ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LV 1972 4

УДК 517.553

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян

Построение одной специальной последовательности и структура замкнутых идеалов в некоторых алгебрах аналитических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 16 V 1972)

Пусть U открытый единичный круг Γ-его граница, A множество функций аналитических в U и непрерывных в $U \cup \Gamma$.

Предположим, что E—замкнутое множество на Γ, n—натуральное число.

Работа посвящена построению последовательности

$\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$ со следующими свойствами:

1) $\varphi_s^{(n)} \in A$, $s=1, 2, \ldots$

2) $\varphi_s^{(k)}(\xi)=0$, если $\xi \in E$, $k=0, 1, \ldots n$; $s=1, 2, \ldots$

3) $|\varphi_s^{(k)}(\xi)| \leq \dfrac{c^*}{|\rho(\xi, E)|^k}$, $k=0, 1, \ldots n$, $s=1, 2, \ldots$; $\xi \in U \cup \Gamma$

4) $\lim\limits_{s \to \infty} \varphi_s(\xi)=1$, $\lim\limits_{s \to \infty} \varphi_s^{(j)}(\xi)=0$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Равномерно относительно ξ—из любого компактного множества

$$K \subset U \cup \Gamma, \ K \cap E=\varnothing.$$

И некоторым применениям этой последовательности.

Потребность в построении последовательности $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$ со свойствами (1)—(4) возникает при изучении мультипликативных свойств некоторых классов аналитических функций [1], и при описании замкнутых идеалов в алгебрах функций аналитических в круге и гладких вплоть до единичной окружности. Так, в работах [1–[illegible]] существенную роль играют свойства (1)—(4) последовательности

$$\varphi_s(z)=\left(\frac{z-1}{z-1-\dfrac{1}{s}}\right)^{3n}, \ s=1, 2, \ldots .$$

* c—положительное число не зависящее от ξ и s, $\rho(\xi, E)$—расстояние от ξ до множества E.

В этом случае множество E состоит из единственной точки 1. Отметим также работу ([7]), где поставлен вопрос о существовании последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ со свойством (1)—(4) при условии, что E—множества Бёрлинга-Карлесона ([8]).

В дальнейшем будем предполагать, что E—замкнутое множество на Γ и существуют такие положительные числа m, M, q, причем $0<q<1$, так, что

$$\sigma(E)=0, \quad mq^k\leqslant l_k\leqslant Mq^k, \ k=0, 1, \ldots, \tag{5}$$

где $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$—последовательность длин дополнительных (к множеству E) дуг окружности Γ, σ—линейная мера Лебега на Γ.

Теорема 1. *Если замкнутое множество $E\subset\Gamma$ удовлетворяет условиям* (5), *то существует последовательность со свойствами* (1)—(4).

Заметим, что из теоремы Бёрлинга—Карлесона ([8]) следует, что для существования нетривиальной функции $f\in A$ нули которой содержат множество E и, которая удовлетворяет условию Липшица порядка α, в $U\cup\Gamma$ при некотором $\alpha>0$ необходимы следующие условия

$$\sigma(E)=0, \ \sum_{k=1}^{\infty} l_k|\log l_k|<+\infty. \tag{6}$$

Нам не известно являются ли эти условия достаточными для существования последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ со свойствами (1)—(4).

При помощи этой последовательности можно описать некоторые замкнутые идеалы в следующих алгебрах аналитических функций.

а) $A^{(n)}=\left\{f^{(n)}\in A; \quad \|f\|_{A^{(n)}}=\sum\limits_{k=0}^{n}\max\limits_{\zeta\in\Gamma}\frac{|f^{(k)}(\zeta)|}{k!}\right\};$

б) $H^p_{n+1}=\left\{f\in A: f^{(n+1)}\in H^p, \ \|f\|_{H^p_{n+1}}=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n+1}\sup\limits_{0<r<1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f^{(k)}(re^{it})|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.,$

$(1\leqslant p<+\infty)$

в) $\lambda^{(n)}_{\alpha}=\left\{f\in A: \ f^{(n)}\in\mathrm{lip}(\alpha, U\cup\Gamma),\right.$

$$\|f\|_{\lambda^{(n)}_{\alpha}}=\|f\|_{\infty}+\sup_{t,\theta}\frac{|f(e^{i(\theta+t)})-f(e^{i\theta})|}{t^{\alpha}}\Bigg\}, \quad (0<\alpha<1)$$

г) $\lambda^{(n)}_{*}=\{f^{(n)}\in A: |f^{(n)}(e^{i(\theta+t)})-2f(e^{i\theta})+f(e^{i(\theta-t)})|=0(t)$

равномерно относительно $\theta\in(0,2\pi]$,

$$\|f\|_{\lambda^{(n)}_{*}}=\|f\|_{\infty}+\sup_{t,\theta}\frac{|f^{(n)}(e^{i(\theta+t)})-2f(e^{i\theta})+f(e^{i(\theta-t)})|}{t}\Bigg\},$$

д) $\lambda^{(n)}_{\alpha+0}=\bigcap\limits_{\alpha>0}\lambda^{(n)}_{\alpha}, \quad$ при $\quad 0<\alpha<1$

Легко видеть при указанных нормах множества $A^{(n)}$, $H^{p}_{\alpha, p}$, $\Lambda^{(n)}_{\alpha}$, $\Lambda^{(n)}_{\alpha}$ являются банаховыми алгебрами, а $\Lambda^{(n)}_{\alpha,0}$ является топологической алгеброй относительно топологии проективного предела банаховых пространств $\Lambda^{(n)}_{\alpha,s}$, $s>0$.

В дальнейшем X будет обозначать одну из выше указанных алгебр.

Пусть $f \in X$ обозначим внутреннюю часть (8) функций f через G_f,

$$E_m(f) = \{\xi \in \Gamma : f^{(k)}(\xi) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m,\ 0 \leq m \leq n\}.$$

Предположим I-идеал в X. Тогда G_I будет обозначать наибольшой общий делитель внутренних частей функций принадлежащих I.

Теорема 2. *Пусть I-замкнутый идеал в X и пусть*

$$E_0(I) = E_1(I) = \ldots = E_n(I) = E,$$

где

$$E_k(I) = \bigcap_{f \in I} E_k(f),\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Предположим E удовлетворяет условиям (8), тогда

$$I = \{f \in X : E_n(f) \supset E \ \text{ и } \ G_I \text{ делит } G_f\}.$$

Для алгебры $A^{(n)}$ справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть I замкнутый идеал в $A^{(n)}$, и пусть $E_n(I)$ удовлетворяет условию (8), тогда*

$$I = \{f \in A^{(n)} : E_k(f) \supset E_k(I),\ \ k = 0, 1, \ldots n,\ G_I \text{ делит } G_f\}.$$

Замечание. Теорема 3 обобщает теорему 2 § 6 работы (7), и результатами полученные в (5).

Из теоремы 2 следует, что для любого максимального идеала M, алгебры X существует $\xi_0 \in U \cup \Gamma$ такая, что

$$M = \{f \in X : f(\xi_0) = 0\}$$

M_{ξ_0} — будет обозначать максимальный идеал в X, который соответствует точке ξ_0 по (2).

Из теоремы 2 легко получить полное описание примарных идеалов алгебры X.

Теорема 4. *Пусть I—замкнутый примарный идеал, входящий в M_{ξ_0}. Тогда имеет место одно из следующих равенств*

а) $I = \{f \in X : f^{(j)}(\xi_0) = 0 \ \ j = 0, 1, \ldots k$ при некотором $0 \leq k \leq n\}$

б) $I = \{f \in X : f^{(k)}(\xi_0) = 0 \ \ k = 0, 1, \ldots, n,\ G_I$ делит $\exp\left(-\alpha \frac{\xi_0 + z}{\xi_0 - z}\right)\}$

$\xi_0 \in \Gamma$ *при некотором* $\alpha > 0$

Следствие. Каждый примарный идеал в алгебре X главный, и порождается

в случае а) функцией

$$(z - \xi_0)^{k+1} \text{ а, в}$$

случае б) $(z - \xi_0)^{2(n+1)} \exp\left(-\alpha \frac{\xi_0 + z}{\xi_0 - z}\right)$

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ

Մի հատուկ հաջորդականության կառուցում և փակ իդեալների ներկայացում անալիտիկ ֆունկցիաների մի քանի ալգեբրաներում

Հոդվածում կառուցվում է $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$ ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

1) $\varphi_s^{(n)}$—անալիտիկ է միավոր շրջանում և անընդհատ փակ շրջանում, որտեղ n-ը ցանկացած ֆիքսած նախապես տրված ամբողջ դրական թիվ է։

2) $\varphi_s^{(k)}(\xi)=0$, եթե $\xi\in E$, $k=0, 1, \dots n$, $s=1, 2, \dots$, E-ն շրջանագծի վրա տրված զրո չափ ունեցող բազմություն է, որի համար գոյություն ունեն m, M, q—դրական թվեր, ընդ որում $0<q<1$ այնպես, որ

$$mq^k\leqslant l_k\leqslant Mq^k,\ k=1, 2, \dots$$

որտեղ՝ l_k-ն բազմության լրացուցիչ ինտերվալի երկարությունն է։

3) $$|\varphi_s^{(k)}(\xi)|\leqslant \frac{C}{|\rho(\xi, E)|^k},\ |\xi|\leqslant 1,\ k=0, 1, \dots n,\ s=1, 2, \dots$$

C-ն դրական հաստատուն է, որը կախված չէ ξ-ից, s-ից։

4) $\lim\limits_{s\to\infty}\varphi_s(\xi)=1$, $\lim\limits_{s\to\infty}\varphi_s^{(j)}(\xi)=0$, $j=1, 2, \dots n$

հավասարաչափ ըստ ξ-ի յուրաքանչյուր կոմպակտից, որը ընկած է փակ միավոր շրջանում և չի հատվում E-ի հետ։

Այդ հաջորդականության օգնությամբ անալիտիկ ֆունկցիաների մի քանի ալգեբրաներում նկարագրվում են փակ իդեալները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. И. Коренблюм, В. С. Королевич*, Матем. заметки, 7 № 2 (1970). [2] *Б. И. Коренблюм*, Тезисы докладов всесоюзн. конф. по теории функций комплексного переменного, Харьков, 1971. [3] *Н. М. Осадчий*, Укр. матем. журнал, 23, № 6 (1971). [4] *В. С. Королевич*, «Известия АН Арм. ССР», т. Б. № 4 (1971). [5] *Л. В. Шамраева*, Укр. матем журнал, т. 21, № 2 (1969). [6] *К. Гофман*, Банаховые пространства аналитических функций, М., 1963. [7] *B. A. Taylor* and *D. L. Williams*, Can. J. Math. vol. XXII, № 6(1970) [8] *Lennart Carleson*, Acta Math. 87, № 3–4 (1952)