ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVI 1973 2

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

В. М. Адамян, М. Т. Яворский

К теории канонических систем дифференциальных уравнений на полуоси

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 4/VII 1972)

1. Пусть J—матрица порядка $2n$, такая, что

$$J^2=-I, \tag{1}$$

где I—единичная матрица. Полагая

$$P_{\pm}=\frac{1}{2}(I\mp iJ),$$

будем считать, что ранги матриц $P_{\pm}$ равны числу n. Из равенства (1) следует, что $P_{\pm}$ эрмитовы, и что

$$P_{\pm}^2=P_{\pm}.$$

Из множества матриц, описываемого формулой

$$P(K)=\frac{1}{2}(I+P_{+}K^*+KP_{+}),$$

где K—любая матрица, удовлетворяющая условиям

$$K^*K=P_{+}, \quad KK^*=P_{-},$$

зафиксируем одну и в дальнейшем будем обозначать ее через P_0. Отметим, что

$$P_0JP_0=0.$$

Обозначим через $H(x)$—матрицу-функцию порядка $2n$, обладающую следующими свойствами:

1) при любом $x\in[0, \infty]$ матрица $H(x)$ строго положительна;

2) элементы $H(x)$ являются абсолютно непрерывными функциями на полуоси $[0, \infty)$;

3) гильбертовы нормы матриц $H'(x)$ и $H_{\infty}-H(x)$, где H_{∞}—строго положительная матрица перестановочная с J, удовлетворяют условию

$$\int_0^{\infty}[\,\|H'(x)\|+\|H_{\infty}-H(x)\|\,]dx<\infty.$$

Настоящая заметка посвящена выяснению некоторых положений спектральной теории дифференциального оператора D_H, задаваемого при помощи выражения

$$(D_H f)(x) = -H^{-1}(x) J f'(x)$$

на множестве гладких быстро убывающих вектор-функций ($(2n\times 1)$-матриц) на полуоси $(0, \infty)$, таких, что

$$P_0 J f(0) = 0.$$

Замыкание D_H в гильбертовом пространстве $L_2^{(2n)}(0, \infty; H)$ с нормой, определяемой по формуле

$$\| f \|^2 = \int_0^\infty dx f^*(x) H(x) f(x),$$

является самосопряженным оператором. Этот оператор мы также будем обозначать через D_H. Изучение свойств оператора D_H с различных точек зрения уже предпринималось многими авторами. Более старые результаты в этом направлении систематизированы в книге ([1]), а новые пути к таким задачам указаны в работах ([2,3]). К этому же кругу вопросов можно отнести результаты монографии ([4]), а также работы ([5]), связанные с дифференциальным оператором

$$L = -J \frac{d}{dx} + V(x),$$

где $V(x)$—эрмитова матрица-функция.

В предлагаемой заметке устанавливается ряд свойств фундаментальных вектор-функций оператора D_H, приводится теорема о разложении по собственным вектор-функциям, а также изучается группа унитарных операторов в $L_2^{(2n)}(0, \infty, H)$, порожденная оператором D_H. Основные предложения работы ([5]) в ней распространяются на более общий случай, доставляемый оператором D_H.

2. Рассмотрим дифференциальную систему

$$-J \frac{d}{dx} Y(x, \lambda) = \lambda H(x) Y(x, \lambda), \tag{2}$$

где $Y(x, \lambda)$—матрица-функция, а λ—комплексный параметр. Как известно, каждой $(2n\times 2n)$—матрице Y_0 отвечает единственное абсолютно непрерывное решение системы (2), удовлетворяющее условию

$$Y(0, \lambda) = Y_0.$$

Это решение дается формулой

$$Y(x, \lambda) = E(x, \lambda) Y_0,$$

где $E(x, \lambda)$—абсолютно непрерывная матричная функция, удовлетворяющая уравнению (2) и условию

$$E(0, \lambda) = I. \tag{3}$$

Матрицу-функцию, удовлетворяющую общей дифференциальной системе первого порядка и условию (3) мы в дальнейшем будем называть фундаментальным решением.

Напомним, что для $E(x, \lambda)$ при любом $x \in [0, \infty)$ из эрмитовости и непрерывности матрицы-функции $H(x)$ вытекают равенства

$$E^*(x, \lambda)JE(x, \lambda) = E(x, \lambda)JE^*(x, \bar{\lambda}) = J$$

и оценки

$$\| E(x, \lambda) \| = \| E^{-1}(x, \lambda) \| \leqslant \exp |\lambda| \int_0^x \| H(s) \| ds|.$$

Остальные свойства $H(x)$, перечисленные выше, влекут за собой ряд дополнительных соотношений для фундаментального решения. Приведем некоторые из них и наметим путь их вывода.

В силу тривиального тождества

$$JH(x) = H^{-1/2}(x)[H^{1/2}(x)JH^{1/2}(x)]H^{-1/2}(x),$$

где $H^{1/2}(x)$ — положительный квадратный корень из $H(x)$, матрица $JH(x)$ подобна антиэрмитовой матрице $iQ(x)$,

$$Q(x) = -iH^{1/2}(x)JH^{1/2}(x).$$

Сигнатура матрицы $Q(x)$ при всех x, очевидно, совпадает с сигнатурой матрицы $-iJ$. Поэтому $Q(x)$ с помощью унитарного преобразования $U(x)$ можно привести к виду

$$Q_0(x) = U^*(x)Q(x)U(x) = \begin{pmatrix} Q_+(x), & 0 \\ 0, & -Q_-(x) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $Q_\pm(x)$ — строго положительные матрицы порядка n.

Обозначим через $U(\infty)$ унитарную матрицу, для которой

$$Q_0(\infty) = -iU^*(\infty)H_\infty^{1/2}JH_\infty^{1/2}U(\infty) = \begin{pmatrix} Q_+(\infty), & 0 \\ 0, & -Q_-(\infty) \end{pmatrix},$$

где $Q_\pm(\infty)$ — диагональные положительные матрицы порядка n. В силу свойств 1)—3) матрицы-функции $H(x)$ среди унитарных матриц-функций, удовлетворяющих условию (4) найдется матрица-функция $U(x)$ с абсолютно непрерывными элементами, такая, что

$$\int_0^\infty [\, \| U(\infty) - U(x) \| + \| U'(x) \| \,] dx < \infty.$$

Полагая

$$E(x, \lambda) = H^{-1/2}(x)U(x)\tilde{E}(x, \lambda)U^*(0)H^{1/2}(0),$$

получаем, что $\tilde{E}(x, \lambda)$ является фундаментальным решением уравнения

$$\frac{d}{dx}\tilde{E}(x, \lambda) = i\lambda Q_0(x)\tilde{E}(x, \lambda) + V(x)\tilde{E}(x, \lambda),$$

где

$$V(x) = U^*(x)H^{1/2}(x)\left[\frac{d}{dx}H^{-1/2}(x)\right]U(x) + U^*(x)\frac{d}{dx}U(x).$$

Подчеркнем, что

$$\int_0^{\infty} \| V(x) \| dx < \infty.$$

В свою очередь матрица-функция $\tilde{E}(x, \lambda)$ представима в виде

$$\tilde{E}(x, \lambda) = \tilde{E}_0(x, \lambda)F(x, \lambda),$$

где $E_0(x, \lambda)$—фундаментальное решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\tilde{E}_0(x, \lambda) = i\lambda Q_0(x)\tilde{E}_0(x, \lambda),$$

а $F(x, \lambda)$—непрерывное решение матричного интегрального уравнения

$$F(x, \lambda) = I + \int_0^x \tilde{E}_0^*(s, \lambda)V(s)E_0(s, \lambda)F(s, \lambda)ds.$$

Если $Im\lambda = 0$, то

$$\tilde{E}_0^*(s, \lambda)\tilde{E}(s, \lambda) = I$$

и

$$\| F(x, \lambda) \| \leq \exp\left\{\int_0^x \| V(s) \| ds\right\}.$$

Поэтому при $Im\lambda = 0$ для фундаментального решения $E(x, \lambda)$ справедливы оценки

$$\| E(x, \lambda) \| = \| E^{-1}(x, \lambda) \| \leq \| H^{-1/2}(x) \| \exp\left\{\int_0^x \| V(s) \| ds\right\}.$$

При $x \to \infty$ матрица-функция $A(x, \lambda) = \exp(-\lambda xJH_\infty)E(x, \lambda)$ стремится к пределу $A(\lambda)$ равномерно на каждом конечном отрезке вещественной λ-оси.

Легко видеть, что

$$\| H_\infty^{-1} \|^{-1} \exp\left\{-2\int_0^{\infty} \| V(s) \| ds\right\} \leq A^*(\lambda)A(\lambda) \leq \| H_\infty^{-1} \| \exp\left\{2\int_0^{\infty} \| V(s) \| ds\right\}. \tag{5}$$

3. Пусть Z_0—унитарная матрица, с помощью которой проектор P_0 приводится к диагональному виду по формуле

$$Z_0^* P_0 Z_0 = \begin{pmatrix} I_n, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу (5) можно утверждать, что в формуле

$$Z_0^* P_0 A^*(\lambda) A(\lambda) P_0 Z_0 = \begin{pmatrix} G(\lambda), & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

матрица $G(\lambda)$ при всех вещественных λ положительна и имеет ранг n. Обозначим через $\Delta(\lambda)$ матрицу обратную к $G(\lambda)$ и рассмотрим гильбертово пространство $L_2^{(n)}(-\infty, \infty; \Delta)$ измеримых $(n \times 1)$—матриц-функций $\varphi(\lambda)$, определенных на вещественной оси и таких, что

$$\| \varphi \|_\Delta^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\lambda) \Delta(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda < \infty.$$

Подчеркнем, что для $\Delta(\lambda)$ справедливы оценки

$$\|H_\infty^{-1}\|^{-1} \exp \left\{ -2 \int_0^\infty \|V(s)\| ds \right\} I_n \leqslant \Delta(\lambda) \leqslant \|H_\infty^{-1}\| \exp \left\{ 2 \int_0^\infty \|V(s)\| ds \right\} I_n.$$

Теорема 1. *Формулы*

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty Z_0^* P_0 E(x, \lambda) H(x) f(x) dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, \lambda) P_0 Z_0 \Delta(\lambda) \varphi(\lambda) d(\lambda) \tag{6}$$

осуществляют взаимно обратные и изометрические отображения $L_2^{(2n)}(0, \infty; H)$ *на* $L_2^{(n)}(-\infty, \infty; \Delta)$ *и* $L_2^{(n)}(-\infty, \infty; \Delta)$ *на* $L_2^{(2n)}(0, \infty; H)$, *переводящие друг в друга оператор* D_H *и оператор умножения на независимую переменную в* $L_2^{(n)}(-\infty, \infty, \Delta)$. *При этом интегралы в* (6) *сходятся в смысле метрики в* $L_2^{(n)}(-\infty, \infty; \Delta)$ *и* $L_2^{(2n)}(0, \infty; H)$ *и имеет место равенство*

$$\int_0^\infty f^*(x) H(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\lambda) \Delta(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda.$$

В случае, когда $H_\infty - H(x) = 0$ при $x > a > 0$, теорема может быть доказана с помощью приведенных выше соотношений и с использованием известного метода направляющих функционалов М. Г. Крейна ([6]).

Переход к общему случаю может быть осуществлен на основании следующего замечания: если теорема 1 верна для каждого члена последовательности матриц-функций $H_n(x)$, удовлетворяющих условиям 1)—3), и если эта последовательность сходится к матрице-функции $H(x)$ того же класса, так, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty [\, \| H(x)-H_n(x) \| + \| H'(x)-H_n'(x) \| \,] dx = 0,$$

то теорема верна и для $H(x)$.

4. Пусть D_∞ — самосопряженный оператор в пространстве $L_2^{(2n)}(0, \infty; H_\infty)$, соответствующий частному случаю $H(x) \equiv H_\infty$. Так как пространства $L_2^{(2n)}(0, \infty; H_\infty)$ и $L_2^{(2n)}(0, \infty; H)$ состоят из одних и тех же элементов, то имеют смысл произведения операторов

$$\exp(-iD_H t)\exp(iD_\infty s), \qquad \exp(iD_\infty s)\exp(-iD_H t), \qquad -\infty < t,\ s < \infty.$$

Теорема 2. *Волновые операторы*

$$W_\pm(D_H, D_\infty) = s - \lim_{t\to\pm\infty} \exp(iD_H t)\exp(-iD_\infty t)$$

существуют и изометрически отображают пространство $L_2^{(2n)}(0, \infty; H_\infty)$ *на* $L_2^{(2n)}(0, \infty; H)$. *Их действие определяется формулами*

$$(W_\pm(D_H, D_\infty) f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(x, \lambda) P_0 Z_0 \Delta(\lambda) A_\pm(\lambda) \tilde{\varphi}(\lambda) d\lambda,$$

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \int_0^\infty Z_0^* P_0 \exp(-\lambda s J H_\infty) f(s)\, ds,$$

где

$$A_\pm(\lambda) = 2Z_0^* P_0 A^*(\lambda) P_\pm P_0 Z_0.$$

Следствие 1. *Операторы D_∞ и D_H изоморфны, причем*

$$W_\pm(D_H, D_\infty)\, E_\lambda^{(\infty)} W_\pm^*(D_H, D_\infty) = E_\lambda^{H},$$

где $E_0^{(\infty)}$ и $E_\lambda^{(H)}$ — разложения единицы операторов D_∞ и D_H соответственно.

Оператор рассеяния $S(D_H, D_\infty)$,

$$S(D_H, D_\infty) = W_+^*(D_H, D_\infty) W_-(D_H, D_\infty),$$

перестановочен с D_∞, и в пространстве $L_2^{(n)}(0, \infty; \Delta)(\Delta_\infty(\lambda) \equiv I_n)$ он действует как оператор „умножения" на матрицу-функцию $\hat{S}(\lambda)$,

$$\hat{S}(\lambda) = A_-(\lambda) A_+^{-1}(\lambda).$$

Заметим, что также как и в (5) матрицы-функции $A_+(\nu)$ и $A_-(\lambda)$ являются граничными значениями ограниченных аналитических матриц-функций соответственно в верхней и нижней полуплоскостях и связаны со спектральной плотностью соотношениями

$$\Delta(\lambda) = (A_\pm(\lambda) A_\pm^*(\lambda))^{-1}.$$

Кроме того, в случае, когда матрица-функция $H_\infty - H(x)$ имеет финитный носитель, группа унитарных операторов, порожденная оператором D_H, укладывается в схему теории рассеяния П. Лакса и Р. Филлипса (7).

Авторы выражают благодарность М. Г. Крейну за ценное обсуждение.

Одесский государственный
университет

Վ. Մ. ԱԴԱՄՅԱՆ, Մ. Տ. ՅԱՎՈՐՍԿԻ

Կանոնական դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների մասին կիսառանցքի վրա

Դիցուք J $(2n\times 2n)$—մատրիցը բավարարում է հետևյալ պայմաններին

$$J^2=-I,\qquad J^*=-J,\qquad SpJ=0,$$

որտեղ՝ I—միավոր մատրից է, իսկ $H(x)$ $(2n\times 2n)$—մատրից-ֆունկցիա է $(0, \infty)$ կիսառանցքի վրա, որի էլեմենտները բացարձակ անընդհատ ֆունկցիաներ են, յուրաքանչյուր x համար $H(x)$ խիստ դրական մատրից է և օժտված է

$$\int_0^\infty \{\|H_\infty-H(x)\|+\|H'(x)\|\}dx<\infty$$

հատկությամբ, որտեղ՝ H_∞ խիստ դրական մատրից է և տեղափոխելի J հետ։ Աշխատանքում ստացված են բանաձևեր

$$D_H=-H^{-1}(x)J\frac{d}{dx}$$

կանոնական դիֆերենցիալ օպերատորի սպեկտրալ խտության և S-մատրիցը հաշվելու համար։ D_H որոշված է $(0, \infty)$ կիսառանցքի վրա տրված ողորկ ֆունկցիաների բազմության վրա, որոնք բավարարում են

$$\int_0^\infty dx f^*(x)H(x)f(x)<\infty \qquad \text{հատկությանը։}$$

Միաժամանակ ստացված են $E(x, \lambda)$ ֆունդամենտալ մատրից-ֆունկցիայի մի շարք հատկություններ։
$E(x, \lambda)$ հանդիսանում է

$$-JE'(x, \lambda)=\lambda H(x)E(x, \lambda);\quad Im\lambda=0$$
$$E(0, \lambda)=I$$

սիստեմի անընդհատ լուծումը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Аткинсон*, Дискретные и непрерывные краевые задачи, гл. 9, М., Мир, 1968. [2] *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*, ДАН Арм. ССР, т. 46, № 4, 1968, 150—155. [3] *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*, Функц. анализ, т. 4, вып. 4 (1970). [4] *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян*, Введение в спектральную теорию, изд. «Наука», М., 1970. [5] *В. М. Адамян*. ДАН СССР, 178, 1 (1968). [6] *М. А. Наймарк*. Линейные дифференциальные операторы, М., изд. «Наука», 1969. [7] *П. Лакс, Р. Филлипс*, Теория рассеяния, Изд. «Мир», М., 1971.