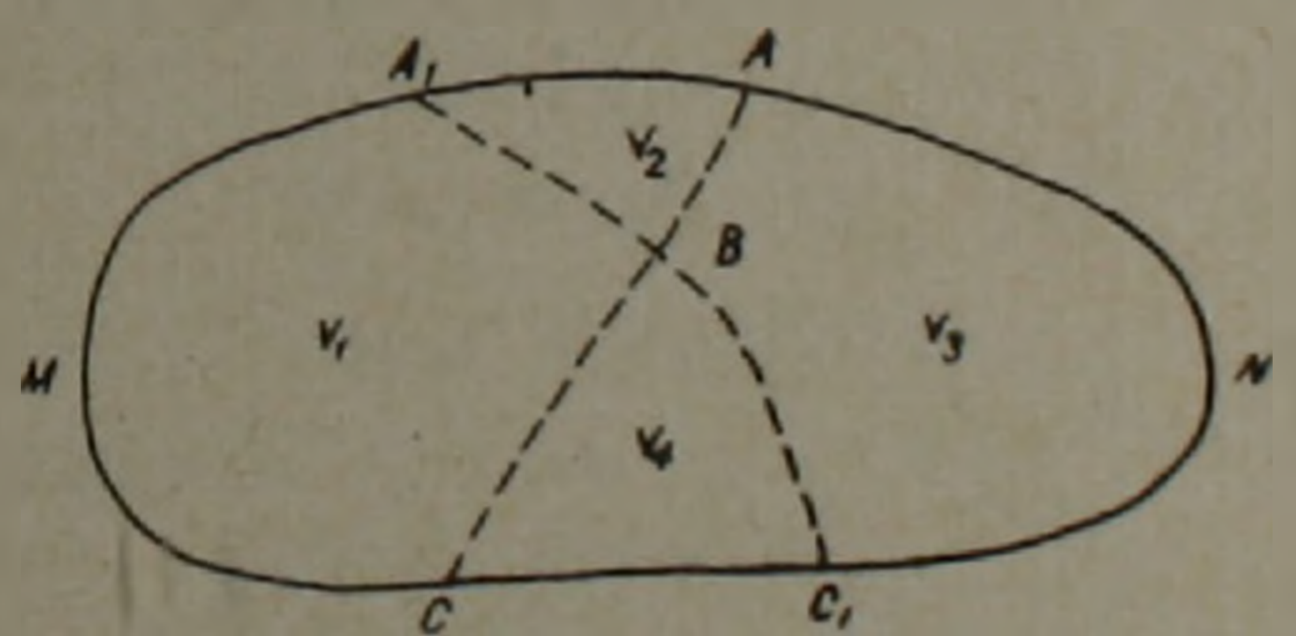

Рис. 1

2. Рассмотрим краевую задачу, когда на одной части поверхности (S_u) заданы перемещения, а на другой части (S_f) — внешние напряжения. Пусть u_i^{*} есть решение рассматриваемой задачи. При этом область AMC (рис. 1) является областью первого рода, т. е. там действуют законы упругости вида (1.2), а остальная область ANC является областью второго рода с законами упругости вида (1.1):

$$u_i^1=\begin{cases}u_i^{*} & \text{в области } AMC\\ u_i^{**} & \text{в области } ANC\end{cases} \tag{2.1}$$

Предположим теперь, что существует еще и второе решение u_i^{*}, при котором область A_1MC_1 (рис. 1) является областью первого рода, а остальная область A_1NC_1 — областью второго рода*:

$$u_i^{*} = \begin{cases} u_i^{**} & \text{в области } A_1MC_1 \\ u_i^{***} & \text{в области } A_1NC_1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Обозначим через Δu_i разность этих двух решений:

$$\Delta u_i = \begin{cases} u_i^{**} - u_i^{'*} & \text{в области } A_1BCM \text{ (объем } v_1) \\ u_i^{**} - u_i^{'*} & \text{в области } A_1BA \text{ (объем } v_2) \\ u_i^{***} - u_i^{'**} & \text{в области } ABC_1N \text{ (объем } v_3) \\ u_i^{**} - u_i^{'**} & \text{в области } C_1BC \text{ (объем } v_4) \end{cases} \tag{2.3}$$

Тогда виртуальная работа поверхностных и объемных сил на вариациях перемещения Δu_i для первого решения, согласно преобразованию (1. 8), будет:

$$\int F_i' \Delta u_i dS + \int X_i \Delta u_i dV = \int \sigma_{ij}' \Delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \int \left(\frac{\partial W}{\partial e_{pq}}\right)' \Delta e_{pq} dV, \tag{2.4}$$

Аналогичным образом и для второго решения будем иметь:

$$\int F_i^{*} \Delta u_i dS + \int X_i \Delta u_i dV = \int \sigma_{ij}^{*} \Delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \int \left(\frac{\partial W}{\partial e_{pq}}\right)^{*} \Delta e_{pq} dV. \tag{2.5}$$

В выражениях (2. 4) и (2. 5) σ_{ij}' и σ_{ij}^{*} представляют собой компоненты тензора напряжения при первом и втором решениях соответственно:

$$\sigma_{ij}' = \begin{cases} \sigma_{ij}'^{*} & \text{в области } AMC \\ \sigma_{ij}'^{**} & \text{в области } ANC \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\sigma_{ij}^{*} = \begin{cases} \sigma_{ij}^{**} & \text{в области } A_1MC_1 \\ \sigma_{ij}^{***} & \text{в области } A_1NC_1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Так как напряжения σ_{ij}' и σ_{ij}^{*} являются решениями рассматриваемой задачи, то они удовлетворяют условиям непрерывности на границах разделов различных областей.

Составляя теперь разность выражений (2.5) и (2.4), приходим к следующему равенству:

$$\int \Delta F_i \Delta u_i dS = \int \Delta \left(\frac{\partial W}{\partial e_{pq}}\right) \Delta e_{pq} dV. \tag{2.8}$$

---

* Отметим, что количество различных областей здесь не играет существенной роли, поэтому мы ограничимся двумя областями.

Выше было отмечено, что удельная потенциальная энергия деформации W является выпуклой функцией своих аргументов при обоих законах упругости (1.1) и (1.2). Поэтому объемный интеграл правой части равенства (2.8), в силу условия выпуклости функции (1.6), будет положительным. Однако, поскольку $\Delta F_i=0$ на S_F и $\Delta u_i=0$ на S_u, подынтегральное выражение в левой части равенства (2.8) тождественно равно нулю. Эти два обстоятельства противоречат равенству (2.8). Значит предположение о существовании второго отличного от первого решения исключается. Следовательно $u_i^{\prime}=u_i^{\prime\prime}$, если учесть, что принятые здесь граничные условия задачи исключают движение упругого тела как абсолютно твёрдого тела.

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Տարամոդուլ առաձգականության տեսության մեջ լուծման միակությունը

Տարամոդուլ առաձգական մարմնի համար [1] աշխատանքում ապացուցված է, որ դեֆորմացիայի տեսակարար պոտենցիալ էներգիան իրենից ներկայացնում է իր արգումենտների (դեֆորմացիայի կոմպոնենտների) նկատմամբ ուռուցիկ ֆունկցիա։ Օգտվելով այդ փաստից և ելնելով Ռ. Խիլլի [2,3] ընդհանուր մեթոդից, այդ նույն աշխատանքում ցույց է տրված եզրային խնդրի լուծման միակությունն այն ենթադրությամբ, որ նյութն զբաղեցնող ամբողջ ծավալի ցանկացած կետում լարվածային վիճակը բնութագրող գլխավոր լարումները միևնույն նշանի չեն (ամբողջ տիրույթն երկրորդ սեռի է)։

Ներկա աշխատանքում ապացուցված է տարամոդուլ առաձգական միջավայրի համար եզրային խնդրի լուծման միակությունը՝ առանց լրացուցիչ ենթադրությունների, թե լուծումներն ինչպիսի սեռի տիրույթի են համապատասխանում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Хачатрян*, «Известия АН Арм. ССР», Механика, 6 (1972). [2] *Р. Хилл*, Новые горизонты в механике твердых тел. Сб. Механика, Изд. иностр. лит., № 4, 1957. [3] *Р. Хилл*, О единственности и устойчивости в теории конечных деформаций. Сб. Механика, Изд. иностр. лит., № 3, 1958. [4] *С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян*, Инж. ж. МТТ, № 2, (1966). [5] *С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян*, Инж. ж. МТТ, № 6, (1966). [6] *С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян*, ДАН Арм. ССР, т. XLVIII, № 4 (1969).