ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LVI 1973 4

МАТЕМАТИКА

А. А. Азатян

Об одном классе комбинаторных объектов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 15/V 1973)

1. Определения. Из целочисленных положительных функций $l(h, i)$, $l(h+1, i), \ldots l(h+m-1, i)$, $p(h, i), p(h+1,i), \ldots p(h+m-1,i)$ составим таблицы $|l(h, i)p(h, i)l(h+1, i)p(h+1, i) \ldots l(h+m-1, i)p(h+m-1, i)|$, где: $i=1, 2, \ldots n$; $h=1, 2, \ldots t$; $m=f(h)$; m, n и h — целые, положительные. Назовем эти таблицы „m-таблицами“ и обозначим через (h, m) (1-таблицу назовем „таблицей“). „Местами m-таблицы“ назовем h-ые аргументы, „местами строки элемента в m-таблице“—i-ые аргументы. Функции $l(h, i)$, $l(h+1, i)$, . . . и $p(h, i)$, $p(h+1, i)$, . . . назовем соответственно „левоместными“ и „правоместными“ элементами. За положительные направления следования элементов, строк, столбцов и таблиц примем следующие: а) внутри таблиц, по столбцам—слева-направо; по строкам—сверху-вниз (от $i=1$ до $i=n$); б) по таблицам—по циклу (от $h=1$ через $h=t$ до $h=1$).

Под „s-элементом“ будем подразумевать такую s-выборку из s элементов, принадлежащих различным столбцам, в которой порядок следования элементов совпадает с порядком следования соответствующих столбцов. Каждому s-элементу сопоставим некоторое число S, используя следующее правило: наименьший разряд числового значения $(k-1)$-ого элемента $(k=1, 2, \ldots s)$ на единицу больше наибольшего разряда числового значения k-ого элемента. Два s-элемента с одинаковым числовым значением S при различных аргументах будем называть „равночисленными“ и „разноместными“ и, поэтому, „различными“. Любые совокупности из одинакового числа равночисленных элементов будем считать „одинаковыми по составу“.

Рассмотрим m столбцов $L_1, L_2, \ldots L_m$ левоместных и m столбцов $P_1, P_2, \ldots P_m$ правоместных элементов из некоторой таблицы (h, m). Каждый элемент из L_1 сопоставим с некоторым элементом из P_1; каждый, образованный из сопоставления, 2-элемент сопоставим с некоторым элементом из $L_2, \ldots$, наконец, каждый $(2m-1)$-элемент сопоставим с одним из элементов из P_m. Полученное множество из $2m$-элементов назовем „ассоциацией“ h-ой m-таблицы и обозначим

через $U_{h\cdot}^{m}$. „Левоместным“ и „правоместным“ m-столбцами некоторой m-таблицы назовем первую и вторую из пары совокупностей столбцов, составленных из первой и второй m-ки столбцов соответственно. Множество всех различных по составу $2m$-элементов ассоциаций таблицы (h, m) назовем „полным множеством ассоциаций“ h-ой m-таблицы и обозначим через $|U_h^m|$ (при $m=1$ индекс „m“ и индекс „h“ (за ненадобностью будут опускаться).

Разбивая некоторое множество $|n|$ на подмножества $|n_1|$, $|n_2|$,...$|n_v|$ ($v=1,2,...v$; $n=n_1+n_2+...+n_v$; $||n_v||=n_v$) по всем равночисленным элементам, назовем эти подмножества „группами равночисленности“. Две группы равночисленности, принадлежащие двум различным по составу совокупностям элементов, назовем „одноименными“, если элементы одной группы равночисленны с элементами другой. „Распределением“ множества $|n|$ назовем последовательность $(n; n_1, n_2, ... n_v)$. „Распределением m-таблицы“ назовем совокупность всех распределений столбцов $(l_1; l_{11}, l_{21},...l_{v1})$, $(p_1, p_{11}, p_{21},...b_{w1})$,...$(p_m; p_{1m}, p_{2m},...p_{wm})$ m-таблицы, где при $k=1, 2,...m$; $v=1, 2,...v$; $w=1, 2,...w$; $v=\varphi(k)$; $w=\psi(k)$.

Пусть t m_h-таблиц, занумерованы в порядке возрастания h ($h=1, 2,...t$; $m_h=f(h)$). Пусть каждое множество элементов, составляющих $2m_h$-ый столбец каждой h-ой m-таблицы полностью (либо частично) перекрывается с каждым множеством элементов, составляющих первый столбец каждой $(h+1)$-ой m-таблицы. Используя t-последовательность m-таблиц, составим, некоторую t-последовательность ассоциаций m-таблиц. Выбирая из каждого $|U_h^m|$ по одной ассоциации и располагая их в порядке возрастания h. Под „t-контакт-элементом“ будем подразумевать всякий r-элемент $(r=m_1+m_2+...+m_t)$, составленный путем последовательной выборки из построенной t-последовательности ассоциаций $2m$-элементов, при условии, что каждая пара, состоящая из $2m$-ого элемента U_h^m и первого элемента U_{h+1}^m—пара равночисленных элементов. (При $t=2$, $f(1)=f(2)=1$ и $r=2$ имеем 2-контакт-элемент, называемый далее просто „контакт-элементом“). Под „t-кольцом“ будем понимать $(t+1)$-контакт-элемент, в котором $(t+1)$-ый $2m$-элемент и первый $2m$-элемент равночислены и равноместны (т. е. представляют один и тот же $2m$-элемент). Каждой из t-последовательностей ассоциаций, соответствует своя „ассоциация t-контакта“ K^t, представляющая множество всех различных t-контакт-элементов, могущих быть образованными из данной t-последовательности. Множество всех различных ассоциаций K^t, составленное из всех различных t-последовательностей ассоциаций m-таблиц, назовем „полным множеством ассоциаций t-контакта“ и обозначим через $|K^t|$. В частности, при выполнении условия существования t-кольца будем иметь „ассоциации t-кольца“ R^t и их „полные множества“ $|R^t|$. (При $t=2$, $f(1)=f(2)=1$ будем иметь „ассоциации контакта“ K и полное множество $|K|$).

Пример 1. Даны функции $l(h, i)$ и $p(h, i)$ $(1 \leqslant h \leqslant 2,\ 1 \leqslant i \leqslant 4)$, поведение которых определяется из таблиц (1, 1) и (2, 1)

$$\begin{array}{cc} (1,1) & (2,1) \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

2-элементами таблицы (1,1) и (2,1) соответственно являются: 15, 16, 17, 25, 26, 27, 35, 36, 37 и 51, 53, 61, 62, 63, 71, 72, 73. Полное множество ассоциаций таблицы (1,1) состоит из следующих ассоциаций:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 7 \\ 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 7 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

4-элементы: 1551, 1661, 2552, 3773, . . . являются контакт-элементами, составленными из различных ассоциаций таблиц (1,1) и (2,1). Приведем некоторые из ассоциаций контакта, порождаемых различными ассоциациями $U_1 \in \{U_1\}$ и $U_2 \in \{U_2\}$:

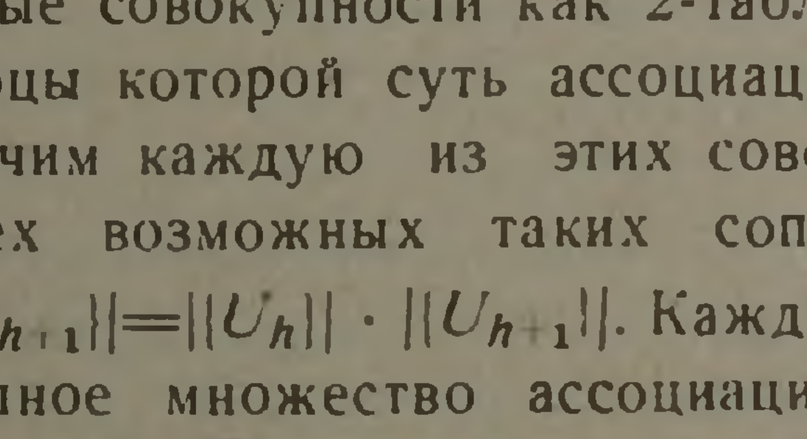
$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 7 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 7 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

а также некоторые ассоциации кольца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 & 6 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 7 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 7 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 5 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Распределения всех столбцов в таблицах идентичны: (4; 2, 1, 1). Мощности полных множеств ассоциаций таблиц (1,1) и (2,1) ввиду одинаковых распределений таблиц одинаковы: $|\{U_1\}| = |\{U_2\}| = 7$.

2. Каждую ассоциацию из $\{U_h\}$ сопоставим с одной из ассоциаций из $\{U_{h+1}\}$ и рассмотрим полученные совокупности как 2-таблицы, левоместный и правоместный 2-столбцы которой суть ассоциации из $\{U_h\}$ и $\{U_{h+1}\}$ соответственно. Обозначим каждую из этих совокупностей через $U_{\zeta_h} U_{\zeta_{h+1}}$, а множество всех возможных таких сопоставлений через $\{U_h U_{h+1}\}$. Очевидно, $|\{U_h U_{h+1}\}| = |\{U_h\}| \cdot |\{U_{h+1}\}|$. Каждый элемент из $\{U_h U_{h+1}\}$ порождает свое полное множество ассоциаций 2-таблицы; Обозначим эти ассоциации через $U^2_{\zeta_h \zeta_{h+1}}$, а их полное множество через $\{U^2_{\zeta_h \zeta_{h+1}}\}$. Полное множество всех полных множеств $\{U^2_{\zeta_h \zeta_{h+1}}\}$ $(\zeta_h = 1, 2, \ldots |\{U_h\}|$ и $\zeta_{h+1} = 1, 2, \ldots |\{U_{h+1}\}|)$, порождаемых из всех элементов $\{U_h U_{h+1}\}$, обозначим через $\{\{U^2_{h,h+1}\}\}$. Очевидно,



$$|\{|U^2_{h,h+1}|\}| = \sum_{u=1}^{u=|\{U_hU_{h+1}\}|} |u|U^2_{\zeta_h\zeta_{h+1}}|| \qquad (2.1)$$

Всякие ζ_h-ую и ζ_{h+1}-ую ассоциации, составляющие некоторый элемент из $|U_hU_{h+1}|$, разобьем соответственно на подмножества по всем группам равночисленности правоместного столбца U_{ζ_h} и левоместного столбца $U_{\zeta_{h+1}}$, называя эти разбиения „w-ыми подассоциациями U_{ζ_h}" и „v-ми подассоциациями $U_{\zeta_{h+1}}$". Если множества элементов правоместного столбца U_{ζ_h} и левоместного столбца $U_{\zeta_{h+1}}$ частично (или полностью) перекрывающиеся, то в каждом элементе из $|U_hU_{h+1}|$ можно выделить некоторую группу, характеризующуюся следующим свойством: правоместные элементы всякой w-ой подассоциации U_{ζ_h}, входящей в группу, равночисленны с левоместными элементами одной из v-ых подассоциаций $U_{\zeta_{h+1}}$, входящей в группу. Обозначим каждую такую группу через $|U^2_{h,\zeta,x}|$, где: $|U^2_{h,\zeta,x}| \in U_{\zeta_h\zeta_{h+1}}$, $||U^2_{h,\zeta,x}|| = x$, x—число одноименных групп равночисленности из правоместного столбца таблицы $(h, 1)$ и левоместного столбца таблицы $(h+1,1)$; так что каждое из множеств $|U^2_{h,\zeta,x}|$ разбивается на x подгрупп, различающихся по составу 4-элементов в зависимости от выбранной пары ассоциаций из $|U_h|$ и $|U_{h+1}|$; при этом в каждой x-ой подгруппе ($x = 1, 2, \ldots x$) число 2-элементов левоместного 2-столбца не обязательно равно числу 2-элементов правоместного 2-столбца, составляющих подгруппу. Дополняя (при необходимости) в каждой x-ой подгруппе число недостающих 2-элементов левоместного (либо правоместного) 2-столбца 2-элементами, составленными из любых элементов, неравночисленных с элементами из $(h, 1)$ и $(h+1,1)$, каждую вновь построенную совокупность можно рассматривать как x-ую таблицу $(\zeta_{h,h+1}, 1)_x$ ($\zeta_{h,h+1} = 1, 2, \ldots ||U_hU_{h+1}||$), если пренебречь при этом всеми правоместными элементами левоместного и левоместными элементами правоместного 2-столбцов x-ой подгруппы. Обозначая через $U_{h,\zeta,x}$ и $|U_{q,\zeta,x}|$ соответственно ассоциации и полные множества ассоциаций каждой таблицы $(\zeta_{h,h+1}, 1)_x$, можно теперь записать:

$$||K_h|| = \sum_{\zeta_{h,h+1}=1}^{\zeta_{h,h+1}=||U_hU_{h+1}||} \Big| \sum_{x=1}^{x=||U^2_{h,\zeta,x}||} \Big| \; ||U_{h,\zeta,x}||. \qquad (2.2)$$

С некоторым не принципиальным усложнением определений п. 1 соотношения (2.1), (2.2) легко распространятся на более общие случаи ($m > 1$, $t > 2$), что опущено ради краткости.

Для некоторого $n(n = l = p)$ рассмотрим множества всех различных k-ых и q-ых распределений $(l; l_{1k}\ l_{2k}, \ldots l_{vk})$ $(p; p_{1q}, p_{2q}, \ldots p_{wq})$, где $v = \varphi(k)$, $w = \psi(q)$, сопоставляя им соответствующие произведения: $a_k = (l_{1k}!) \cdot (l_{2k}!) \cdot \ldots \cdot (l_{vk}!)$ и $b_q = (p_{1q}!) \cdot (p_{2q}!) \cdot \ldots \cdot (p_{wq}!)$. Обозначая через $|U|_{n,k,q}$ полные множества ассоциаций таблиц с числом строк n при некоторых k-ом и q-ом распределениях столбцов и при-

нимая $|\{U\}_{n,k,q}|=F_n(a_k, b_q)$, заметим, что для $n=2, 3, 4, 5, 6$ имеет место:

$(a_1>a_2>\ldots)\prec\succ(F_n(a_1, b_q)\leqslant F_n(a_2, b_q)\leqslant \ldots)$ при всех q—фиксированных;

$(b_1>b_2>\ldots)\prec\succ(F_n(a_k, b_1)\leqslant F_n(a_k b_2)\leqslant \ldots)$ при всех k—фиксированных. (2.3)

Пример 2. На схеме 1 приводятся соответствующие (2.3) таблицы зависимостей $|\{U\}_{n,k,q}|=F_n(a_k b_q)$ для $n=3, 4, 5$. Представляет интерес изучение различных структурных и комбинаторных свойств

$F_3(a_k, b_q)$

b_q \ a_k	6	2	1
6	1	1	1
2	1	2	3
1	1	3	6

$F_4(a_k, b_q)$

b_q \ a_k	24	6	4	2	1
24	1	1	1	1	1
6	1	2	2	3	4
4	1	2	3	4	6
2	1	3	4	7	12
1	1	4	6	12	24

$F_5(a_k, b_q)$

b_q \ a_k	120	24	12	6	4	2	1
120	1	1	1	1	1	1	1
24	1	2	2	3	3	4	5
12	1	2	3	4	5	7	10
6	1	3	4	7	8	13	20
4	1	3	5	8	11	19	30
2	1	4	7	13	18	33	60
1	1	5	10	20	30	60	120

Схема 1. $|\{U\}_{n,k,q}=F_n(a_k; b_q)$; $n=3, 4, 5$.

множеств $\{U^m\}$, $\{K^t\}$ и $\{R^t\}$, и в связи с этим, разработка эффективных методов перечисления их элементов с заданием соответствующих списков этих элементов. Из вышеприведенного, в частности из (2.1) и (2.2), легко видеть, что эти задачи сводятся в первую очередь к проблеме конструктивного перечисления элементов простейших из таких объектов—элементов $\{U\}$. Для полноты рассмотрения можно было бы не ограничиться описанием двумерных структур, но также ввести определения, описывающие многомерные структуры, а также объекты, в которых „контактирующими" могли бы оказаться элементы одной и той же m-таблицы и др; однако ради краткости мы только указываем на них, отмечая, что изучение таких объектов также сводится к проблеме перечисления элементов $\{U\}$. Необходимость в разработке указанных проблем становится ясной, в частности, из наличия широкого класса прикладных комбинаторных задач („транспортные задачи с ограничениями", „задачи о назначениях" и др) ([1–6]). описываемых рассмотренными объектами. Приведем некоторые из них.

Задача 1. Дана некоторая m-таблица с определенным распределением. Требуется составить список всех ассоциаций из $\{U^m\}$ и вычислить $|\{U^m\}|$.

Задача 2. Дана некоторая t-последовательность m-таблиц. Требуется определить состав $|K^t|$ ($|R^t|$) и вычислить $||K^t||$ ($||R^t||$).

В частном случае, когда по условию задачи требуется выбирать только по одной ассоциации каждой из t m-таблиц, то очевидно, что число этапов решения задачи сокращается, хотя, как это видно из (2.2)

проблематичным остается вновь вопрос перечисления элементов $\{U_{q,c,x}\}$.

Рассмотрим одну из интерпретаций такой задачи.

Задача „о сборке". Имеется t различных наименований деталей по n деталей каждого наименования. Выбирая по одной детали каждого наименования можно собрать некоторый агрегат; который считается изготовленным тогда, когда детали соединены по циклу: I,II, . . .t-ая, I; при этом „конец" I детали соединяется с „началом" II детали, „конец" II—с „началом" III . . ., „конец" t-ой—с „началом" I. Известно, однако, что определенные „концы" могут быть соединены лишь с определенными „началами", а для некоторых „концов" не имеется соответствующих „начал". Требуется определить число различных вариантов сборки агрегатов и соответствующее каждому варианту число агрегатов.

В других случаях в задаче описывается такая ситуация, когда известны только m-таблицы, но неизвестно какие ассоциации из каждой m-таблицы могут участвовать в образовании множеств $\{K^t\}$ или $\{R^t\}$. Например, в следующей задаче.

З а д а ч а 3. Дана t-последовательность ($h=1, 2, \ldots t$) m-таблиц. Определить вероятности образования каждой из R^t.

Заметим, что проблема перечисления элементов $\{U\}$, имеющая решение в каждом частном случае с помощью различных методов комбинаторного анализа [1, 2, 7], принципиально неразрешима в общем виде, т. е. для как угодно свободного поведения функций $l(h, i)$, $l(h+1, i)$ . . . $p(h, i)$, $q(h+1, i)$ . . . над массивами (h, i), $(h+1, i)$,. . . Однако, как с точки зрения решения конкретных задач, так и в общетеоретическом аспекте, чем свободнее поведение этих функций над соответствующими массивами, тем больший интерес представляет изучение указанных обьектов. Называя класс комбинаторных объектов $\{U^m\}$. $\{K^t\}$ и $\{R^t\}$ и класс задач, описываемых этими объектами соответственно „ассоциативными классами" комбинаторных объектов и задач, заметим, что в настоящее время назрела необходимость рассмотрения решений этих задач с единой точки зрения; и в связи с расширением возможностей применения электронно-вычислительной техники сейчас возможна практическая реализация табулирования зависимостей списочных структур—элементов $\{U^m\}$, $\{K^t\}$, $\{R^t\}$ и т. д. и их мощностей от распределений соответствующих m-таблиц, либо от a_k b_q (см. пример 2). Наличие таких списков привело бы, с одной стороны, к стандартизации и типизации задач ассоциативного класса, к введению общих критериев оценки сложности данных задач и т. д., с другой стороны, открыло бы возможности для дальнейших теоретических исследований. В отдельной работе будет рассмотрен один из общих методов генерирования элементов $\{U\}$ с помощью моделирования программы перечисления элементов на ЭВМ.

Автор выражает признательность К. А. Рыбникову, Г. П. Егорычеву и А. Д. Лумпову, за внимательное обсуждение, а также Ф. В. Широкову за постановку задачи „о сборке".

Ереванский НИИ математических машин

Ա. Հ. ԱՋԱՏՅԱՆ

Միացությունների տեսությանը պատկանող օբյեկտների մի դաս

Սահմանվում է միացությունների տեսությանը պատկանող «գուպորդումներ» (կամ «ասոցիացիաներ») անվանված օբյեկտների մի դաս։ Ցույց է տրվում, որ ամենատարբեր գուպորդումների ուսումնասիրության խնդիրը կախված է ամենահասարակ գուպորդումների՝ « $|U|$ -բազմությունների» էլեմենտների կոնստրուկտիվ թվարկման հնարավորությունից։ Բերվում են գուպորդումների միջոցով նկարագրվող խնդիրների օրինակներ։ Ապացուցվում և հիմնավորվում գուպորդումների և նրանց լրիվ բազմությունների հզորությունների աղյուսակավորման պրոբլեմը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. А. Рыбников*, Введение в комбинаторный анализ, Изд. Московского университета, М., 1972. [2] *М. Холл*, Комбинаторика, пер. с англ., «Мир», М., 1970. [3] *М. Холл*, Блок-схемы. Сб. «Прикладная комбинаторная математика», 203—241, «Мир», М., 1968. [4] *В. Н. Бурков, С. Е. Ловецкий*, «Известия АН СССР», Техническая кибернетика, № 4, 82—93, 1968. [5] *А. А. Корбут и Ю. Ю. Финкельштейн*, Дискретное программирование, «Наука», М., 1969. [6] *Дж. Кемени* и *Дж. Снелл*, Конечные цепи Маркова, пер. с англ., «Наука», М., 1970. [7] *Дж. Риордан*, Введение в комбинаторный анализ., ИЛ., М., 1963.