ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LVI 1973 1

УДК 536.2.01

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

Об одной задаче течения тепла в составном шаре

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6/VII 1972)

Вопрос об определении теплового поля в однородных стержне и цилиндре, движущихся по направлению своей оси, был рассмотрен в ([1, 2]). Различными авторами ([3–6]) решено множество задач распределения температуры в сплошном и полом цилиндрах с движущимися источниками тепла. Задача определения температурного поля, создаваемого в неограниченной пластинке движущимся точечным или распределенным источником тепла, рассмотрена в ряде исследований ([7–10]), посвященных изучению тепловых процессов при сварке. В ([11]) решена задача определения температуры во вращающемся цилиндре при наличии теплообмена с двумя окружающими средами, в ([12]) —задача распространения тепла в цилиндре, вращающемся в неподвижном полом цилиндре.

В настоящей работе рассматривается течение тепла в неоднородном шаре, составленном из неподвижной полой сферы и находящегося внутри нее шара с различными теплофизическими характеристиками, вращающегося вокруг оси oz с постоянной угловой скоростью ω_1 (рис. 1), когда на внешней поверхности $r=R_2$ задано распределение температуры. Предполагаем, что при вращении шара на поверхности раздела $r=R_1$ возникает тепло, линейно зависящее от температуры соприкасающихся поверхностей. В этом случае тепловое поле внутреннего шара будет квазистационарным ([13]) и если обозначим через U_1 температуру внутри

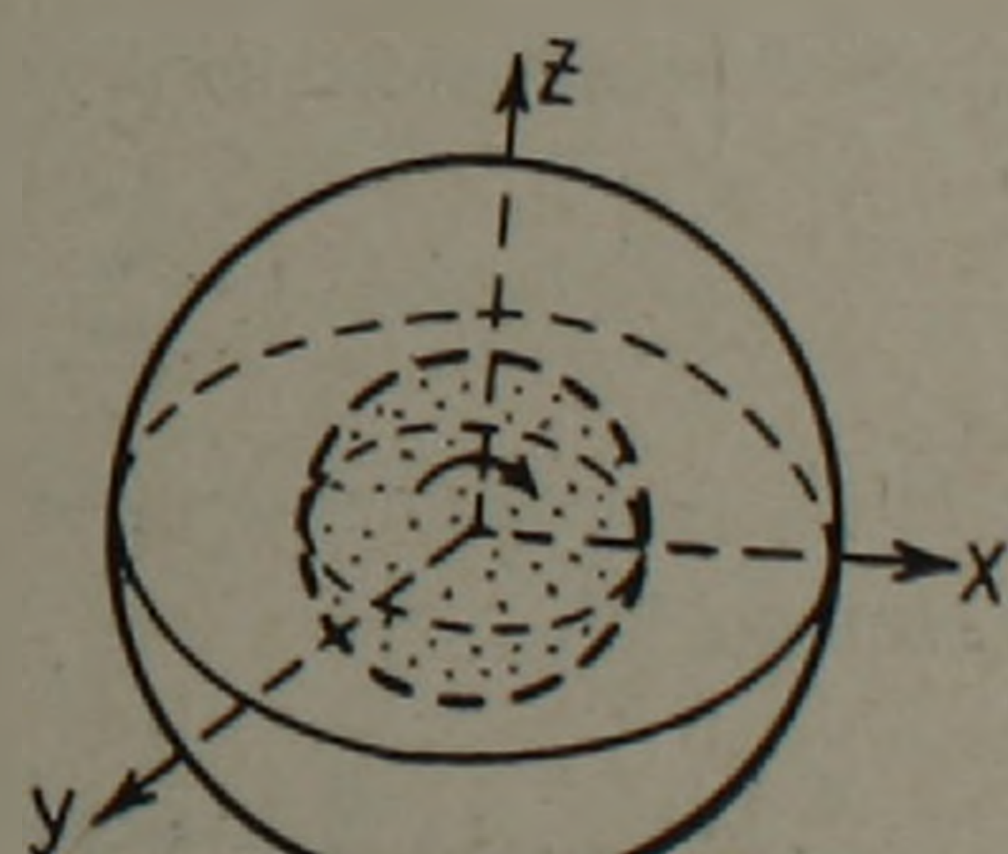

Рис. 1.

шара ($0<r<R_1$), а через U_2—температуру сферы ($R_1<r<R_2$), то U_1 и U_2 будут удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям в неподвижной системе координат ([8, 13]):

$$\omega_l \frac{\partial U_l}{\partial \varphi} = \frac{a_l}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U_l}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial U_l}{\partial \Theta}\right)+\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial^2 U_l}{\partial \varphi^2}\right], \quad (l=1;\ 2) \qquad (1)$$

где $\omega_2=0$, условиям сопряжения на поверхности $r=R_1$

$$U_1(R_1, \varphi, \Theta)=U_2(R_1, \varphi, \Theta); \quad \left[\lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=R_1} = C(\varphi, \Theta)+AU_1(R_1, \varphi, \Theta) \tag{2}$$

и условию на поверхности $r=R_2$

$$U_2(R_2, \varphi, \Theta)=S(\varphi, \Theta). \tag{3}$$

Здесь $C(\varphi, \Theta)$ и A—коэффициенты, характеризующие интенсивность теплообразования при трении.

Прежде чем перейти к получению решения, преобразуем уравнения (1), введя обозначения:

$$\cos\Theta=\zeta, \; U_l(r, \varphi, \Theta)=r^{-\frac{1}{2}}U_l^*(r, \varphi, \zeta). \tag{4}$$

Тогда функции $U_1^*(r, \varphi, \zeta)$ и $U_2^*(r, \varphi, \zeta)$ будут удовлетворять уравнениям

$$\omega_l \frac{\partial U_l^*}{\partial \varphi} = \frac{a_l}{r^2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_l^*}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left((1-\zeta^2)\frac{\partial U_l^*}{\partial \zeta}\right) + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2 U_l^*}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{4}U_l^*\right], \tag{5}$$

а также следующим граничным условиям:

$$U_2^*(R_2, \varphi, \zeta)=R_2^{\frac{1}{2}}S^*(\varphi, \zeta); \quad U_1^*(R_1, \varphi, \zeta)=U_2^*(R_1, \varphi, \zeta);$$

$$\left(\lambda_1\frac{\partial U_1^*}{\partial r} - \lambda_2\frac{\partial U_2^*}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R_1} = R_1^{\frac{1}{2}}C^*(\varphi, \zeta)+\left(A+\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2R_1}\right)U_1^*(R_1, \varphi, \zeta). \tag{6}$$

Разложим U_1^* и U_2^* в ряд по присоединенным функциям Лежандра и показательным функциям:

$$U_l^*(r, \varphi, \zeta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}F_{j,k}^{(l)}(r)P_j^k(\zeta)e^{ik\varphi}, \qquad (l=1;\ 2) \tag{7}$$

где $P_j^k(\zeta)$ — присоединенные функции Лежандра, удовлетворяющие уравнению [14]

$$\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{d}{d\zeta}P_j^k(\zeta)\right]+\left[j(j+1)-\frac{k^2}{1-\zeta^2}\right]P_j^k(\zeta)=0,$$

причём

$$P_j^{-k}(\zeta)=\frac{(-1)^k(j-k)!}{(j+k)!}P_j^k(\zeta); \quad P_j^k(\zeta)=0 \quad \text{при} \quad k>j;$$

$$F_{j,k}^{(l)}(r)=\frac{1}{2\pi D_{j,k}}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}U_l^*(r, \varphi, \zeta)\,P_j^k(\zeta)e^{-ik\varphi}d\zeta d\varphi\cdot$$

$$D_{j,k}=\int\limits_{-1}^{1}[P_j^k(\zeta)]^2\,d\zeta=\frac{2(j+k)!}{(2j+1)(j-k)!}.$$

Умножая (5) на $\frac{1}{2\pi D_{j,k}}P_j^k(\zeta)e^{-ik\varphi}d\zeta\,d\varphi$ и интегрируя по φ от 0 до 2π, а по ζ от -1 до $+1$, для определения $F^{(l)}_{j,k}(r)$ получаем дифференциальные уравнения

$$F^{(l)''}_{j,k}(r)+\frac{1}{r}F^{(l)'}_{j,k}(r)-\left[\frac{ik\omega_l}{a_l}+\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{r^2}\right]F^{(l)}_{j,k}(r)=0, \tag{8}$$

решая которые и удовлетворяя граничным условиям (6), имеем

$$F^{(1)}_{j,k}(r)=\frac{2}{\delta_{j,k}}\left[\lambda_2(2j+1)R_2^{\frac{1}{2}}S_{j,k}+R_1^{\frac{3}{2}}C_{j,k}H_j\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right]J_{j+\frac{1}{2}}(\mu_k r),$$

$$F^{(2)}_{j,k}(r)=\frac{1}{\delta_{j,k}}\left\{R_2^{\frac{1}{2}}S_{j,k}\left[H_j\left(\frac{r}{R_1}\right)\left(2\lambda_1R_1\mu_kJ'_{j+\frac{1}{2}}(\mu_kR_1)-(2AR_1+\lambda_1-\lambda_2)J_{j+\frac{1}{2}}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times(\mu_kR_1)\right)+\lambda_2(2j+1)J_{j+\frac{1}{2}}(\mu_kR_1)G_j\left(\frac{r}{k_1}\right)\right]+C_{j,k}R_1^{\frac{3}{2}}J_{j+\frac{1}{2}}(\mu_kR_1)H_j\left(\frac{R_2}{r}\right)\right\}, \tag{9}$$

где обозначено

$$\mu_k=\sqrt{-\frac{i\omega_1k}{a_1}};\quad G_j(r)=r^{j+\frac{1}{2}}+r^{-j-\frac{1}{2}};\quad H_j(r)=r^{j+\frac{1}{2}}-r^{-j-\frac{1}{2}};$$

$$\delta_{j,k}=H_j\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left[2\lambda_1R_1\mu_kJ'_{j+\frac{1}{2}}(\mu_kR_1)-(2AR_1+\lambda_1-\lambda_2)J_{j+\frac{1}{2}}(\mu_kR_1)\right]+$$

$$+\lambda_2(2j+1)J_{j+\frac{1}{2}}(\mu_kR_1)G_j\left(\frac{R_2}{R_1}\right); \tag{10}$$

$$S_{j,k}=\frac{1}{2\pi D_{j,k}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}S^*(\varphi,\zeta)P_j^k(\zeta)e^{-ik\varphi}\,d\zeta\,d\varphi;$$

$$C_{j,k}=\frac{1}{2\pi D_{j,k}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}C^*(\varphi,\zeta)P_j^k(\zeta)e^{-ik\varphi}\,d\zeta\,d\varphi;$$

Группируя в (7) взаимно сопряжённые члены и учитывая (4), получаем

$$U_l(r,\varphi,\Theta)=r^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{g^{(l)}_{j,0}(r)}{2}P_j(\cos\Theta)+\sum_{k=1}^{j}\left[f^{(l)}_{j,k}(r)\sin k\varphi+\right.\right.$$

$$\left.\left.+g^{(l)}_{j,k}(r)\cos k\varphi\right]P_j^k(\cos\Theta)\right\}.\qquad (l=1;\ 2) \tag{11}$$

Выражения для $f^{(l)}_{j,k}(r)$ и $g^{(l)}_{j,k}(r)$, согласно (9) и (10), имеют вид:

$$f_{j,k}^{(1)}(r)=\frac{2}{L_{j,k}^2(R_2)+M_{j,k}^2(R_2)}\Big\{L_{j,k}(R_2)\Big[\lambda_2(2j+1)\Big(n_{j,k}v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)-$$

$$-m_{j,k}u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)\Big)+H_j\Big(\frac{R_2}{R_1}\Big)\Big(d_{j,k}v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)-c_{j,k}u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)\Big)\Big]+$$

$$+M_{j,k}(R_2)\Big[\lambda_2(2j+1)\Big(n_{j,k}u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)+m_{j,k}v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)\Big)+$$

$$+H_j\Big(\frac{R_2}{R_1}\Big)\Big(d_{j,k}u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)+c_{j,k}v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)\Big)\Big]\Big\};$$

$$g_{j,k}^{(1)}(r)=\frac{2}{L_{j,k}^2(R_2)+M_{j,k}^2(R_2)}\Big\{L_{j,k}(R_2)\Big[\lambda_2(2j+1)\Big(n_{j,k}u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)+$$

$$+m_{j,k}v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)\Big)+H_j\Big(\frac{R_2}{R_1}\Big)\Big(d_{j,k}u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)+c_{j,k}v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)\Big)\Big]+$$

$$+M_{j,k}(R_2)\Big[\lambda_2(2j+1)\Big(n_{j,k}v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)-m_{j,k}u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)\Big)+$$

$$+H_j\Big(\frac{R_2}{R_1}\Big)\Big(d_{j,k}v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)-c_{j,k}u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k r)\Big)\Big]\Big\};$$

$$f_{j,k}^{(2)}(r)=\frac{1}{L_{j,k}^2(R_2)+M_{j,k}^2(R_2)}\Big\{L_{j,k}(R_2)\Big[n_{j,k}M_{j,k}(r)-m_{j,k}L_{j,k}(r)+ \qquad (12)$$

$$+H_j\Big(\frac{R_2}{r}\Big)\Big(d_{j,k}v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)-c_{j,k}u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)\Big)\Big]-M_{j,k}(R_2)\Big[n_{j,k}L_{j,k}(r)+$$

$$+m_{j,k}M_{j,k}(r)+H_j\Big(\frac{R_2}{r}\Big)\Big(d_{j,k}u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)+c_{j,k}v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)\Big)\Big]\Big\};$$

$$g_{j,k}^{(2)}(r)=\frac{1}{L_{j,k}^2(R_2)+M_{j,k}^2(R_2)}\Big\{L_{j,k}(R_2)\Big[n_{j,k}L_{j,k}(r)+m_{j,k}M_{j,k}(r)+$$

$$+H_j\Big(\frac{R_2}{r}\Big)\Big(d_{j,k}u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)+c_{j,k}v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)\Big)\Big]+M_{j,k}(R_2)\Big[n_{j,k}M_{j,k}(r)-$$

$$-m_{j,k}L_{j,k}(r)+H_j\Big(\frac{R_2}{r}\Big)\Big(d_{j,k}v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)-c_{j,k}u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)\Big)\Big]\Big\}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\gamma_k=\sqrt{\frac{\omega_1 k}{a_1}};\qquad m_{j,k}=\frac{R_2^{\frac{1}{2}}}{\pi D_{j,k}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}S(\varphi,\theta)P_j^k(\cos\theta)\sin k\varphi\sin\theta\, d\theta\, d\varphi;$$

$$n_{j,k}=\frac{R_2^{\frac{1}{2}}}{\pi D_{l,k}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}S(\varphi,\theta)P_j^k(\cos\theta)\cos k\varphi\sin\theta\, d\theta\, d\varphi;$$

$$c_{j,k}=\frac{R_1^{\frac{3}{2}}}{\pi D_{j,k}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} C(\varphi,\,\theta)P_j^k(\cos\theta)\sin k\varphi\sin\theta d\theta d\varphi;$$

$$d_{j,k}=\frac{R_1^{\frac{3}{2}}}{\pi D_{j,k}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} C(\varphi,\,\theta)P_j^k(\cos\theta)\cos k\varphi\sin\theta d\theta d\varphi; \tag{13}$$

$$L_{j,k}(r)=[2\lambda_1\gamma_k R_1 u'_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)-(2AR_1+\lambda_1-\lambda_2)u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)]H_j\left(\frac{r}{R_2}\right)+$$

$$+\lambda_2(2j+1)\,u_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)G_j\left(\frac{r}{R_1}\right);$$

$$M_{j,k}(r)=[2\lambda_1\gamma_k R_1 v'_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)-(2AR_1+\lambda_1-\lambda_2)v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)]H_j\left(\frac{r}{R_1}\right)+$$

$$+\lambda_2(2j+1)v_{j+\frac{1}{2}}(\gamma_k R_1)G_j\left(\frac{r}{R_1}\right);$$

$u_\nu(r)=ber_\nu(r)$ и $v_\nu(r)=bei_\nu(r)$ — функции Томсона первого рода ν-го порядка.

В заключение рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Если $\omega_1=0$ (а следовательно и $C(\varphi,\,\theta)\equiv A=0$), получаем стационарный режим. При этом, учитывая, что

$$\lim_{\omega_1\to 0}\omega_1^{-\frac{j}{2}}J_j\left(e^{\frac{3\pi i}{4}}\gamma_k r\right)=\frac{1}{2^j\Gamma(j+1)}\left(\frac{k}{a_1}\right)^{\frac{j}{2}}r^j e^{\frac{3\pi i}{4}},\quad \text{имеем}$$

$$f_{j,k}^{(1)}(r)=\frac{\lambda_2(2j+1)m_{j,k}R_2^{j+\frac{1}{2}}r^{j+\frac{1}{2}}}{[\lambda_1 j+\lambda_2(j+1)]R_2^{2j+1}+(\lambda_2-\lambda_1)jR_1^{2j+1}};$$

$$g_{j,k}^{(1)}(r)=\frac{\lambda_2(2j+1)n_{j,k}R_2^{j+\frac{1}{2}}r^{j+\frac{1}{2}}}{[\lambda_1 j+\lambda_2(j+1)]R_2^{2j+1}+(\lambda_2-\lambda_1)jR_1^{2j+1}};$$

$$f_{j,k}^{(2)}(r)=\frac{[(\lambda_1 j+\lambda_2(j+2))r^{2j+1}+(\lambda_2-\lambda_1)jR_1^{2j+1}]m_{j,k}}{[\lambda_1 j+\lambda_2(j+1)]R_2^{2j+1}+(\lambda_2-\lambda_1)jR_1^{2j+1}}R_2^{j+\frac{1}{2}}r^{-j-\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

$$g_{j,k}^{(2)}(r)=\frac{[(\lambda_1 j+\lambda_2(j+1))r^{2j+1}+(\lambda_2-\lambda_1)jR_1^{2j+1}]n_{j,k}}{[\lambda_1 j+\lambda_2(j+1)]R_2^{2j+1}+(\lambda_2-\lambda_1)jR_1^{2j+1}}R_2^{j+\frac{1}{2}}r^{-j-\frac{1}{2}}$$

б) При $R_2\to\infty$ получаем шар, вращающийся в бесконечной среде.

в) Если $A=C(\varphi,\,\theta)=0$, имеет место вращение без трения.

Институт математики Академии
наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Բաղադրյալ գնդում ջերմության հոսքի մի խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է անշարժ սնամեջ սֆերայից և նրա ներսը գտնվող գնդից կազմված բաղադրյալ գնդում ջերմության տարածման խնդիրը, երբ ներսի գունդը պտտվում է OZ առանցքի շուրջը հաստատուն ω անկյունային արագությամբ։ Ենթադրվում է, որ գնդի պտտման շնորհիվ բաժանման $r=R_1$ մակերևույթի վրա առաջանում է ջերմություն, գծայնորեն կախված հպվող մակերևույթների ջերմաստիճանից, իսկ $r=R_2$ արտաքին մակերևույթի վրա տրված է ջերմության բաշխումը։

Խնդրի լուծումը տրվում է եռանկյունաչափական, Թոմսոնի և Լեժանդրի ընդհանրացրած ֆունկցիաներից կազմված շարքերի միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Карслоу, Д. Егер*, Теплопроводность твердых тел, Изд. "Наука", М., 1964. [2] *В. В. Иванов, А. В. Фурман*, ИФЖ. т. 8, №3 (1965). [3] *R. G. Watts*, Тр. ам. о—ва. инж.—мех. (русск. перев.), сер. С., т. 91, №4(1969). [4] *J. C. Jaeger*, Proc. Phys. Soc., vol. 56 (1944). [5] J. O. *Outwater*, M. C. Shaw, Trans. ASME, vol. 74 (1952). [6] *D. Rosenthal, R. H. Cameron*, Trans. ASME, vol. 69, (1947). [7] *Н. Н. Рыкалин*, Расчет тепловых процессов при сварке, Машгиз, М. 1951. [8] *П. Шнейдер*, Инженерные проблемы теплопроводности ИЛ, М., 1960. [9] *H. A. Wilson*, Proc. Camb. Phil. Soc. vol. 12,(1904). [10] *Б. Г. Коренев*, Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях, Физматгиз, М. 1960. [11] *Р. С. Минасян*, Диф. уравн., т. 1, №6, 1965. [12] *Р. С. Минасян*, Сб. „Общие вопросы тепло- и массообмена". Изд. "Наука и техника", Минск, 1966. [13] *D. Rosenthal*, Trans. ASME, vol. 68, (1946). [14] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*, Уравнения математической физики, Физматгиз, М. 1966.