

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Л. А. Мовсисян

Устойчивость цилиндрических оболочек при быстрых нагружениях

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 25 IV 1972)

1. Пусть имеется цилиндрическая оболочка, один край которой заделан (в безмоментном смысле), а второй край движется по направлению первого с постоянной скоростью c . Начальные условия нулевые.

Уравнения невозмущенного движения оболочки

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial w_0}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2}, \quad \nu \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \lambda^2 w_0 = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} \quad (1.1)$$

надо решать со следующими условиями:

$$u_0 = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad u_0 = - \frac{c l}{a} \tau \text{ при } \xi = 1 \quad (1.2)$$

$$u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \tau} = w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial \tau} = 0 \text{ при } \tau = 0. \quad (1.3)$$

Здесь ξ — безразмерная координата — отношение расстояния точки от одного торца к длине оболочки (l), $\nu = l/r$, r — радиус оболочки, $a = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$ — скорость распространения продольной упругой волны в оболочке, $\tau = at/l$ — безразмерное время, ρ — плотность материала.

Следует подчеркнуть, что рассматриваемая задача адекватна задаче осесимметричного удара жесткой массой по торцу оболочки со скоростью c , когда отношение массы ударяющего тела к массе оболочки стремится к бесконечности (см. равенство (2.4) работы (1) при $k \rightarrow \infty$). Поэтому будем считать, что при решении задачи (1.1) — (1.3), заодно решается также задача удара.

Решение уравнений (1.1) — (1.3) будет

$$u_0 = - \delta l \tau \xi + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\tau) \sin k \pi \xi, \quad \left(\delta = \frac{c}{a} \right) \quad (1.4)$$

$$w_0 = \frac{\delta \nu l}{\lambda^2} (\lambda \tau - \sin \lambda \tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau) \cos k \pi \xi,$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$f_k(\tau) = 2\delta l \frac{(-1)^{k-1}}{k\pi} \frac{1}{p_1^2 - p_2^2} \left(\frac{p_1^2 - \lambda^2}{p_1} \sin p_1 \tau - \frac{p_2^2 - \lambda^2}{p_2} \sin p_2 \tau \right),$$

$$\varphi_k(\tau) = 2\delta l \frac{(-1)^{k-1}}{p_1^2 - p_2^2} \left(\frac{\sin p_1 \tau}{p_1} - \frac{\sin p_2 \tau}{p_2} \right), \quad (1.5)$$

$$p_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (k\pi)^2 + \lambda^2 \pm \sqrt{[(k\pi)^2 + \lambda^2]^2 - 4(1-\nu^2)k^2\pi^2\lambda^2} \right\}^{1/2}.$$

Для усилий на основании (1.4) и (1.5) будем иметь

$$T_1^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\tau) \cos k\pi \xi, \quad T_2^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\tau) \cos k\pi \xi,$$

$$a_0 = -\delta \left[(1-\nu^2)\tau + \frac{\nu^2}{\lambda} \sin \lambda \tau \right], \quad b_0 = -\delta \frac{\sin \lambda \tau}{\lambda},$$

$$a_k = 2\delta \frac{(-1)^{k-1}}{p_1^2 - p_2^2} \left[\frac{p_1^2 - \lambda^2(1-\nu^2)}{p_1} \sin p_1 \tau - \frac{p_2^2 - \lambda^2(1-\nu^2)}{p_2} \sin p_2 \tau \right], \quad (1.6)$$

$$b_k = 2\delta \nu \frac{(-1)^{k-1}}{p_1^2 - p_2^2} \left(p_1 \sin p_1 \tau - p_2 \sin p_2 \tau \right).$$

На рис. 1 и 2 показаны графики функций $T_1^* = T_1^0/Eh\delta$ и $T_2^* = T_2^0/Eh\delta$ для различных λ при значениях $\tau = 1$ и $\tau = 1,5$. Вычисления проводились

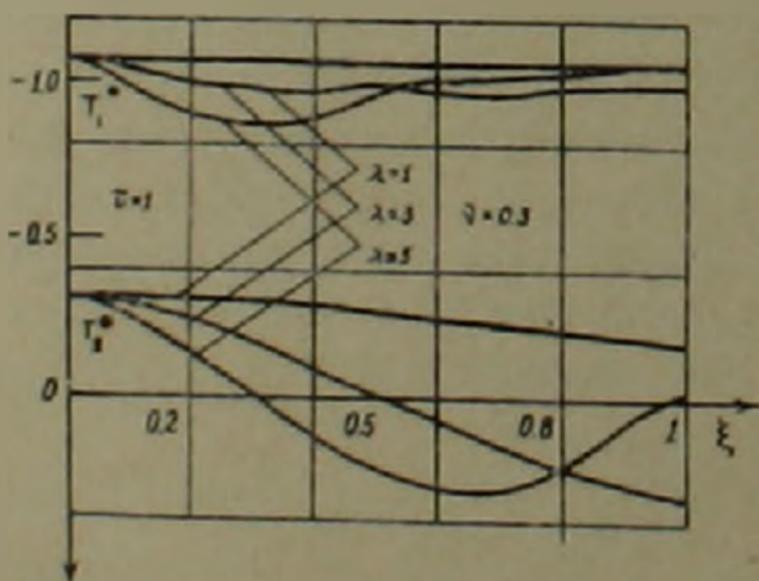


Рис. 1. Распределение тангенциальных докритических усилий (T_1^* и T_2^*) по длине оболочки для различных значений коэффициента Пуассона (ν) и относительной длины оболочки (λ), при $\tau = 1$

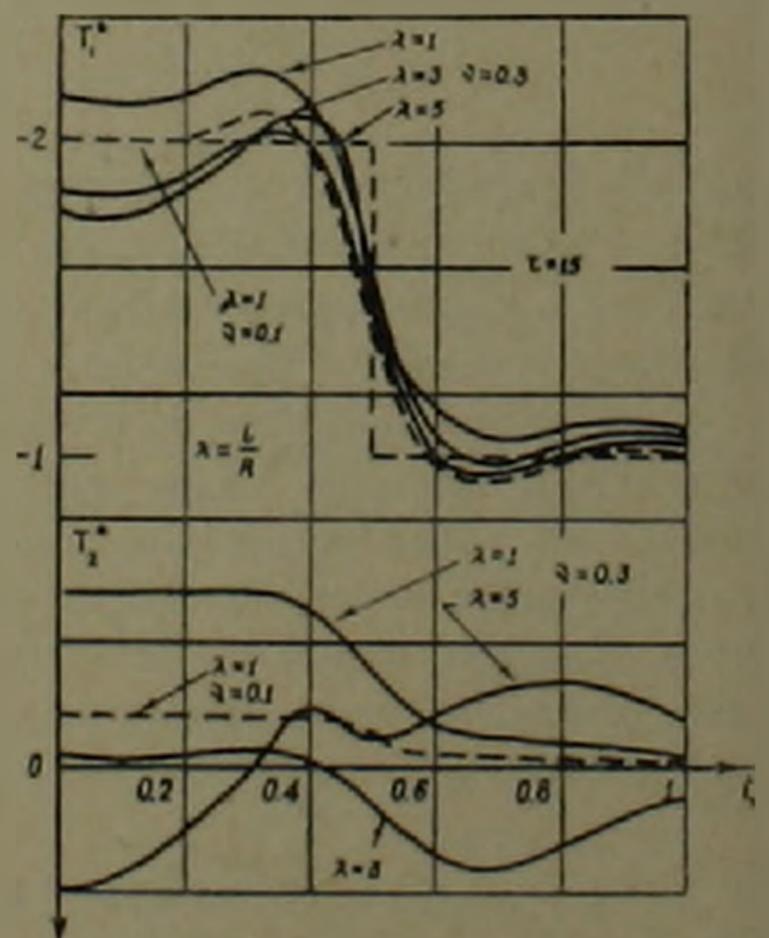


Рис. 2. Распределение тангенциальных усилий по длине оболочки после того как волна отразилась на половину длины оболочки ($\tau = 1,5$)

для $\nu = 0; 0,1$ и $0,3$. Чтобы не загромождать рисунки, для $\nu = 0$ и $\nu = 0,1$, T_1^0 и T_2^0 нанесены только на рис. 2 при $\lambda = 1$ (пунктирная линия). Для других отношений вид кривых аналогичен.

Как видно из этих рисунков, эффектом поперечного обжатия пренебречь нельзя уже при $\nu = 0,3$. Кроме того, если для коротких оболочек можно принять ступенчатый закон для T_1^0 , а T_2^0 приближенно принять равным νT_1^0 , то для длинных оболочек этого принять нельзя.

Перейдем теперь к изучению возмущенного движения. Уравнения этого состояния берем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_1^2} + \frac{1+\nu}{2} \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \tau_1} + \nu \lambda \frac{\partial w}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau_1} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau_1^2} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial \tau_1} &= 0, \\ \nu \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda^2 \frac{\partial v}{\partial \tau_1} + \frac{h^2}{12I^2} \Delta^2 w + \lambda^2 w - \frac{1-\nu^2}{Eh} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(T_1^0 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(T_2^0 \frac{\partial w}{\partial \tau_1} \right) \right] &= - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь τ_1 — центральный угол.

Подставляя T_1^0 и T_2^0 из (1.6) в (1.7), ищем решение последней системы в виде

$$\begin{aligned} u &= \cos n\tau_1 \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\tau) \cos m\pi\xi, \\ v &= \sin n\tau_1 \sum_{m=1}^{\infty} v_m(\tau) \sin m\pi\xi, \\ w &= \cos n\tau_1 \sum_{m=1}^{\infty} w_m(\tau) \sin m\pi\xi, \end{aligned} \quad (1.8)$$

удовлетворяющем условиям свободного опирания на концах. Тогда u_m и v_m выразятся через w_m

$$u_m = \frac{i m \pi}{\Delta_{mn}} \left(\nu m^2 \pi^2 - \lambda^2 n^2 \right) w_m, \quad v_m = - \frac{i^2 n}{\Delta_{mn}} \left[\lambda^2 n^2 + (2+\nu) m^2 \pi^2 \right] w_m, \quad (1.9)$$

а из третьего уравнения (1.7) после некоторых преобразований (*) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_m}{d\tau^2} + \left[\omega_{mn}^2 + \lambda^2 n^2 b_0 + m^2 \pi^2 a_0 + \frac{1}{2} \left(m^2 \pi^2 a_{2m} - \lambda^2 n^2 b_{2m} \right) \right] w_m + \\ + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \left[\lambda^2 n^2 \left(b_{q-m} - b_{m+q} \right) + q m \pi^2 \left(a_{q-m} + a_{q+m} \right) \right] w_q, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\omega_{mn}^2 = i^2(1 - \nu^2) \frac{m^4 \pi^4}{\Delta_{mn}} + \frac{h^2}{12l^2} \Delta_{mn}, \quad \Delta_{mn} = (m^2 \pi^2 + i^2 n^2)^2.$$

Штрих над знаком суммы означает, что в ряде (1.10) отсутствует член ω_m .

К системе (1.10) надо присоединить начальные условия

$$\omega_m|_{\tau=\tau_0} = \omega_m^0, \quad \frac{d\omega_m}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0} = \omega_m^1. \quad (1.11)$$

Система (1.10) с условиями хорошо изучена (2), и если записать ее в виде $\frac{d\psi}{d\tau} = A(\tau)\psi$, $\psi(\tau_0) = \psi_0$, то она эквивалентна интегральному урав-

нению $\psi(\tau) = \psi_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} A(\theta)\psi(\theta)d\theta$, существование и единственность реше-

ния которого доказывается. Сверх того, в силу непрерывности $A(\tau)$, $\|\psi(\tau)\| \leq \|\psi_0\| e^{M(\tau-\tau_0)}$, где $\|A\| \leq M$ при $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$.

При наличии современных машин решение укороченной системы (1.10) не представляет трудности и, если об устойчивости оболочки судить, исходя из условий допускаемых перемещений или допускаемых напряжений, задачу можно считать решенной.

Но, чтобы быть верным классическому понятию устойчивости, необходимо найти некоторый критический параметр; таковым в рассматриваемой задаче является критическая длина потери устойчивости, или, что то же самое, критическое время. В отличие от статической потери устойчивости, где для заданной длины оболочки определяется критическая сила, здесь вопрос ставится следующим образом: для заданного усилия найти критическую длину потери устойчивости. Критической назовем ту минимальную длину распространения продольной волны, при которой моментное состояние, если оно возникает, будет носить возрастающий характер. Система (1.10) позволяет определить критическое время потери устойчивости оболочки, если в основу положить понятие устойчивости для конечного интервала времени (3). Не останавливаясь на подробностях (4), укажем только, что критическое время определяется из условия равенства нулю „частот“ системы (1.10), т. е. это будет наименьший корень уравнения

$$\det \|c_{mq}\| = 0, \quad (1.12)$$

$$c_{mm} = \omega_{mn}^2 + m^2 \pi^2 \left(a_0 + \frac{1}{2} a_{2m} \right) + i^2 n^2 \left(b_0 - \frac{1}{2} b_{2m} \right),$$

$$c_{mq} = \frac{1}{2} \left[i^2 n^2 \left(b_{q-m} - b_{q+m} \right) + qm \pi^2 \left(a_{q-m} + a_{q+m} \right) \right] \quad m \neq q$$

Если оболочке сообщим возмущение в момент $\tau = \tau_0$ и наимень-

ший корень (1.12) есть τ_1 , то интервал устойчивого движения будет $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_0$. Легко видеть, что для фиксированного τ определитель (1.12) нормальный ⁽³⁾. Для этого достаточно каждую строку его делить на ω_{mn}^2 и учесть (1.6). Следовательно, процесс последовательного определения критического времени сходится.

Ниже приводится таблица зависимости между безразмерной скоростью нагружения (ν) и временем потери устойчивости ($\tau_{кр}$), вычисленной по (1.6), (1.7), (1.10) (1.12) для различных i , $h/r = 1/300$ и $\tau_0 = 0$.

10^{2%}

$\tau_{кр}$	0.25		0.5		0.75		1	
	$\nu=0$	$\nu=0.3$	0	0.3	0	0.3	0	0.3
1	0.4001	0.2081	0.2075	0.09749	0.3149	0.09437	0.2756	0.0906
2	1.034	0.5269	1.168	0.2599	0.7806	0.271	1.144	0.6701
3	1.774	0.7406	1.719	0.4369	1.409	0.4575	1.404	0.9462

Из условия $S_{mm} = 0$ для заданной $\tau_{кр}$ была определена главная гармоника по m и n ⁽⁴⁾, после чего наименьший корень был определен из определителя десятого порядка, опоясывающего главную гармонику. При этом в формуле ω_{mn}^2 из (1.10) принималось $\nu = 0.3$, а в выражениях a_k и b_k принималось $\nu = 0$ и $\nu = 0.3$, т.е. для докритических усилий брались как приближенные формулы для балки, так и точные формулы (1.6).

В проблеме устойчивости при ударе два вопроса могут быть объектом исследования — определение времени и формы потери устойчивости. На первый вопрос ответ дает уравнение (1.12). Что касается форм потери устойчивости, то они вовсе не похожи на формы при статическом или при медленном нагружении — одну из гармоник рядов (1.8). При ударе сплошному спектру собственных значений $\tau_{кр}$ соответствуют формы потери устойчивости в виде рядов (1.8) (а не отдельных гармоник).

2. Задачи устойчивости при поперечном быстром нагружении решаются аналогично в предположении, что невозмущенное движение безмоментное и осесимметричное. Особенно простые результаты получаются в случае, когда поперечное давление зависит только от времени. Тогда система, аналогичная (1.11), будет канонической. В самом деле. Уравнение невозмущенного движения будет

$$\frac{d^2 w_0}{d\tau^2} + \lambda^2 w_0 = \frac{(1 - \nu^2) l^2}{Eh} q(\tau) \quad (2.1)$$

и единственное докритическое усилие — $T_c^0 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \frac{w_0}{r}$. Следовательно

но, в рядах типа (1.6) все a_k и $b_k = 0$ при $k = 1, 2, \dots$, $a_0 = 0$, а $b_0 = \frac{w_0}{r}$, т.е. вместо (1.10) будем иметь

$$\frac{d^2 w_m}{dt^2} + \left(w_{mn}^2 + i^2 n^2 \frac{w_0}{r} \right) w_m = 0 \quad (2.2)$$

и в соответствии с (1.12) критическое время τ_{kp} определится из условия

$$w_{mn}^2 + i^2 n^2 \frac{w_0}{r} = 0, \quad (2.3)$$

Рассмотрим некоторые конкретные примеры.

I. Внешнее давление прикладывается мгновенно и держится постоянным во все время движения. Тогда b_0 будет

$$b_0 = \frac{w_0}{r} = \frac{q_0}{E} \frac{r(1-\nu^2)}{h} (\cos \lambda \tau - 1). \quad (2.4)$$

Как видно из (2.3) и (2.4), минимальное давление, которое может вызвать потерю устойчивости, равно половине статического критического давления, и это происходит, когда $t_{kp} = \frac{\pi r}{a}$. И вообще для случая

$q_0 \geq \frac{q_{cr}^{ст}}{2}$ потеря устойчивости происходит при τ_{kp} , определяемом из условия:

$$\cos i \tau_{kp} = 1 - \frac{w_{mn}^2}{Q}, \quad Q = (1-\nu^2) i^2 n^2 \frac{q_0 r}{Eh}. \quad (2.5)$$

II. Внешнее давление прикладывается в виде импульса. Тогда

$$\frac{w_0}{r} = - \frac{(1-\nu^2)l}{Eh} l \sin \lambda \tau, \quad l = \int_0^{\lambda \tau} q(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

и критическое время потери устойчивости определится из уравнения:

$$w_{mn}^2 - i^2 n^2 \frac{l(1-\nu^2)}{Eh} l \cdot \sin i \tau_{kp} = 0. \quad (2.7)$$

Отсюда, кстати видно, что приложенное давление во много раз может превосходить статическое критическое значение, но потери устойчивости не будет

III. Наконец, рассмотрим случай, когда внешнее давление — линейная функция времени $q = \epsilon \tau$. Для $\frac{w_0}{r}$ имеем:

$$\frac{w_0}{r} = \frac{\epsilon r}{Eh} (1-\nu^2) (\sin \lambda \tau - \lambda \tau). \quad (2.8)$$

На рис. 3 изображена кривая определения критического времени потери устойчивости в зависимости от скорости нарастания давления. По оси абсцисс отложено безразмерное время, а по оси ординат — безразмерная скорость x ; это отношение скорости, при которой теряется устойчивость при заданной $\tau_{кр}$, определяемое из (2.3) и (2.8), к скорости потери устойчивости, если инерционным членом докритического состояния пренебречь.

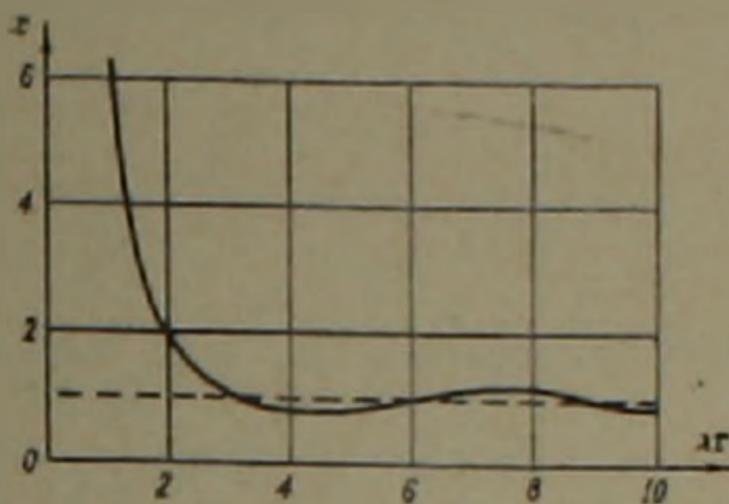


Рис. 3. Зависимость между безразмерной скоростью нарастания давления (x) и критическим временем (τ)

Задачи I и III рассматривались и в (2), но в другом аспекте; там, в частности, для $\tau = \tau_{кр}$, помимо $\frac{d^2 w_m}{d\tau^2} = 0$, принимается также $\frac{dw_m}{d\tau} = 0$.

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Լ. Ա. ՄՈՍԻՍՅԱՆ

Գլանային բաղանդների կայունությունն արագ բեռնավորումների դեպքում

Իրտարկվում են առաձգական զլանային թաղանթների կայունության խնդիրներ՝ երկայնական և ընդլայնական արագ բեռնավորումների դեպքում: Այդ գրգռված վիճակի հավասարումները լուծվում են ճշգրիտ բոլոր նախնական և եզրային պայմանների հաշվառումով: Շնորհիվ դրա կայունության հավասարումներում նախնական վիճակի ճիգերի անհամասեռությունը հաշվի են առնվում: Այդ վիճակի հավասարումները բերված են անվերջ սովորական հավասարումների սխեմով, իսկ կրիտիկ երկարության որոշելը՝ անվերջ մատրիցի ամենափոքր սեփական արժեքը գտնելու խնդիրն է:

Բերված են մի շարք խնդիրներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Л. А. Мосисян, «Известия АН Арм. ССР» серия ф.-м. н., т. XVII, № 6 (1964).
 2. М. Г. Крейн, Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Киев, (1964). 3. Г. В. Каменков, ПММ, т. XVIII, вып. 5 (1953). 4. Л. А. Мосисян, «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. XXIV, № 1 (1971).
 5. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, ф.-м. М.-Л., 1962. 6. С. Н. Кукуджиков, О наилучших начальных приближениях в проблеме собственных чисел и методах Рунге и Бунднова-Галёркина, Теория оболочек и пластины, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1964. 7. В. М. Даревский, Устойчивость оболочки при динамической нагрузке, Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, Изд. «Наука», М., 1970.