ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LVI 1973 4

УДК 8.74

МАТЕМАТИКА

А. Г. Пилипосян

Некоторые преобразования логических схем

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 13/VI 1972)

А. А. Ляпуновым был разработан операторный язык программирования, основные структуры которого были описаны в работах ([1-4]). Операторный язык программирования представляет собой некоторый алгебраический аппарат, с помощью которого можно исследовать возможности преобразования логических схем. В операторном языке введены понятия логических схем разных уровней и, следовательно, ставится вопрос о разработке системы преобразований, обеспечивающих переход от логических схем высокого уровня к логическим схемам низкого уровня. Такие преобразования рассматриваются, в частности, в работах ([1,5]), но к сожалению, они не всегда сохраняют эквивалентность логических схем.

В работе ([6]) определяется новый вариант операторного языка, являющийся существенным расширением предыдущих вариантов. Там же приводятся разные понятия эквивалентности логических схем— классическая эквивалентность, структурная эквивалентность, частичная и узкая эквивалентность, эквивалентность по независимым выходам, которые будут использованы в настоящей работе.

В данной работе определяются логические схемы разных уровней и описывается ряд преобразований, которые обеспечивают переход от логических схем высокого уровня к логическим схемам более низкого уровня, сохраняя некоторые соотношения эквивалентности. В логических схемах высокого уровня широко используются параметрические элементы.

Основная задача преобразования логических схем заключается в том, чтобы освободиться от параметрических элементов логической схемы.

1. Ниже приводятся некоторые преобразования, дающие возможность освободиться от стрелок произведения.

Пусть задана логическая схема

$$S = S_1 S_2 \ldots S_k \ldots S_p \ldots S_{n-1}\ S_n, \qquad (1.1)$$

где $S_k = \downarrow^w$, $S_p = \uparrow^w$, w—параметрический параметр. Тогда к (1.1) заданы параметрические функции определения параметра—f_w и параметрический предикат достоверности значения параметра—$\backepsilon_w$. Тогда имеет место.

Теорема 1.1. *Если в логической схеме* (1.1) *заменить элементы* S_k и S_p *соответственно на элементы* $\downarrow^N f_w$ *и* $\backepsilon_w \uparrow^N$, *где* N *натуральное число, отличное от номеров стрелок управления логической схемы* S, *то вновь полученная схема* S *будет логической схемой эквивалентной* S.

Определение 1.1. Логическую схему назовем логической схемой программы, если она не содержит стрелок произведений.

Кусок логической схемы (1.1), включенный между сопряженными стрелками произведения, включая эти стрелки, назовем циклом по параметру w. Мы скажем, что параметр w локализован в цикле, если он не является входной переменной ни одного элемента логической схемы, записанной вне цикла по w. Применяя к S теорему 1.1, получим

$$S^* = S_1 \ldots \downarrow^N f_w \ldots \backepsilon_w \uparrow^N \ldots S_n$$

Пусть M_f, N_f и $M_\backepsilon$, $N_\backepsilon$ входы и выходы операторов f_w и $\backepsilon_w$ соответственно. Тогда

Теорема 1.2. *Если параметр* w *локализован в цикле по* w *и* $w \sqsubseteq M_f$ *и* $N_f \sqcap M_\backepsilon = N_\backepsilon \sqcap M_f$—*пустое множество, то логическая схема*

$$S' = S_1 \ldots f_w \downarrow^N \ldots f_w \backepsilon_w \uparrow^N \ldots S_n \tag{1.2}$$

частично эквивалентна логической схеме S^*.

Теорема 1.3. *Если* w *локализован в цикле по* w, $w \sqsubseteq M_f$ *и* $N_\backepsilon \sqcap M_f$—*пустое, а* $M_\backepsilon \sqcap N_f$—*не пустое множество, то*

$$S'' = S_1 \ldots f_w \downarrow^N \ldots L f_w \backepsilon_{1w} \uparrow^N \ldots S_n$$

частично эквивалентна логической схеме S.

Здесь L—оператор присваивания $(w \to y)$ (y—не содержится в S^*), а $\backepsilon_{1w}$—логический оператор $\backepsilon_w$, во входе которого w заменен переменным y.

2. Мы постараемся определить новый вид оператора, имеющий в логических схемах программ управляющий характер.

Пусть заданы функции определения параметра $i = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и предикат достоверности значения параметра $\backepsilon(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ с выходом $x_\backepsilon$.

Оператор, реализующий произведение $F \cdot \backepsilon$ назовем оператором индексации и обозначим через $Y(F, \backepsilon)$. Входом оператора индексации является набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots y_m)$, а выходом—$(i, x_\backepsilon)$.

Теперь покажем, как используется этот оператор в логических схемах.

Пусть задана логическая схема (1.1), удовлетворяющая условиям теоремы 1.2. Тогда можно ее привести к виду (1.2).

В (1.2), заменяя все произведения вида $f_w \sigma_w$ на операторы индексации $Y(f_w, \sigma_w)$, получим логическую схему эквивалентной S' и следовательно частично эквивалентной S. Такую схему назовем логической схемой программы с оператором индексации.

Очевидно, что вид логической схемы программы с операторами индексации вполне соответствует принципам реализации программ на ЭВМ с индексными регистрами. В этом случае параметрические операторы соответствуют структуре команд с модификацией адресов по содержанию индексных регистров. Ясно также, что в силу не универсальности функций индексных регистров, в современных ЭВМ пока легко реализуются только логические схемы ограниченного класса.

3. Ниже описываются некоторые преобразования, дающие возможность избавиться в логической схеме от параметрических операторов.

Пусть задан параметрический оператор глубины один $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. Каждому значению $(i_1^0, i_2^0, \ldots, i_n^0)$ набора параметров он сопоставляет некоторый оператор $A_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_n^0}$.

Определение 3.1. Оператором формирования значения параметрического элемента $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ назовем оператор с входом $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, выходом Z (операторное переменное), отображающий каждое значение, $(i_1^0, i_2^0, \ldots, i_n^0)$, принадлежащее области изменения его входа на элемент, сопоставленный этому значению параметрической функцией $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$.

Оператор формирования обозначим через

$$\Phi(i_1, i_2, \ldots, i_n; A_{i_1, i_2 \ldots i_n}; Z).$$

Тогда имеет место следующее утверждение

Теорема 3.1. *Пусть задан параметрический элемент глубины один $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. Тогда операторный кусок*

$$\Phi(i_1, i_2, \ldots, i_n; A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}; Z) \cdot Z$$

эквивалентен по независимым выходам элементу $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$.

Из этой теоремы легко вытекает следующее

Следствие 3.1. *Пусть задан параметрический элемент глубины n*

$$\overline{A} = A_{\substack{k_1^1 k_2^1 \ldots k_{n_1}^1 \\ k_1^2 k_2^2 \ldots k_{n_2}^2 \\ \cdots\cdots \\ k_1^n k_2^n \ldots k_{n_n}^n}} \tag{1.3}$$

Тогда $\overline{A}$ эквивалентен по независимым выходам операторному куску схемы

$$\Phi(k_1^n, k_2^n, \ldots, k_{n_n}^n; \overline{A}; Z_n) Z_n Z_{n-1} \ldots Z_2 Z_1,$$

где оператор Ф *отображает набор параметров глубины 1 на оператор формирования*

$$Ф(k_1^{n-1}, k_2^{n-1}, \ldots, k_{n_{n-1}}^{n-1}; A; Z_{n-1})$$

который является значением операторного переменного Z_n *и т. д.* Операторному переменному Z_1, будет присвоено значение параметрического элемента (1.3).

Если применять такие замены ко всем параметрическим элементам логической схемы S, то получим новую логическую схему эквивалентную по независимым выходам первичной логической схеме.

4. Операторы формирования непосредственно не реализуются на ЭВМ, поэтому необходимо их реализовать с помощью операторов более низкого уровня. Ниже описывается один из возможных способов их реализации.

Пусть задан параметрический элемент $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ с невырожденной параметризацией и набор параметров

$$(i_1', i_2', \ldots, i_n')$$

с областью изменения T', содержащей только одно значение $(i_{10}, i_{20}, \ldots, i_{n0})$.

Определение 4.1. Оператор формирования с входом $(i_1', i_2', \ldots, i_n')$ и выходом Z, приписывающий выходу значение $A_{i_{10} i_{20} \ldots i_{n0}}$, назовем оператором восстановления и обозначим через

$$R(i_1', i_2', \ldots, i_n'; A_{i_1 i_2 \ldots i_n}; Z).$$

Определение 4.2. Оператором переадресации назовем оператор с входом $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, Z)$, где Δ_i—шаг параметра i, Z—операторная переменная, и выходом—Z, реализующий отображение: каждому значению $(\Delta_1^0, \Delta_2^0, \ldots, \Delta_n^0, A_{i_1^k i_2^k \ldots i_n^k})$ сопоставляет значение операторной переменной Z, являющееся значением параметрического элемента $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, соответствующее значению

$$(i_1^k + \Delta_1^0, i_2^k + \Delta_2^0, \ldots, i_n^k + \Delta_n^0).$$

Оператор переадресации будем обозначать через

$$F(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n; A_{i_1 i_2 \ldots i_n}; Z).$$

Пусть заданы параметрический элемент $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, операторы формирования $Ф(i_1, i_2, \ldots i_n; A_{i_1 i_2 \ldots i_n}; Z)$, переадресации $F(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n; A_{i_1 i_2 \ldots i_n}; Z)$, восстановления $R(i_1', i_2', \ldots, i_n'; A_{i_1 i_2 \ldots i_n}; Z)$ и оператор B с входом $(i_1, i_2, \ldots, i_n, i_1', i_2', \ldots, i_n')$, выходом $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$, приписывающий $i_k - i_k' => \Delta_k$.
Тогда

Теорема 4.1. *Если параметризация* $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ *невырожденная, то оператор формирования* Ф *и произведение операторов* RBF *бу-*

дут узко эквивалентными по независимым выходам. Без труда результат, аналогичный утверждению теоремы 4.1, может быть распространен на случай параметрического элемента глубины n.

Применение теоремы 4.1 к операторам формирования логической схемы приводит нас к следующему утверждению.

Пусть задана логическая схема S_1, содержащая операторные куски $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_m^{(1)}$. Пусть S_2 логическая схема, полученная из S_1, заменой $A_i^{(1)}$ на $A_i^{(2)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Введем обозначения

$$P_{i\text{м}} = M_{A_i^{(1)}} \cap M_{A_i^{(2)}}$$

и

$$P_{i\text{х}} = N_{A_i^{(1)}} \cap N_{A_i^{(2)}}.$$

Теорема 4.2. *Пусть $A_i^{(1)}$ и $A_i^{(2)}$ узко эквивалентны по независимым выходам. Если ни для одного значения входа схем S_1 и S_2 не имеет место ни одно из следующих утверждений:*

а) переменные из $M_{A_i^{(j)}} - P_{i\text{м}}$ не являются входными переменными ни одного элемента схемы, выполняющегося до оператора $A_i^{(j)}$;

б) переменные из $N_{A_i^{(j)}} - P_{i\text{х}}$ не являются входными переменными ни одного элемента схемы, выполняющегося после операторного куска $A_i^{(j)}$; то S_1 и S_2 узко эквивалентны по независимым выходам.

Из теоремы 4.2, в частности, следует, что после замены операторов формирования логической схемы на соответствующие произведения операторов RBF, полученная логическая схема будет узко эквивалентной по независимым выходам первичной логической схеме.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Հ. Գ. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ

Տրամաբանական սխեմաների մի քանի ձևափոխություններ

Աշխատանքում տրվում է տրամաբանական սխեմաների մի քանի ձևափոխությունների նկարագրությունը, որոնք ապահովվում են անցումը բարձր մակարդակի տրամաբանական սխեմաներից ավելի ցածր մակարդակի սխեմաներին, պահպանելով նրանց համարժեքությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] А. А. *Ляпунов,* Сб. Проблемы кибернетики, вып. I, 5—22, Физматгиз, 1958. [2] А. А. *Ляпунов,* Сб. Проблемы кибернетики, вып. I, 46—74, Физматгиз, М., 1958. [3] А. А. *Ляпунов,* Сб. Проблемы кибернетики, вып. 6, 235—241, Физматгиз, М., 1962. [4] *Р. И. Подловченко,* Сб. Проблемы кибернетики, вып. 7, 161—188, Физматгиз, М., 1962. [5] *А. Г. Пилипосян, С. М. Давтян,* Труды ВЦ АН Арм. ССР и ЕрГУ, вып. III, 5—40, изд. АН Арм. ССР, 1965. [6] *А. Г. Пилипосян,* ДАН Армянской ССР, том LVI, № 1, 1973.