ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LVI 1973 4

УДК 539.214

МЕХАНИКА

М. А. Задоян

Пластическое состояние толстостенной цилиндрической трубы при совместном кручении и изгибе

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 30/XI 1972)

Для случая степенного закона упрочнения рассматривается напряженное состояние толстостенной цилиндрической трубы при совместном воздействии крутящих и изгибающих моментов, приложенных на концевых сечениях трубы. В работе [1] для случая степенного закона упрочнения при помощи функции напряжения задача сведена к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений, одна из которых второго, а другое первого порядка. В частном случае для предельного значения степени упрочнения полученная система вырождается в одно уравнение второго порядка, совпадающее с уравнением, полученным в работах [2, 3] для идеально-пластического материала. В данной статье рассматриваемая задача для произвольного закона упрочнения сводится к одному уравнению второго порядка относительно функции перемещения. Функция перемещения в задаче совместного изгиба и кручения стержня с круговым сечением использована в работах [4,5] для случая жестко-пластического материала.

Используем цилиндрические координаты, направляя ось z по длине стержня, координаты r и θ — в плоскости поперечного сечения стержня. Отнеся к какому-нибудь характерному размеру поперечного сечения l, координаты r и z считаем безразмерным. Производя интегрирования в соотношениях между компонентами деформаций и перемещений, принимая тензор деформации не зависящим от z, полагая также, что $\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$ по всему объему стержня, полуобратным способом [1,6] получаем.

$$\sigma_z = \frac{3}{2} f(\varepsilon, \lambda)(Ar\sin\theta + Br\cos\theta + C),$$

$$\tau_{rz} = Df(\varepsilon, \lambda)\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad \tau_{\theta z} = Df(\varepsilon, \lambda)\left(r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right). \tag{1}$$

Здесь σ_z, τ_{rz}, $\tau_{\theta z}$ представляют отношения компонентов напряжения к общему заданному параметру k с размерностью напряжений, f — заданная функция, характеризующая закон упрочнения материала стержня с некоторым физическим параметром λ. Для линейно-упругого случая $f(\varepsilon, 0) = 1$. A, B, C, D—постоянные, определяемые из статических условий, ψ — искомая функция r и θ,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{4}(Ar\sin\theta + Br\cos\theta + C)^2 + D^2\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \left(r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2\right]} \quad (2)$$

интенсивность деформации сдвигов. Перемещения получаются в виде

$$u = -\frac{1}{4}(A\sin\theta + B\cos\theta)(r^2 + 2z^2) - \frac{1}{2}Cz,$$

$$v = \frac{1}{4}(A\cos\theta - B\sin\theta)(r^2 - 2z^2) + 2Drz, \quad (3)$$

$$w = 2D\psi(r, \theta) + Arz\sin\theta + Brz\cos\theta + Cz,$$

причем через u, v и w обозначены соответствующие компоненты перемещения, деленные на тот же характерный размер поперечного сечения l. Из дифференциальных уравнений равновесия и из выражения напряжений (1) следует уравнение для ψ:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[rf(\varepsilon, \lambda)\frac{\partial\psi}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[f(\varepsilon, \lambda)\left(r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right] = 0. \quad (4)$$

Пусть Ω — область поперечного сечения стержня, вообще многосвязная, Γ — контур области Ω. Отсутствие нагрузки на боковой поверхности стержня выражается условием:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|_\Gamma = \frac{d}{ds}\left(\frac{r_*^2}{2}\right). \quad (5)$$

Здесь r_* — расстояние точки контура Γ от начала координат, s — дуга контура, а ν — направление внешней нормали контура. Уравнение (4) представим в виде:

$$\Delta\psi + \operatorname{grad}\psi \operatorname{grad}\ln f + \frac{\partial \ln f}{\partial\theta} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, задача сводится к внутренней задаче Неймана для уравнения (6).

Решение задачи (6)—(5) ищем в виде степенного ряда по параметру λ

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\psi_k. \quad (7)$$

Удобно ввести обозначения $\varepsilon = D\sqrt{\omega}$, $f(\varepsilon, \lambda) = f_*(\omega, \lambda)$

$$\omega = (\alpha r\sin\theta + \beta r\cos\theta + \gamma)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \left(r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2, \quad (8)$$

где α, β, γ соответственно равны значениям A, B, C, умноженным на $\sqrt{3}/2D$. Далее, разлагая в ряд по λ также функции ω и $\ln f_*$, находим

$$\omega=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\omega_k, \qquad \ln f_*=-\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k F_k, \tag{9}$$

где

$$\omega_0=(\alpha r\sin\theta+\beta r\cos\theta+\gamma)^2+r^2+2\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}+\operatorname{grad}^2\psi_0, \tag{10}$$

$$\omega_n=2\frac{\partial\psi_n}{\partial\theta}+\sum_{k=0}^{n}\operatorname{grad}\psi_k\operatorname{grad}\psi_{n-k}, \tag{11}$$

$$F_n(r,\theta)=-\frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{(n+1)}\ln f_*}{d\lambda^{n+1}}\bigg|_{\lambda=0}=F_n^*(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{n+1}). \tag{12}$$

Подставляя разложения (7) и (9) в (6), а также (7) в (5), получим краевую задачу для ψ_0

$$\Delta\psi_0=0, \qquad \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma}=\frac{d}{ds}\left(\frac{r_*^2}{2}\right), \tag{13}$$

определяющую линейно-упругое напряженное состояние стержня, и систему рекуррентных краевых задач

$$\Delta\psi_{n+1}=Q_n, \qquad \frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma}=0, \quad n=0,1,2\ldots \tag{14}$$

$$Q_n=\frac{\partial F_n}{\partial\theta}+\sum_{k=0}^{n}\operatorname{grad}\psi_k\operatorname{grad}F_{n-k}, \tag{15}$$

определяющую пластическое состояние стержня.

Полагая значение ψ_0 известным из (13), рассмотрим вопрос разрешимости задачи (14). Очевидно, что для этого необходимо выполнение условия

$$\iint_{\Omega} Q_n d\Omega=0. \tag{16}$$

Покажем, что для кольцевого сечения указанное условие выполняется. Пусть безразмерные радиусы внутренней и внешней окружностей соответственно равны δ и 1. Тогда $\psi_0=\mathrm{const}$ и

$$Q_0=\frac{\partial F_0}{\partial\theta}, \qquad Q_n=\frac{\partial F_n}{\partial\theta}+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{grad}\psi_k\operatorname{grad}F_{n-k}. \tag{17}$$

Легко заметить, что при $n=0$ условие (16) соблюдается. Для доказательства условия (16) при $n\geq 1$ введем функцию

$$P_n^{(k)}=\sum_{i=0}^{n}F_iP_{n-i}^{(k-1)}, \qquad P_n^{(0)}=F_n, \quad P_0^{(k)}=F_0^{k+1} \tag{18}$$

Методом индукции доказывается соотношение

$$\frac{1}{k+1}\frac{dP_n^{(k)}}{dx}=\sum_{i=0}^{n}\frac{dF_i}{dx}P_{n-i}^{(k-1)}. \tag{19}$$

Здесь индексы могут принимать значения $k=1, 2, \ldots, n=0, 1, 2, \ldots$ Введем функцию

$$\Phi_n^{(k)} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{i=1}^{n-k} \iint_\Omega P_{n-k-i}^{(k)} \Delta\psi_i d\Omega. \tag{20}$$

Тогда $k \leq n - 1$

$$\iint_\Omega Q_n d\Omega = -\sum_{i=1}^{n} \iint_\Omega P_{n-i}^{(0)} \Delta\psi_i d\Omega = \Phi_n^{(0)}, \tag{21}$$

причем используем условие

$$\left.\frac{\partial\psi_k}{\partial r}\right|_{r=\delta} = \left.\frac{\partial\psi_k}{\partial r}\right|_{r=1} = 0. \tag{22}$$

Заменяя $\Delta\psi_j$ через Q_{i-1}, преобразуя и используя соотношение (19) при $k=1$, находим:

$$\Phi_n^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \iint_\Omega P_{n-1-i}^{(1)} \Delta\psi_i d\Omega = \Phi_n^{(1)}. \tag{23}$$

Заменяя в (20) $\Delta\psi_i$ через Q_{i-1}, делая преобразования и используя соотношение (19), имеем:

$$\Phi_n^{(k)} = \frac{(-1)^{k+2}}{(k+2)!} \sum_{i=1}^{n-k-1} \iint_\Omega P_{n-k-1-i}^{(k+1)} \Delta\psi_i d\Omega = \Phi_n^{(k+1)}. \tag{24}$$

Полученное соотношение доказывает, что равенство $\Phi_n^{(k)} = \Phi_n^{(k+1)}$ верно не только при $k=0$, но и для любого значения $k \leq n-1$.
огда легко заметить, что $\Phi_n^{(0)} = \Phi_n^{(1)} = \Phi_n^{(n-1)} =$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \iint_\Omega P_0^{(n-1)} \Delta\psi_1 d\Omega = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial\varphi} F_0^{(n+1)} d\Omega = 0. \tag{25}$$

Таким образом, решением уравнения $\Delta\psi_{n+1} = Q_n$ при краевых условиях (22) будет

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{2\pi} \iint_\Omega Q_n G d\Omega, \qquad n=0, 1, 2, \cdots \tag{26}$$

где

$$G = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k + \delta^k r^{-k}}{k(1-\delta^{2k})} (\xi^k + \xi^{-k}) \cos k(\theta - \varphi) \tag{27}$$

функция Грина второго род для кольцевой области. ξ и φ переменные интегрирования. Для круга $\delta = 0$ и $G = \ln r_{AP} + \ln r_{A^*P}$, где

$$r_{AP} = \sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos(\theta - \varphi)}, \quad r_{A^*P} = \sqrt{r^2 + \frac{1}{\xi^2} - 2\frac{r}{\xi}\cos(\theta - \varphi)}$$

В случае степенного упрочнения $f_* = \omega^{-\lambda}$ имеем

$$Q_0 = \frac{\partial \ln \omega_0}{\partial \omega}, \qquad Q_n = \frac{1}{\omega_0}\frac{\partial \omega_n}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{1}{\omega_0}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{grad} \psi_k \operatorname{grad} \omega_{n-k} - \frac{1}{\omega_0}\sum_{k=1}^{n} \omega_k Q_{n-k}, \tag{28}$$

где ω_0 и ω_n определяются по (10)—(11), принимая в них $\psi_0 = \text{const}$ и $\beta = 0$. Рассмотрим вопрос сходимости ряда (7) для случая кольцевой области и степенного закона упрочнения. Поскольку Q_0 — бесконечно раз дифференцируемая функция, то ψ_1, следовательно, и ψ_n будут также бесконечно раз дифференцируемые функции. Тогда вторые производные ψ_n удовлетворяют условию Гёльдера. В области Ω введем норму

$$\| X \| = \max |X| + \sup \frac{|X(M) - X(N)|}{MN^{\alpha_1}}, \tag{29}$$

где $0 < \alpha_1 < 1$, M и N — две произвольные точки в Ω. Очевидно, что для доказательства сходимости ряда (7) достаточно показать сходимость ряда $\sum_{k=m}^{\infty} \lambda^k \| Q_k \|$. Легко получить, что

$$\| XY \| \leq \| X \| \| Y \|. \tag{30}$$

Тогда из (28) будем иметь $\| Q_n \| \leq \left\| \frac{1}{\omega_0} \right\| \| V_n \|$,

$$\| V_n \| \leq \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial \omega_n}{\partial \theta} \right\| + \sum_{k=1}^{n} \| \omega_k \| \| Q_{n-k} \| + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial r} \right\| \left\| \frac{\partial \omega_{n-k}}{\partial r} \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_k}{\partial \theta} \right\| \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial \omega_{n-k}}{\partial \theta} \right\| \right\}. \tag{31}$$

Из вычислений и геометрических соображений находим, что $\left\| \frac{1}{\omega_0} \right\| \leq \frac{3 + \gamma^2 + \sigma(\alpha + \gamma)}{(\gamma^2 + \delta^2)^2}$, которое обозначим через $h/4$. На основании (30) получаем неравенства для нормы функции ω_n и ее первых производных. Далее применяем априорные оценки Шаудера, которые в нашем случае могут быть записаны в виде

$$\left\| \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r^2} \right\|, \quad \left\| \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r \partial \theta} \right\|, \quad \left\| \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \theta^2} \right\| < c \| Q_{n-1} \|, \tag{32}$$

где c — определенная постоянная, зависящая от геометрии области ([7—9]). Производя эти операции, получим

$$\| Q_n \| \leq 2chq_n + \frac{2ch}{\delta^2}\sum_{k=1}^{n} \| Q_{k-1} \| q_{n-k} + ch \sum_{k=1}^{n} \| Q_{n-k} \| q_k,$$

где

$$q_n = \| Q_{n-1} \| + 2c \sum_{k=1}^{n-1} \| Q_{k-1} \| \| Q_{n-k-1} \|. \tag{33}$$

Рассмотрим вспомогательный ряд с общим членом $\lambda^n n^{-\rho} R^n$, где ρ и R — некоторые положительные параметры, причем $\rho > 1$, а $R < 1$. Легко получить оценку

$$\sum_{k=1}^{N-1} k^{-\rho}(N-k)^{-\rho} \leq \frac{2^{\rho+1}}{\rho-1} N^{-\rho}. \tag{34}$$

Тогда методом индукции доказывается, что для последовательности (34) справедливо неравенство

$$\|Q_n\| \leq n^{-\rho} R_*^{-n},$$

где R_* корень уравнения

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \frac{1}{x}, \tag{36}$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2, положительны и явно выражаются через параметры α, γ, δ, c, ρ. Из предыдущего следует, что ряд (7) сходится абсолютно и равномерно с радиусом сходимости $\lambda = R_*$. Отметим, что доказательство единственности решения уравнения (6) с краевым условием (5)—тривиально.

Таким образом, сумма ряда (7) и суммы рядов, полученные при помощи дифференцирования (7) по r и по θ, представляют решение поставленной задачи.

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Դլանային խողովակի պլաստիկական վիճակը համատեղ ոլորման և ծռման դեպքում

Ուսումնասիրվում է պրիզմատիկ ձողի լարվածային վիճակն, որը գտնվում է ոլորող և ծռող մոմենտների, ինչպես նաև առանցքային ուժերի համատեղ ազդեցության տակ։ Ներմուծելով տեղափոխումների ψ ֆունկցիան, նյութի կամայական ամրապնդման $f(\xi)$ օրենքի համար խնդիրը բերվում է ձողի ընդլայնական հատվածքի Ω տիրույթում Նեյմանի խնդրի լուծմանը՝

$$\Delta\psi + \operatorname{grad}\psi \operatorname{grad} \ln f + \frac{\partial \ln f}{\partial \theta} = 0$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = \frac{d}{ds}\left(\frac{r_*^2}{2}\right) \tag{1}$$

որտեղ Δ-ն Լապլասի երկչափ օպերատորն է, Γ-ն տիրույթի եզրագիծն է, s-ը եզրագծի աղեղն է, ν-ն արտաքին նորմալը, r_*-ը եզրագծի կետերի հեռավորությունն է սկզբնակետից։

Լուծումը փնտրելով

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \psi_k(r, \theta) \tag{2}$$

տեսքով, որտեղ λ-ն ֆիզիկական պարամետր է, (1) խնդրի լուծումը բերվում է առաձգական խնդրի

$$\Delta\psi_0 = 0 \qquad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}\right|_{\Gamma} = \frac{d}{ds}\left(\frac{r^2}{2}\right) \tag{3}$$

և Նեյմանի ռեկուրենտ խնդիրների լուծմանը՝,

$$\Delta\psi_{n+1} = Q_n, \qquad \left.\frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial\nu}\right|_{\Gamma} = 0,$$

$$Q_n = \frac{\partial F_n}{\partial\theta} + \sum_{k=0}^{n} \operatorname{grad}\psi_k \operatorname{grad} F_{n-k}. \tag{4}$$

որտեղ F_n-ը ներկայացնում են $\ln f(\varepsilon)$ ֆունկցիայի աստիճանային շարքի վերլուծության գործակիցները:

Օղակային հատվածքի համար ապացուցվում է Նեյմանի խնդրի լուծելիության պայմանը և (4) խնդրի լուծումը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\psi_{n+1}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{1}\int_{0}^{2\pi} Q_n(\xi, \varphi) G(\xi, \varphi; r, \theta)\, \xi d\xi d\varphi$$

$$G(\xi, \varphi; r, \theta) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k + \delta^k r^{-k}}{k(1-\delta^{2k})} (\xi^k + \xi^{-k}) \cos k(\theta - \varphi) \tag{5}$$

Ամրապնդման աստիճանային օրենքի համար ψ_n ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալները բավարարում են Գյոլդերի պայմանին: Մտցնելով՝

$$\| X \| = \max|X| + \sup \frac{|X(M) - X(N)|}{MN^{\alpha_1}}$$

նորմը և օգտագործելով Շաուդերի վերացական գնահատականները, ապացուցվում են ստացված շարքերի բացարձակ և հավասարաչափ զուգամիտությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. А. Задоян*, „Известия АН Арм. ССР," Механика, т. 21 (1968). [2] *G. H. Handelman*, Quart. J Appl. Math. I (1944). [3] *Р. Хилл*, Математическая теория пластичности, ИЛ, М., 1956. [4] *S. Piechnik*, Arch. Mech. stos. т. 13, 1 (1961). [5] *S. Piechnik, M. Zyczkowsti*, Arch. Mech. stos. т. 13,5 (1961). [6] *М. А. Задоян*, ДАН СССР, т. 156, 1 (1964). [7] *J. Schauder*, Studia Math. 5, 1937 [8] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, „Наука", М., 1964. [9] *Р. Курант*, Уравнения с частными производными, „Мир", М., 1964.