

С. С. Агаян

МАТЕМАТИКА

УДК 517.

Разложение функций, определенных вне компактов на действительной оси, в ряды специального вида

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 30/X 1972)

Пусть E , $\text{mes } E > 0$ — произвольный компакт на действительной оси, а G — дополнение E $G = \{(\infty + \infty)/E\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$, и пусть $\gamma(z)$ гармоническая мера множества E относительно верхней полуплоскости. Обозначим через $\mu(z)$ функцию $\mu(z) = \bar{\gamma}(z) + i\gamma(z)$, где $\bar{\gamma}(z)$ — функция сопряжения $\gamma(z)$. И наконец, пусть функция $f(z)$ — определена на G . Мы назовем вообще рядом (1) от функции $f(z)$ всякий ряд:

$$(1) \quad f(z) \sim \frac{a_0(z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) \cos n\mu(z) + b_n(z) \sin n\mu(z)$$

„коэффициенты“ которого $a_0(z)$, $a_n(z)$, $b_n(z)$, $(n=1, 2, \dots)$ определяются формулами:

$$a_n(z) = \frac{2}{\pi} \int_G f(t) \cos n\mu(t) \frac{\sin \frac{1}{2} |\mu(t) - \mu(z)|}{t - z} dt$$

(2) и

$$b_n(z) = \frac{2}{\pi} \int_G f(t) \sin n\mu(t) \frac{\sin \frac{1}{2} |\mu(t) - \mu(z)|}{t - z} dt$$

где z — любая точка $z \in C/E$ C — комплексная плоскость.

Знак „ $\sim$ “ указывает на то, что мы построили ряд чисто формальным образом, и означает лишь, что $a_n(z)$, $b_n(z)$ связаны $f(z)$ формулой (2), причем не предполагается, что ряд вообще сходится, тем более сходится к функции $f(z)$.

Главным вопросом, как и в теории тригонометрических рядов, является вопрос, возможно ли, и в каких именно случаях, заменить знак „ $\sim$ “ знаком равенства. Поставленная таким образом задача эквивалентна задаче изучения ряда вообще. Цель предлагаемой работы есть рассмотрение вопросов, группирующихся около этой задачи:

а) в каком смысле и при каких условиях ряд (1) „представляет функцию“ $f(z)$;

б) скорость сходимости ряда (1);

для ряда нашего типа возникает и задача следующего сорта:

в) если имеем сходимость на G , то где, кроме G , ряд сходится, т. е. найти область сходимости ряда (1).

1. В этом пункте мы будем рассматривать вышеизложенные вопросы только для точек x , принадлежащих G .

Теорема 1. Если $f(z)$ абсолютно интегрируема на G , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = 0 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = 0$$

сходимость к нулю равномерна для любого отрезка $[a, b] \subset G$.

Доказательство теоремы опирается на доказательство существования обратной функции $\mu(x)$ на связном множестве G_j ($j = 1, 2, \dots$).

Принцип локализации Римана. Прежде чем сформулировать этот принцип, перепишем частичную сумму $S_n(f, x)$ ряда (1) в интегральной форме:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_G f(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})[\mu(t) - \mu(x)]}{t - x} dt$$

Теорема 2. (о локализации). Если $f(x)$ абсолютно интегрируема на G , то для любого x и $\delta > 0$ справедливо равенство или,

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{an\{x-\delta, x+\delta\}} f(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})[\mu(t) - \mu(x)]}{t - x} dt + o(1)$$

другими словами, поведение ряда (1) функции $f(x)$, $x \in G$ в некоторой точке x зависит исключительно от значений принимаемых функций в некоторой (произвольно малой) окрестности точки x .

Опираясь на эту теорему и нижесформулированную лемму, можно получить критерий сходимости ряда (1).

Лемма. Для любого x , $x \in G$ справедливо равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(1, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\sin(n + \frac{1}{2})[\mu(t) - \mu(x)]}{t - x} dt = 1$$

Теорема 3. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на G , то для того, чтобы в некоторой точке x , $S_n(f, x)$ сходилась к какому-то числу S , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - S}{t} \right| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \left| \mu(t+x) - \mu(x) \right| dt = 0,$$

где δ — любое положительное число с условием $(x-\delta, x+\delta) \cap E = \emptyset$.

Если мы хотим, чтобы в точке X ряд имел „естественную сум-

му^а, т. е. сумму, равную $f(x)$, то для этого необходимо взять $S=f(x)$

Если $f(x)$ непрерывна на (a, b) и $\varepsilon > 0$ любое, то для равномерной сходимости ряда (1) на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \left[\frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right] \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[\mu(t+x) - \mu(x) \right] dt = 0$$

равномерно на $[a, b]$, где δ — любое действительное число, удовлетворяющее неравенству $0 < \delta < \varepsilon$. Отсюда можно вывести интересные для приложений следствия.

Следствие. Если $f(x)$ абсолютно интегрируема на G и при фиксированном x интегралы

$$\int_{-\delta}^0 \left| \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} \right| dt \quad \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| dt$$

с некоторым δ существуют, то частичные суммы $S_n(f, x)$ ряда (1) функции f сходятся в этой точке к $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ где $f(x+0)$

и $f(x-0)$ суть левый и правый пределы функции в точке x (предполагается, что x есть точка разрыва первого рода f).

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b] \subset G$ и если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, так что сразу для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \varepsilon,$$

то ряд (1) для функции $f(x)$ сходится к ней равномерно на $[a, b]$.

Таким образом, мы получили разложение функции непериодической, более того, неопределенной в некотором компакте E , $E \subset (-\infty + \infty)$ в ряды типа (1).

Теорема 4. Если $f(x)$ ограниченная и непрерывная функция на G , то справедливо равенство:

$$S_n(f, x) = 0 \quad (\ln n)$$

2. В пункте 1 мы рассматривали вопрос о сходимости ряда (1) только на G , теперь перейдем к вопросу: в каких точках, кроме точек G , ряд (1) вообще сходится, тем более сходится к функции $f(z)$. Справедлива

Теорема 5. Если ограниченная функция $f(z)$ аналитична в C/E и стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, то ряд (1) сходится к $f(z)$ для $z \in C/E$ более того, ряд (1) сходится к $f(z)$ со скоростью геометрической прогрессии, т. е.

$$|S_n(f, z) - f(z)| \leq K \cdot q^n,$$

где K — константа, q — константа, зависящая только от z , ($q < 1$).

Автор выражает глубокую признательность С. Н. Мергеляну за постановку задачи и внимание к работе.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Ս. ԱՂԱՅԱՆ

Իրական առանցքին պատկանող կոմպակտից դուրս որոշված ֆունկցիայի
ներկայացումը հատուկ շարքով

Դիցուք E ($\text{mes } E > 0$), որն է կոմպակտ է իրական առանցքի վրա, G -ն նրա լրացումն է իրական առանցքի նկատմամբ $G = \{(-\infty, \infty) \setminus E\}$: Նշանակենք E բազմություն հարմոնիկ չափը վերին կիսահարթության նկատմամբ $\gamma(z)$ -ով, իսկ $\mu(z)$ -ով հետևյալ ֆունկցիան $\gamma(z) + i\gamma(z)$, որտեղ $\gamma(z)$ -ն $\gamma(z)$ -ի համարյա ֆունկցիան է: Եվ վերջապես ունենք $f(z)$, ֆունկցիան որոշված G -ի վրա: Կազմենք հետևյալ շարքը՝

$$f(z) \sim \frac{a_0(z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) \cos n\mu(z) + b_n(z) \sin n\mu(z)$$

որի «գործակիցները» $a_0(z)$ $a_n(z)$ $b_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) որոշված են՝

$$a_n(z) = \frac{2}{\pi} \int f(t) \cos n\mu(t) \frac{\sin \frac{1}{2} [\mu(t) - \mu(z)]}{t - z} dt$$

$$b_n(z) = \frac{2}{\pi} \int f(t) \sin n\mu(t) \frac{\sin \frac{1}{2} [\mu(t) - \mu(z)]}{t - z} dt$$

որտեղ z -ը ցանկացած կետ է C/E տիրույթից (C -կոպլեքս հարթությունն է):

Հիմնական հարցը, որն ուսումնասիրված է ներկա աշխատանքում, դա այն է, թե ինչպիսի պայմանների դեպքում և որտեղ G -ի վրա, G -ից դուրս, կարելի է փոխարինել « $\sim$ » նշանը հավասարության նշանով:

Այս շարքերի համար առաջանում է նաև այսպիսի հարց՝ եթե ունենք դուրս դրամիտությունը G -ի վրա, ապա որտեղ բացի G -ից շարքը զուգամետ է: ճիշտ է հետևյալը.

Թեորեմ. Եթե սահմանափակ ֆունկցիան $f(z)$ առաջիտիկ է C/E -ում և ձգտում է զերոյին, երբ $z \rightarrow \infty$, ապա $S_n(f, z)$ զուգամիտում է $f(x)$ -ին այն z -ի համար, որոնք $z \in C/E$ (որտեղ $S_n(f, z)$ շարքի մասնավոր գումարն է): Ստացված է զուգամիտության արագությունը: