ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LVI 1973 3

УДК 517.94

МАТЕМАТИКА

В. А. Яврян

Об асимптотике спектральной матрицы-функции канонической системы дифференциальных уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 3/X 1972)

1. Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений

$$Jy' + V(x)y = \lambda y \qquad (0 \leq x < l) \tag{1}$$

при граничном условии

$$y_2(0, \lambda) = 0. \tag{2}$$

Мы предполагаем, что

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} -B(x) & -A(x) \\ -A(x) & B(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

где I—единичная матрица n-го порядка, $A(x)$ и $B(x)$ вещественные матрицы-функции n-го порядка, локально суммируемые на $(0, l)$.

Пусть прямоугольная матрица-функция $(2n \times n)$ $\chi(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$J\chi' + V(x)\chi = \lambda\chi$$

и граничному условию

$$\chi_1(0, \lambda) = I, \qquad \chi_2(0, \lambda) = 0.$$

Как известно, существует неубывающая матрица-функция $\sigma(\lambda)$ (т. н. спектральная матрица-функция задачи (1), (2)) n-го порядка, такая, что для любой l-финитной вектор-функции $f(x)$ $(0 < x < l)$ имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_0^l f^*(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda)\, d\sigma(\lambda) F(\lambda),$$

где

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \chi^*(x, \lambda) f(x)\, dx.$$

Цель этой заметки — найти асимптотику спектральной матрицы-функции $\rho(\lambda)$. Этот вопрос при $n=1$, $l=+\infty$ рассматривался в ([1]) и монографии ([2]).

Сначала приведем одну теорему, доказательство которой основано на известной тауберовой теореме В. А. Марченко ([3]).

Теорема 1. *Пусть неубывающая функция $\tau(\lambda)$ такая, что*

1) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau(\lambda)}{1+\lambda^2}<+\infty,$$

2) *функция*

$$\Omega(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{i\lambda x}{1+\lambda^2}-e^{i\lambda x}\right)\frac{d\left(\tau(\lambda)-\frac{\lambda}{\pi}\right)}{\lambda^2}\tag{3}$$

имеет первую абсолютно непрерывную производную для $|x|<l$ причем

$$\Omega'(x)=\Omega'(0)+2\int_0^x H(s)\,ds,$$

где $H(s)$ удовлетворяет условию Дини в нуле:

$$\int_0^\delta\frac{|H(s)-H(+0)|}{s}\,ds<\infty\qquad(\delta>0).$$

Тогда существует такая постоянная C, не зависящая от l и $V(x)$, что

$$\overline{\lim_{N,M\to\infty}}\left|\int_{-N}^{M}d\left(\tau(\lambda)-\frac{1}{\pi}\lambda\right)-\frac{1}{\pi i}(H(-0)-H(+0))\ln\frac{N}{M}-(H(-0)+\right.$$

$$\left.+H(+0))\right|\leqslant\frac{C}{l}.\tag{4}$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ любая дважды непрерывно дифференцируемая функция на всей оси, финитная вне $(-l, l)$. Умножим обе части (3) на $f''(x)$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$. После изменения порядка интегрирования и интегрирования по частям, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}E_f(\lambda)\,d\tau(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E_f(\lambda)\,d\lambda=2\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{H(x)}dx,\tag{5}$$

где $E_f(\lambda)$ есть преобразование Фурье функции $f(x)$:

$$E_f(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}f(x)dx.$$

Теперь применим тауберовую теорему 4.1 В. А. Марченко ([3], стр. 404), которая, очевидно, имеет место и для двупараметрического семейства функций $T(N, M, \lambda)$, обладающего свойствами A, B, C ([3], стр. 388). Возьмем

$$T(N, M, \lambda)=\begin{cases}1, & -N<\lambda<M\\ 0, & \lambda<-N, \quad \lambda>M\\ \frac{1}{2}, & \lambda=-N, \quad \lambda=M\end{cases}$$

Тогда получим

$$\overline{\lim_{N,M\to\infty}}\left|\int_{-N}^{M} d\left(\tau(\lambda)-\frac{1}{\pi}\lambda\right)-2\int_{-\infty}^{\infty} f(N, M, x)\varphi\left(\frac{x}{l}\right)\overline{H(x)}\,dx\right|<\frac{C}{l}, \tag{6}$$

где

$$f(N, M, x)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{iMx}-e^{-iNx}}{ix},$$

а $\varphi(x)$—бесконечно дифференцируемая четкая функция

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq\frac{2}{3}\\ 0, & |x|\geq 1\\ 0\leq\varphi(x)\leq 1, & \frac{2}{3}\leq|x|\leq 1\end{cases}$$

Для любого $0<a<\frac{2}{3}l$ будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(N, M, x)\varphi\left(\frac{x}{l}\right)\overline{H(x)}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{e^{iMx}-e^{-iNx}}{ix}\overline{H(x)}\,dx+o(1)$$

при $M, N\to+\infty$

Из условий теоремы можно получить, что

$$\int_{-a}^{a}\frac{e^{iMx}-e^{-iNx}}{x}\overline{H(x)}\,dx=(\overline{H(+0)}-\overline{H(-0)})\ln\frac{N}{M}+i\pi(\overline{H(+0)}+\overline{H(-0)})+o(1).$$

Учитывая, что $H(t)=\overline{H(-t)}$ и соотношение (6), получаем (4).

Теорема 2. *Если матрица $V(x)$ непрерывна в $x=0$ и удовлетворяет условию Дини в нуле, то для спектральной матрицы функции задачи* (1), (2) *справедлива следующая асимптотика:*

$$\overline{\lim_{M,N\to+\infty}}\left|\int_{-N}^{M} d\left(\rho(\lambda)-\frac{1}{\pi}\lambda I\right)-\frac{1}{\pi}B(0)\ln\frac{N}{M}-A(0)\right|\leq\frac{C}{l}, \tag{7}$$

где C—некоторая постоянная.

Доказательство. В работах М. Г. Крейна ([1] при $n=1$) и Ф. Э. Мелик-Адамяна ([5], общий случай) установлено, что если $\rho(\lambda)$ есть спектральная матрица-функция задачи (1), (2), то матрица-функция $\Omega(x)$ имеет первую абсолютную непрерывную производную в интервале $(-2l, 2l)$. Следовательно, для произвольного n-мерного вектора a, функция $(\rho(\lambda)a, a)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и для нее справедлива асимптотика (4).

Отсюда следует, что (4) имеет место также и для матрицы-функции $\rho(\lambda)$. Остается выразить матрицы $H(+0)$ и $H(-0)$ через $A(x)$ и $B(x)$.

С этой целью заметим ([1,5]), что по функции $2\Gamma_{2r}(0, 2r)=A(r)+iB(r)$ функция $H(t)$ восстанавливается единственным образом, при этом

$$\Gamma_r(t, s)+\int_0^r H(t-u)\Gamma_r(u, s)du=H(t-s) \quad (0\leq t, s\leq r<2l).$$

Отсюда следует, что $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и

$$H(-0)=\frac{1}{2}(A(0)+i(B(0)), \qquad H(+0)=\frac{1}{2}(A(0)-iB(0)).$$

Подставляя эти значения в (7), получаем (4).

В случае, когда $l=\infty$ легко получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Если матрица $V(x)$ непрерывна в $x=0$ и удовлетворяет в $x=0$ условию Дини, то для спектральной матрицы-функции задачи* (1), (2) *на полуоси имеет место формула*

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\lambda I-\frac{1}{\pi}B(0)\ln\lambda+o(1), & \text{при } \lambda\to+\infty\\ \frac{1}{\pi}I-\frac{1}{\pi}B(0)\ln|\lambda|-A(0)+o(1), & \text{при } \lambda\to-\infty.\end{cases} \tag{8}$$

Следует отметить, что в ([1]) и монографии ([2], стр. 510) в одномерном случае ($n=1$) приведена неверная формула, а именно в асимптотике $\rho(\lambda)$ опущены логарифмический и свободный члены.

Так как любая симметрическая система уравнений $2n$-го порядка с общими самосопряженными граничными условиями унитарным преобразованием приводится к канонической системе (1), (2), то нетрудно переписать асимптотические формулы (7) и (8) в общем случае.

2. Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений 1-го порядка на всей оси

$$By'+V(x)y=\lambda y \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{9}$$

где $V(x)$ — симметрическая локально суммируемая матрица-функция n-го порядка, а B — постоянная матрица, удовлетворяющая условиям

$$B^2=-I, \qquad B^*=-B.$$

Пусть n-мерная матрица $\chi(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$B\chi' + V(x)\chi = \lambda\chi \qquad (-\infty < x < \infty)$$

и нормирована условием

$$\chi(0, \lambda) = I \tag{10}$$

Известно, что существует неубывающая n-мерная матрица-функция $\sigma(\lambda)$ (спектральная матрица-функция задачи (9)) такая, что для любой финитной вектор-функции справедливо тождество:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda) d\sigma(\lambda) F(\lambda),$$

где

$$F(\lambda) = \int_{0}^{\infty} \chi^*(x, \lambda) f(x) dx.$$

Справедлива следующая

Теорема 4. *Если* $V(x)$ *непрерывна в* $x=0$ *и*

$$\int_{-h}^{h} \left| \frac{V(x) - V(0)}{x} \right| dx < +\infty,$$

то

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \lambda I + \frac{1}{4\pi} (B + BV(0)B) \ln|\lambda| + o(1), \quad \textit{при} \quad |\lambda| \to \infty \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим через $\rho(\lambda)$ спектральную матрицу-функцию следующей задачи:

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_1' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V(x) & 0 \\ 0 & V(-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{12}$$

$$y_1(0, \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{2} I, \quad y_2(0, \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{2} I. \tag{13}$$

Тогда нетрудно проверить, что $2\sigma(\lambda) = \rho(\lambda)$. С помощью унитарного преобразования

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} I & -B \\ I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

задача (12), (13) приводится к виду

$$JZ' + W(x) Z = \lambda Z \qquad (0 \leq x < \infty)$$

$$Z_1(0) = I, \quad Z_2(0) = 0$$

где

$$W(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V(x) + V(-x) & -V(x)B + V(-x)B \\ BV(x) - BV(-x) & -B(V(x) + V(-x))B \end{pmatrix}$$

Существует перестановочное с J унитарное преобразование $H(x)$ (см. ([6])), с помощью которого эта последняя задача приводится к каноническому виду

$$JU'+\tilde{V}(x)U=\lambda U \quad (0\leqslant x<\infty)$$

$$U_1(0,\lambda)=I, \qquad U_2(0,\lambda)=0,$$

где

$$Z=H(x)U, \qquad \tilde{V}(x)=\begin{pmatrix}-B(x) & -A(x)\\ -A(x) & B(x)\end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $H(0)=I$ легко получить

$$B(0)=-\frac{1}{2}\,V(0)+BV(0)B, \qquad A(0)=0.$$

Так как $\rho(\lambda)$ будет спектральной матрицей-функцией этой последней задачи, то по теореме 3 получаем

$$\rho(\lambda)=\frac{1}{\pi}\,\lambda I+\frac{1}{2\pi}\,(V(0)+BV(0)B)\ln|\lambda|+o(1) \qquad (|\lambda|\to\infty)$$

что и доказывает равенство (11).

Отметим, что асимптотику $\sigma(\lambda)$ можно получить и в том случае, когда матрица $V(x)$ имеет разрыв в $x=0$, т. е. $V(+0)\neq V(-0)$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ա. ՅԱՎՐՅԱՆ

Դիֆերենցիալ հավասարումների կանոնիկ սիստեմի սպեկտրալ մատրից-ֆունկցիայի ասիմպտոտիկայի մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է (1), (2) խնդրի սպեկտրալ ֆունկցիայի ասիմպտոտիկան։ Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ. Եթե $V(x)$ մատրիցը անընդհատ է 0 կետում և այնտեղ բավարարում է Դինիի պայմանին, ապա տեղի կունենա հետևյալ ասիմպտոտիկան՝

$$\overline{\lim_{M,N\to\infty}}\left|\int_{-N}^{M} d\left(\rho(\lambda)-\frac{1}{\pi}\lambda I\right)-\frac{1}{\pi}\,B(0)\ln\frac{N}{M}-A(0)\right|\leqslant\frac{C}{l},$$

որտեղ $\rho(\lambda)$*-ն (1), (2) խնդրի սպեկտրալ ֆունկցիան է, իսկ* C*-ն հաստատուն է։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. С. Саргсян*, ДАН СССР, т. 166, № 5 (1966). [2] *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян*, Введение в спектральную теорию, Изд. «Наука», М., 1970. [3] *В. А. Марченко*, Известия АН СССР, сер. матем., 19, 381—422, (1955). [4] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР, т. 105, № 4 (1955). [5] *Ф. Э. Мелик-Адамян*, ДАН Арм. ССР, т. XV, № 4, (1967). [6] *В. М. Адамян*, ДАН СССР, т. 178, № 1 (1968).