ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVI 1973 4

УДК 539.37

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. В. Микаелян

О двух задачах растяжения упругого прямоугольника с упругими накладками

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 18/IX 1972)

Решается плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда одна кромка, или две противоположные его кромки усилены упругими креплениями в виде приваренных (или приклеенных) к нему упругих накладок, имеющих постоянную, достаточно малую, толщину h и накладки растягиваются двумя равными противоположно направленными силами.

Задаче о передаче нагрузки от крепления к полуплоскости посвящены многие работы. Подробная библиография по этому вопросу приводится в работах Р. Муки и Э. Стернберга ([1]), Н. Х. Арутюняна и С. М. Мхитаряна ([2]). Во всех этих работах принимается допущение Э. Мелана ([3]), что упругое крепление находится в одноосном напряженном состоянии.

В нашей работе также принимается упомянутое допущение Э. Мелана. Задачи решаются в перемещениях, которые представляются в виде суммы двух рядов Фурье по тригонометрическим функциям. Для определения коэффициентов разложений получены бесконечные системы линейных уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны.

Одна задача о растяжении прямоугольной упругой полосы в несколько другой постановке рассматривалась в работе ([4]).

1. Как известно, в плоской задаче теории упругости перемещения u и v должны удовлетворять уравнениям Ляме

$$\mu\nabla^2 u + (\lambda + \mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} = 0,$$
$$\mu\nabla^2 v + (\lambda + \mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y} = 0, \tag{1.1}$$

а напряжения выражаются через перемещения формулами

$$\sigma_x = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\ \sigma_y = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\ \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{1.2}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

а λ и μ упругие постоянные материала прямоугольника.

Рассмотрим растяжение прямоугольника, когда усилена упругим креплением одна кромка прямоугольника длиною $2a$. Начало координат берем в середине усиленной кромки. Ось ox напрявляем вдоль длины крепления, а ось oy — во внутрь прямоугольной области. Остальные кромки прямоугольника свободны от напряжений.

В силу симметрии граничных условий перемещения u и v можно определить только в половине области прямоугольника.

Таким образом на кромках $x = 0$, $x = a$, $y = b$ будем иметь следующие граничные условия и условия симметрии:

$$\sigma_x(a, y) = \tau_{xy}(a, y) = \sigma_y(x, b) = \tau_{xy}(x, b) = 0 \tag{1.3}$$

$$u(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = 0. \tag{1.4}$$

Исходя из допущения, что накладка находится в одноосном напряжённом состоянии ([3]) и что поперечное сечение F накладки мало на кромке $y=0$ будем иметь

$$\sigma_y(x,0) = 0 \tag{1.5}$$

и аналогично ([5]), если рассмотреть равновесие элемента накладки, получим второе граничное условие на $y = 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0} = \frac{P}{E_1 F} + \frac{1}{E_1 h}\int_x^a \tau_{xy}(t, 0)\,dt, \tag{1.6}$$

где E_1 модуль упругости материала накладки.

Решение уравнений (1. 1) для перемещений u и v ищем в виде следующих рядов:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \operatorname{sh}\lambda_k y + B_k \operatorname{ch}\lambda_k y + C_k\lambda_k y \operatorname{sh}\lambda_k y + D_k\lambda_k y \operatorname{ch}\lambda_k y)\sin\lambda_k x +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(E_k \operatorname{sh}\gamma_k x + H_k\gamma_k x \operatorname{ch}\gamma_k x)\sin\gamma_k y, \tag{1.7}$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}C_k - B_k\right)\operatorname{sh}\lambda_k y + \left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}D_k - A_k\right)\operatorname{ch}\lambda_k y -\right.$$
$$\left. - D_k\lambda_k y\operatorname{sh}\lambda_k y - C_k\lambda_k y\operatorname{ch}\lambda_k y\right|\cos\lambda_k x + \tag{1.8}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(\varepsilon_k + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}H_k\right)\operatorname{ch}\gamma_k x + H_k\gamma_k x\operatorname{sh}\gamma_k x\right|\cos\gamma_k y,$$

где

$$\lambda_k = (2k-1)\pi/2a, \qquad \gamma_k = k\pi/b.$$

Легко видеть, что условия симметрии (1.4) удовлетворяются тождественно. Используя граничные условия (1.3), (1.5) и (1.6) для определения неизвестных коэффициентов, получим следующие соотношения:

$$E_k = -H_k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \gamma_k a \operatorname{th}\gamma_k a\right), \qquad B_k = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} C_k, \tag{1.9}$$

$$A_k = -C_k\lambda_k b - D_k\left(\lambda_k b \operatorname{cth}\lambda_k b - \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)$$

и совокупность четырех бесконечных систем линейных уравнений

$$z_k = \sum_{n=1}^{\infty} e_{nk} y_n \qquad (k = 1, 3, \ldots) \tag{1.10}$$

$$z_k = \sum_{n=1}^{\infty} e_{nk} x_n \qquad (k = 2, 4, \cdots). \tag{1.11}$$

$$x_k = \sum_{n=1,3}^{\infty} a_{nk} z_n + \sum_{n=2,4}^{\infty} b_{nk} z_n + m_k^{(1)}, \tag{1.12}$$

$$y_k = \sum_{n=1,3}^{\infty} b_{nk} z_n + \sum_{n=2,4}^{\infty} a_{nk} z_n + m_k^{(2)}, \tag{1.13}$$

где введены следующие обозначения:

$$C_k = \frac{y_k - x_k}{2\lambda_k}; \qquad H_k = \frac{z_k a}{b\gamma_k \operatorname{ch}\gamma_k a}; \tag{1.14}$$

$$D_k = \frac{1}{2\lambda_k}\left(x_k \operatorname{cth}\frac{\lambda_k b}{2} - y_k \operatorname{th}\frac{\lambda_k b}{2}\right);$$

$$e_{nk} = \frac{4\gamma_k^2 \lambda_n (-1)^{k+1}}{a\left(\operatorname{th}\gamma_k a + \frac{\gamma_k a}{\operatorname{ch}^2\gamma_k a}\right)(\lambda_n^2 + \gamma_k^2)^2}, \tag{1.15}$$

$$a_{nk} = \frac{4\alpha\lambda_k^3 \gamma_n \operatorname{sh}\lambda_k b\,(-1)^{k+n}}{d_k(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2}, \tag{1.16}$$

$$b_{nk} = \frac{4\lambda_k^2\gamma_n(-1)^{k+n}}{bd_k(\gamma_n^2+\lambda_k^2)^2}\left\{2\left[\left(\operatorname{ch}\lambda_k b - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right) + (\lambda_k b \operatorname{cth}\lambda_k b - 1)(-1)^n\right] + \right. \tag{1.17}$$

$$\left. + \alpha\lambda_k b \operatorname{sh}\lambda_k b\right\};$$

$$m_k^{(i)} = \frac{Ph(-1)^{k+1}}{a\mu F d_k}\left|\left(\operatorname{ch}\lambda_k b - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right)(-1)^i - (\lambda_k b \operatorname{cth}\lambda_k b - 1)\right|; \tag{1.18}$$

$$d_k = \alpha\lambda_k b\left(\operatorname{ch}\lambda_k b - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right) + \operatorname{sh}\lambda_k b - \frac{\lambda_k^2 b^2}{\operatorname{sh}\lambda_k b}; \tag{1.19}$$

$$\alpha = \frac{(\lambda + 2\mu) E_1 h}{2(\lambda + \mu)\mu b}; \tag{1.20}$$

Исследуем бесконечные системы (1.10) — (1.13). Используя известные оценки ([6]), которые в наших обозначениях имеют вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{(\lambda_n^2 + \gamma_k^2)^2} \leqslant \frac{0{,}770a}{4\gamma_k^2}\left(\operatorname{th}\gamma_k a + \frac{\gamma_k a}{\operatorname{ch}^2\gamma_k a}\right); \tag{1.21}$$

$$\sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \leqslant \frac{0{,}770b}{8\lambda_k^2} \operatorname{th}\frac{\lambda_k b}{2}\left(1 + \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right); \tag{1.22}$$

$$\sum_{n=2,4}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \leqslant \frac{0{,}692b}{8\lambda_k^2} \operatorname{cth}\frac{\lambda_k b}{2}\left(1 - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right) \tag{1.23}$$

и обозначения (1.15) получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e_{nk}| = \frac{4\gamma_k^2}{a\left(\operatorname{th}\gamma_k a + \dfrac{\gamma_k a}{\operatorname{ch}^2\gamma_k a}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{(\lambda_n^2 + \gamma_k^2)^2} \leqslant 0{,}770. \tag{1.24}$$

Пользуясь выражениями (1. 22) и (1. 23), после некоторых преобразований для суммы абсолютных значений коэффициентов систем (1.12) и (1.13) получаем:

$$\sum_{n=1,3}^{\infty} |a_{nk}| + \sum_{n=2,4}^{\infty} |b_{nk}| = \frac{4\alpha\lambda_k^2 \operatorname{sh}\lambda_k b}{d_k} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} +$$

$$+ \frac{4\lambda_k^2}{bd_k}\left|2\left(\operatorname{ch}\lambda_k b + \lambda_k b \operatorname{cth}\lambda_k b - 1 - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right) + \alpha\lambda_k b \operatorname{sh}\lambda_k b\right| \times$$

$$\times \sum_{n=2,4}^{\infty} \frac{\lambda_n}{(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \leqslant \frac{0{,}770\alpha\lambda_k b}{2d_k} \operatorname{sh}\lambda_k b \left(1 + \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right) \operatorname{th}\frac{\lambda_k b}{2} +$$

$$+ \left|2\left(\operatorname{ch}\lambda_k b + \lambda_k b \operatorname{cth}\lambda_k b - 1 - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right) + \alpha\lambda_k b \operatorname{sh}\lambda_k b\right| \times$$

$$\times \frac{0{,}692}{2d_k} \operatorname{cth}\lambda_k b \left(1 - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right) < 0{,}770$$

и

$$\sum_{n=1,3}^{\infty} |b_{nk}| + \sum_{n=2,4}^{\infty} |a_{nk}| = \frac{4\lambda_k^2}{bd_k}\left\{2\left(\operatorname{ch}\lambda_k b - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \lambda_k b \operatorname{cth}\lambda_k b + 1\right) + \alpha\lambda_k b \operatorname{sh}\lambda_k b\right\} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} +$$

$$+ \frac{4\alpha\lambda_k^2 \operatorname{sh}\lambda_k b}{d_k} \sum_{n=2,4}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \leqslant \frac{0{,}770}{2d_k} \operatorname{th}\frac{\lambda_k b}{2}\left(1 + \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b}\right) \times$$

$$\times \left\{2\left(\operatorname{ch}\lambda_k b - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}\lambda_k b} - \lambda_k b \operatorname{cth}\lambda_k b + 1\right) + \alpha\lambda_k b \operatorname{sh}\lambda_k b\right\} +$$

$$+\frac{0{,}692\alpha}{2d_k}\lambda_k b\,\mathrm{sh}\lambda_k b\,\mathrm{cth}\lambda_k b\left(1-\frac{\lambda_k b}{\mathrm{sh}\lambda_k b}\right)\leqslant 0{,}770.$$

Таким образом, совокупность бесконечных систем (1.10)—(1.13) оказалась вполне регулярной, свободные члены этих систем, как легко видеть, ограничены сверху и для больших k имеют порядок убывания k^{-1}.

2. Во второй задаче рассматривается прямоугольник размерами $2a$ и $2b$. Кромки длиною $2a$ усилены упругими накладками, которые растягиваются. Выбираем правую систему координат, причем начало координат находится в середине прямоугольника, а ось ox параллельна усиленным кромкам. В силу симметрии перемещения u и v определяются только в четвертой части основной области $(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$.

Граничные условия этой задачи будут иметь вид:

$$u(0,\ y)=\tau_{xy}(0,\ y)=v(x,\ 0)=\tau_{xy}(x,\ 0)=0, \qquad (2.1)$$

$$\tau_{xy}(a,\ y)=\sigma_x(a,\ y)=\sigma_y(x,\ b)=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=b}=\frac{P}{E_1F}-\frac{1}{E_1h}\int\limits_x^a\tau_{xy}(t,\ 0)dt. \qquad (2.2)$$

Здесь перемещения ищем в виде:

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}(B_k\,\mathrm{ch}\lambda_k y+C_k\lambda_k y\,\mathrm{sh}\lambda_k y)\sin\lambda_k x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k\,\mathrm{sh}\gamma_k x+H_k\gamma_k x\,\mathrm{ch}\gamma_k x)\cos\gamma_k y, \qquad (2.3)$$

$$v=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}C_k-B_k\right)\mathrm{sh}\lambda_k y-C_k\lambda_k y\,\mathrm{ch}\lambda_k y\right]\cos\lambda_k x-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}H_k+\varepsilon_k\right)\mathrm{ch}\gamma_k x+H_k\gamma_k x\,\mathrm{sh}\gamma_k x\right]\sin\gamma_k y, \qquad (2.4)$$

где

$$\lambda_k=(2k-1)\pi/2a, \qquad \gamma_k=(2k-1)2\pi/b.$$

Легко убедиться, что при таких выборах u и v тождественно удовлетворяются условия симметрии (2.1). После удовлетворения остальных граничных условий для определения неизвестных коэффициентов получим следующие соотношения

$$\varepsilon_k=-H_k\left(\gamma_k a\,\mathrm{th}\,\gamma_k a+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right),$$

$$B_k=-C_k\left(\lambda_k b\,\mathrm{th}\lambda_k b-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)$$

и бесконечные системы линейных уравнений

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk}\, y_n\,, \tag{2.5}$$

$$y_k = \sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}\, x_n + r_k\,, \tag{2.6}$$

где введены обозначения:

$$H_k = \frac{x_k\, a\,(-1)^{k+1}}{\gamma_k\, b \operatorname{ch} \gamma_k a}\,, \qquad C_{nk} = \frac{4\gamma_k^2 \lambda_n}{a\left(\operatorname{th}\gamma_k a + \dfrac{\gamma_k a}{\operatorname{ch}^2 \gamma_k a}\right)(\lambda_n^2 + \gamma_k^2)^2}\,,$$

$$C_k = \frac{y_k\,(-1)^{k+1}}{\lambda_k \operatorname{ch}\lambda_k b}\,, \qquad d_{nk} = \frac{4\lambda_k^2 \gamma_n}{b\left(\alpha\lambda_k b + \operatorname{th}\lambda_k b + \dfrac{\lambda_k b}{\operatorname{ch}^2 \lambda_k b}\right)(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2}\,,$$

$$r_k = -\frac{Ph}{\mu a F\left(\alpha\lambda_k b + \operatorname{th}\lambda_k b + \dfrac{\lambda_k b}{\operatorname{ch}^2 \lambda_k b}\right)}\,.$$

В силу (1.21) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{nk}| < 0{,}770\,. \tag{2.7}$$

Снова используя (1.21) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_{nk}| = \frac{4\lambda_k^2}{b\left(\alpha\lambda_k b + \operatorname{th}\lambda_k b + \dfrac{\lambda_k b}{\operatorname{ch}^2 \lambda_k b}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \leqslant \tag{2.8}$$

$$\leqslant \frac{0{,}770\left(\operatorname{th}\lambda_k b + \dfrac{\lambda_k b}{\operatorname{ch}^2 \lambda_k b}\right)}{\left(\alpha\lambda_k b + \operatorname{th}\lambda_k b + \dfrac{\lambda_k b}{\operatorname{ch}^2 \lambda_k b}\right)}$$

По оценкам (2.7) и (2.8) системы (2.5) и (2.6) оказались вполне регулярными. Легко видеть, что эти системы имеют ограниченные сверху и для больших индексов стремящиеся к нулю свободные члены.

Таким образом, неизвестные коэффициенты разложений (1.7), (1.8), (2.3) и (2.4) могут быть определены с любой степенью точности.

Это позволяет для искомых напряжений и перемещений получить оценки сверху и снизу в любой точке рассмотренных прямоугольников.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Վ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Առաձգական վերադիրներով առաձգական ուղղանկյան ձգման երկու խնդիրների մասին

Դիտարկվում է ուղղանկյան համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը, երբ ուղղանկյան մեկ կողը, կամ երկու հանդիպակած կողերն ուժեղացված են նրանց զոդված (կամ սոսնձված) առաձգական վերադիրներով, որոնք ունեն բավականաչափ փոքր h հաստություն։ Վերադիրները ձգվում են երկու հավասար և հակառակ ուղղված ուժերով։ Ուղղանկյան մնացած կողերն ընդունվում են ազատ բեռնվածությունից։

Խնդրի լուծման ժամանակ օգտագործվում է Մելանի ընդունելությունը, որ առաձգական վերադիրները գտնվում են միառանցք լարվածային վիճակում։ U և V տեղափոխումները, որոնք իրենցից ներկայացնում են խնդրի լուծումը, փնտրվում են Ֆուրյեի երկու շարքերի գումարի տեսքով։ Այդ շարքերի գործակիցների որոշումը բերվում է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։ Ապացուցվում է, որ ստացված սիստեմները լիովին ռեգուլյար են և ունեն գումարման մեծ ինդեքսների համար զրոյի ձգտող ազատ անդամներ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Муки, Э. Стернберг.* Прикладная механика. Русский перевод трудов. т. 35, № 4, 124—135, 1968. [2] *U. Kh. Arutiunian, S. M. Mkhitarian* Trands in elasticity and thermoelasticity. Witold Nowacki Anniversary volume Wolters—Noordhoff Publishing, 3—20, 1971. [3] *E. Melan.* Ing.—Archiv. Bd. 3, №2, 123—129., 1932, [4] *Теокарис, Дафермос.* Прикладная механика (русский перевод Американского общества инженеров механиков) (Trans ASME) т. 31, сер. E, № 4. 159—162, 1964 [5] *Н. Х. Арутюнян,* ПММ, т. 32, в. 4, 632—646 (1968). [6] *Б. Л. Абрамян,* ПММ. т. XXI, в. 1. 89—100, (1957). [7] *Л. В. Канторович* и *В. И. Крылов,* Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Гостехиздат, 1950.