

УДК 8.74

МАТЕМАТИКА

А. Г. Пилипосян

О некоторых понятиях эквивалентности логических схем

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 13/VI 1972)

Стремление разработать язык удобный для изучения вопросов преобразования программ привело к построению операторного языка программирования. Основные понятия этого языка были впервые введены А. А. Ляпуновым в работах ^(1,2) и уточнены в работе ⁽³⁾.

В данной работе описывается новый расширенный вариант операторного языка программирования и некоторые понятия эквивалентности логических схем, которые сохраняются при преобразовании последних.

1. Ниже описываются некоторые понятия, лежащие в основе операторного языка.

Пусть $T = \{m\}$ множество некоторых элементов и x переменное, значениями которого являются элементы $m \in T$. T назовем областью изменения переменного x и обозначим через T_x . Мы скажем x определено, если ему присвоено некоторое значение из T_x .

Переменные x и y равны ($x = y$), если $T_x = T_y$ и символы переменных совпадают.

Пусть заданы переменные $x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Набором переменных назовем упорядоченное множество $M = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ с областью изменения $T_M = \{(m_{x_{i_1}}, m_{x_{i_2}}, \dots, m_{x_{i_n}})\}$, где $m_{x_{i_k}} \in T_{x_{i_k}}, k = 1, 2, \dots, n$.

Пусть заданы наборы переменных M_1 и M_2 , причем $M_1 = M_2$. Пусть целочисленная функция ψ_{M_1, M_2} сопоставляет равные элементы наборов M_1 и M_2 . Наборы M_1 и M_2 назовем равными ($M_1 = M_2$), если

- $M_1 = M_2$;
- для каждого $\alpha \in T_{M_1}$ существует $\beta \in T_{M_2}$, такое что местам сопоставленным функцией ψ_{M_1, M_2} в значениях α и β соответствуют равные значения. Очевидно, что отношение равенства наборов переменных рефлексивно, симметрично и транзитивно.

2. Пусть заданы наборы переменных M и N с областью изменения T_M и T_N соответственно.

Оператором назовем отображение набора M на набор N , такое которое сопоставляет каждому значению $\alpha \in T_M$ одно и только одно значение набора $N - \beta \in T_N$, так чтобы всякое значение $\gamma \in T_N$ было сопоставлено некоторому значению $\delta \in T_M$. M и N соответственно назовем входом и выходом оператора. T_M — назовем областью определения, а T_N — областью изменения оператора.

Выполнением оператора A над значением входа α назовем приписание выводу N значение $\beta \in T_X$, сопоставленное оператором A значению α .

Произведением операторов A и B ($A \cdot B$) назовем последовательное выполнение операторов A и B . В общем случае произведение операторов не коммутативно. Но очевидно следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть заданы операторы A и B . Если множества $N_A \cap M_B$ и $N_B \cap M_A$ пустые, то произведение операторов A и B коммутативно.

3. Ниже рассматривается параметризация наборов переменных и операторов. Пусть заданы множества $M = \{a_i\}$ и набор целочисленных переменных $(i_1, i_2, \dots, i_n)$.

Параметризацией множества M параметрами $i_1, i_2, \dots, i_n$ назовем отображение, по которому каждому значению набора $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ сопоставляется только один элемент $a_i \in M$ и наоборот.

Функцию параметризации $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ назовем параметрическим элементом. Параметризацию назовем невырожденной, если каждому элементу $a_{i_1^{(k)} i_2^{(k)} \dots i_n^{(k)}} \in M$ сопоставляется то же значение набора параметров $(i_1^{(k)}, i_2^{(k)}, \dots, i_n^{(k)})$.

В частности, если элементы a_i являются наборами переменных, то получим параметризацию множества наборов переменных $M_{i_1 i_2 \dots i_n}$.

Пусть множество операторов $\{A\}$ параметризовано параметрами $(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Тогда $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ назовем параметрическим оператором.

Выполнением параметрического оператора над значением параметров $(i_1^0, i_2^0, \dots, i_n^0)$ назовем определение оператора $A_{i_1^0 \dots i_n^0} \in \{A\}$, сопоставленного значению $(i_1^0, i_2^0, \dots, i_n^0)$ и его выполнение.

Не параметризованные операторы назовем операторами глубины нуль. Параметрический оператор $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ назовем оператором глубины один. Аналогичным образом можно определить параметрические операторы глубины n (параметры таких операторов являются параметрическими параметрами глубины $n-1$).

4. Ниже приводятся некоторые вспомогательные элементы.

Пусть задан набор переменных M и предикат ε , определенный на M .

Пусть x переменное с областью изменения $T_x = \{0, 1\}$.

Оператор, отображающий набор M на переменное x , так что x принимает значение 1, если ε истинен при данном значении набора M и 0, если ε ложен, назовем логическим оператором.

Символы $\downarrow^N, \uparrow^N$, где N —натуральное число назовем соответственно входящей и выходящей стрелками управления.

Символы $\downarrow^i, \uparrow^i$, где i —параметр, называются входящей и выходящей стрелками произведения по параметру i .

Допускаются также параметрические стрелки произведения (если i —параметрический параметр).

Стрелки $\downarrow^\alpha, \uparrow^\alpha$ назовем сопряженными.

Для каждого параметра i задаются:

а) целочисленная функция $i=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функция определения параметра i ;

б) предикат $\sigma(y_1, y_2, \dots, y_m)$, определенный над набором M , истинный над $T_1 \subset T_m$ и ложный над $T_m - T_1$. Его назовем предикатом достоверности значения параметра i .

Одним из новых элементов операторного языка является операторное переменное — переменное область изменения которого представляет собой множество параметрических операторов. Используется также оператор останова.

Выше описанные элементы имеют свои входы, выходы и нетрудно определить, что понимается под их выполнением.

Входом стрелки $\downarrow^i$ назовем набор переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из функции определения параметра i , а выходом — параметр i .

Входом стрелки $\uparrow^i$ назовем набор переменных $(y_1, y_2, \dots, y_m)$, а выходом — выход предиката σ .

Выполнением стрелки $\uparrow^i$ назовем приписывание её выходу значение, определенное функцией определения параметра на значение входа.

Выполнением стрелки $\downarrow^i$ назовем приписывание выходу значение, сопоставленное значению входа предикатом σ .

5. Пусть заданы следующие множества:

а) множество параметрических операторов (в том числе и глубины нуль) A ;

б) множество логических параметров P ;

в) множества сопряженных стрелок управления $Y_1 = \{\downarrow^N\}$, $Y_2 = \{\uparrow^N\}$;

г) множества сопряженных стрелок произведений

$$U_1 = \{\downarrow^i\}, \quad U_2 = \{\uparrow^i\};$$

д) множество операторных переменных Z ;

е) множество операторов останова O ;

Пусть задана конечная последовательность

$$S = S_1, S_2, \dots, S_n, \quad (5.1)$$

где каждый S_i принадлежит одному из вышеперечисленных множеств. Наложим на последовательность (5.1) следующие ограничения:

а) если $S_k \in P$, то $S_{k-1} \in Y_2$;

б) для любого $S_k \in Y_2$ существует только один $S_p \in S$ такой, что $S_p \in Y_1$, и S_p сопряжена с S_k ;

в) для любого $S_k \in U_2$ существует только один $S_m \in S$ такой, что $S_m \in U_1$ и сопряжена с S_k ($m < k$) и наоборот;

г) если $S_k \in U_1$ и $S_m \in U_2$ сопряжены, то для любого $S_p \in Y_1$, для которого $k < p < m$, сопряженный с ним $S_q \in Y_2$ удовлетворяет условию $k < q < m$;

д) пусть $S_k \in U_1$ и $S_m \in U_2$ сопряженные параметрические элементы глубины j с параметрическим параметром L . Тогда для каждого параметрического элемента $S_p \in S$, параметрический параметр которого содержит L в качестве параметрического параметра глубины $r \geq 1$, имеет место соотношение $k < p < m$;

е) если $S_k \in U_1$ и L его параметрический параметр, то должна быть задана параметрическая функция определения L . Аналогично, если $S_k \in U_2$, то должен быть задан предикат достоверности значения параметра.

Последовательность (5. 1), удовлетворяющую условиям а — е назовем логической схемой. Выполнением логической схемы S на α назовем последовательное выполнение очередных элементов логической схемы, начиная с S_1 , пока очередным элементом не станет оператор останова или неопределенный элемент. При выполнении логической схемы очередность выполняемого элемента определяется с помощью специальной функции порядка выполнения логической схемы.

Для каждой логической схемы можно определить вход и выход логической схемы. Очевидно следующее утверждение.

Теорема 5. 1. *Любая логическая схема S представляет собой оператор с входом M и выходом N .*

6. Ниже приведены некоторые определения эквивалентности логических схем и связывающие их утверждения.

Пусть заданы логические схемы S_1 и S_2 с входами M_1 , M_2 и выходами N_1 , N_2 соответственно.

Определение 6. 1. Мы скажем, что логическая схема S_1 эквивалентна логической схеме S_2 ($S_1 \sim S_2$), если

- а) $M_1 = M_2$ и $N_1 = N_2$;
- б) S_1 определена на $\alpha \in T_{M_1}$, то и S_2 определена на нём и $S_1(\alpha) = S_2(\alpha)$. И наоборот, если S_2 определена на $\beta \in T_{M_2}$, то и S_1 также определена на нём и $S_2(\beta) = S_1(\beta)$;
- в) S_1 циклится на $\gamma \in T_{M_1}$, то и S_2 циклится на нём.

Теорема 6. 1. *Эквивалентность логических схем рефлексивна, симметрична и транзитивна.*

Определение 6. 2. Мы скажем, что логическая схема S_1 охватывает логическую схему S_2 ($S_1 \supseteq S_2$), если

- а) $M_2 \subseteq M_1$ и $N_2 \subseteq N_1$;
- б) из определенности S_2 на $\alpha \in T_{M_2}$ вытекает, что S_1 определена на любом его расширении $\beta \in T_{M_1}$ и $S_1(\beta)$ есть расширение $S_2(\alpha)$;
- в) S_2 циклится или неопределена на $\alpha \in T_{M_2}$, то S_1 циклится или неопределена на любом его расширении из T_{M_1} соответственно.

Легко установить утверждение.

Теорема 6. 2. *Для того чтобы S_1 была эквивалентна S_2 необходимо и достаточно, чтобы $S_1 \supseteq S_2$ и $S_2 \supseteq S_1$.* При изучении логических схем большую роль играют их структуры.

Пусть задана логическая схема (5. 1). Заменим на пустые операторы все операторы, логические операторы, операторные переменные, функции определения параметра и предикаты достоверности. В полученной схеме объединим в один пустой оператор произведение всех пустых операторов, следующих друг за другом. Полученную структуру назовём структурой логической схемы.

Пусть заданы логические схемы S и L .

Определение 6. 3. Мы скажем, что логические схемы S и L

структурно эквивалентны, если на одинаковых местах их структур стоят одни и те же элементы.

Некоторые связи между эквивалентностью и структурной эквивалентностью логических схем устанавливает следующая.

Теорема 6. 3. *Если логические схемы S_1 и S_2 структурно эквивалентны и на одних и тех же операторных местах их структур стоят эквивалентные операторные куски схем, то $S_1 \sim S_2$.* Ниже приводятся некоторые определения эквивалентности логических схем, которые часто играют важную роль при преобразованиях логических схем.

Пусть задана логическая схема S с входом M и выходом N .

Частичным выходом логической схемы S назовём набор $\bar{N}$, который получается из N исключением из неё параметров. Аналогичным образом можно определить частичный вход логической схемы.

Определение 6. 4. Логические схемы S_1 и S_2 назовем частично эквивалентными, если

а) $M_1 = M_2$, $\bar{N}_1 = \bar{N}_2$, где $\bar{N}_i$ — частичный выход S_i ;

б) из определенности S_1 над $\alpha \in T_{M_1}$ вытекает, что и S_2 определена на нём и имеет место

$$\bar{S}_1(\alpha) = \bar{S}_2(\alpha),$$

где $\bar{S}_i(\alpha)$ — значение частичного выхода S_i над α . И наоборот;

в) S_1 циклится над $\beta \in T_{M_1}$, то над β циклится и S_2 , и наоборот. Легко установить, что

Теорема 6. 4. *Если $S_1 \sim S_2$, то они частично эквивалентны. Обратное утверждение вообще говоря неверно.*

Определение 6. 5. Логические схемы S_1 и S_2 узко эквивалентны, если

а) $\bar{M}_1 = \bar{M}_2$ и $\bar{N}_1 = \bar{N}_2$, где $\bar{M}_i$, $\bar{N}_i$ — частичный вход и выход S_i ;

б) пусть $\alpha_1 \in T_{M_1}$ и $\alpha_2 \in T_{M_2}$, причём поднабор значений переменных из $\bar{M}_1$ набора α_1 равен поднабору значений переменных из $\bar{M}_2$ набора α_2 . Тогда:

1. Если S_1 определена на α_1 , то S_2 определена на α_2 и поднабор набора $S_1(\alpha_1)$ значений переменных из $\bar{N}_1$, равен поднабору набора $S_2(\alpha_2)$ значений переменных из $\bar{N}_2$. И наоборот;

2. Если S_1 циклится на α_1 , то S_2 также циклится на α_2 . Можно установить утверждение:

Теорема 6. 5. 1. *Если $S_1 \sim S_2$, то они узко эквивалентны;*

2. *Если S_1 и S_2 частично эквивалентны, то они и узко эквивалентны.*

Обратные утверждения, вообще говоря неверны.

Заметим, что если S_1 и S_2 структурно эквивалентны и на одинаковых местах их структур стоят частично эквивалентные (узко эквивалентные) элементы, то нельзя утверждать, что S_1 и S_2 будут частично (узко) эквивалентными.

Имеют место следующие соотношения транзитивности.

Теорема 6.6. 1. *Если $S_1 \sim S_2$, а S_2 и S_3 частично эквивалентны, то S_1 и S_3 также частично эквивалентны.*

2. Если $S_1 \sim S_2$, а S_2 и S_3 узко эквивалентны, то S_1 и S_3 узко эквивалентны.

3. Если S_1 и S_2 частично эквивалентны, а S_2 и S_3 узко эквивалентны, то S_1 и S_3 узко эквивалентны.

Ниже мы выделяем из выхода логических схем некоторое подмножество, которое часто не играет существенной роли при преобразовании логических схем.

Пусть задана логическая схема S с входом M и выходом N . Переменное y назовем зависимым выходным переменным, если для любого значения входа существует элемент схемы S , вход которого содержит y , и который выполняется после последнего выполнения элемента с выходным переменным y . Пусть $\bar{N}$ множество зависимых выходных переменных.

Тогда $N - \bar{N}$ назовём независимым выходом логической схемы S .

Определение 6.6. Логические схемы S_1 и S_2 назовём эквивалентными по независимым выходам, если удовлетворены следующие условия:

а) $M_1 = M_2$ и $\bar{N}_1 = \bar{N}_2$;

б) если S_1 определена на $\alpha \in T_{M_1}$, то и S_2 определена на нем и значения независимых выходов $\bar{S}_1(\alpha) = \bar{S}_2(\alpha)$. Обратное условие также должно быть удовлетворено;

в) если на $\beta \in T_{M_1}$ циклится S_1 , то на нем циклится и S_2 ; и наоборот.

Имеет место

Теорема 6.7. Пусть S_1 и S_2 структурно эквивалентные логические схемы и на одних и тех же операторных местах их структур стоят эквивалентные по независимым выходам операторные куски схем. Если независимые выходные переменные каждого операторного куска не используются в логической схеме вне этого операторного места, то S_1 и S_2 будут эквивалентными по независимым выходам.

Аналогично определению 6.6 можно изложить определение частичной или узкой эквивалентности логических схем по независимым выходам.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и

Ереванского государственного университета

Հ. Գ. ՓԻՆՏՈՍՅԱՆ

Տրամաբանական սխեմաների համարժեքության մի բանի
հասկացողությունների մասին

Աշխատանքում տրվում է կապուցողի օպերատորային լեզվի ընդհանրացումներից մեկի նկարագրությունը: Սահմանված լեզվում շարադրվում են տրամաբանական սխեմաների համարժեքության մի բանի սահմանումներ և նրանց միջև պահպանվող առնչություններ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. А. Ляпунов Сб. Проблемы кибернетики, вып. I, Физматгиз, 5—22, М., 1958.

² А. А. Ляпунов, Сб. Проблемы кибернетики, вып. I, Физматгиз, 46—74, М., 1958.

³ А. А. Ляпунов, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 8, М., Физматгиз, 235—241, М., 1962.