ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LV 1972 4

УДК 01.002

МАТЕМАТИКА

В. В. Восканян

О наибольших по модулю значениях для некоторых классов функций, аналитических в кольце.

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 16/V 1972)

Пусть K есть открытое кольцо на комплексной плоскости, ограниченное окружностями $\Gamma_1=\{z:|z|=1\}$ и $\Gamma_\rho=\{z:|z|=\rho\}$, $0<\rho<1$. Обозначим через $H^p(K)$, $1\leqslant p<\infty$, банахово пространство функций $f(z)$, аналитических (и однозначных) в K таких, что

$$\sup_{\rho<r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p\,dt<\infty,$$

с нормой

$$\|f\|_p=\left\{\int_\Gamma|f(x)|^p\,ds\right\}^{1/p}=\left\{\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p\,dt+\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p\rho\,dt\right\}^{1/p}$$

(как известно, функции из $H^p(K)$ имеют почти всюду на $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_\rho$ граничные значения $f(e^{it})$ и $f(\rho e^{it})$, суммируемые с p-й степенью). Аналогично, $H^\infty(K)$ будет обозначать банахово пространство аналитических и ограниченных в K функций с нормой

$$\|f\|_\infty=\sup_{z\in K}|f(z)|=\operatorname{Vrai}\max_{x\in\Gamma}|f(x)|.$$

Обозначим через S_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, единичный шар в $H^p(K)$. Если функция $\omega(x)$ принадлежит $L^q(\Gamma)$, где $1/q+1/p=1$, то по формуле $\omega(f)=\int_\Gamma f(x)\omega(x)\,dx$ она порождает на пространстве $H^p(K)$ линейный ограниченный функционал ω.

По принципу двойственности

$$\|\omega\|_p^*=\sup_{f\in S_p}\left|\int_\Gamma\omega(x)f(x)\,dx\right|=\inf_{\varphi\in H^q(K)}\left\{\int_\Gamma|\omega(x)-\varphi(x)|^q\,ds\right\}^{1/q}\quad\text{при }1<p\leqslant\infty \tag{1}$$

и

$$\|\omega\|_1^* = \sup_{f\in S_1}\left|\int_\Gamma \omega(x) f(x)\,dx\right| = \inf_{\varphi\in H^\infty(K)} \operatorname{vrai\,max}_{x\in\Gamma}|\omega(x)-\varphi(x)|. \tag{2}$$

В работе автора (¹) (см. там же литературу), где использовались результаты С. Я. Хавинсона, в частности и принцип двойственности, был рассмотрен случай, когда $\omega(x)$ является граничным значением функции $\omega(z)$, аналитической в $\overline{K}$, за исключением конечного числа полюсов, лежащих в K. Было найдено представление функций $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$, реализующих точные верхние и нижние грани соответственно в равенствах (1), (2).

Пусть зафиксированы точка $a\in K$ и число p, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Рассмотрим задачу о $\sup\limits_{f\in S_p}|f(a)|$, т. е. экстремальную задачу вида (1) или (2), где $\omega(z)=\dfrac{1}{2\pi i(z-a)}$. Результат (¹) позволяет найти в этом случае все параметры, участвующие в представлении экстремальных функций $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$.

Теорема 1. *Если* $1\leqslant p\leqslant 1+\dfrac{\ln|a|}{\ln\rho}$, то

а) $$\|\omega\|_p^* = \sup_{f\in S_p}|f(a)| = \frac{1}{|\rho a|^{1/q}}\left|\frac{\gamma A(-\rho^{p-1}|a|^{-1},|a|)}{2\pi A(-|a|\rho^{1-p},|a|)A(|a|^{-1},|a|)}\right|^{1/p}$$

в) *Все функции* $f\in S_p$, *для которых* $|f(a)|=\|\omega\|_p^*$, *отличаются на постоянный множитель* $e^{i\gamma}$ *от функции*

$$f^*(z)=\frac{\|\omega\|_p^* a}{z}\left|\frac{A(\bar a^{-1},a)}{A(-\rho^{p-1}\bar a^{-1},a)}\right|^{2/p}\left[\frac{A(-\rho^{p-1}\bar a^{-1},z)}{A(\bar a^{-1},z)}\right]^{2/p}$$

с) *Функция* $$\varphi^*(z)=\frac{1}{2\pi i(z-a)}+i\,(\|\omega\|_p^*)^p(\rho|a|)^{p-1}\times$$

$$\times\left|\frac{A(\bar a^{-1},a)}{A(-\rho^{p-1}\bar a^{-1},a)}\right|^{2/q}\frac{A(-a\rho^{1-p},z)}{A(a,z)}\left[\frac{A(-\rho^{p-1}\bar a^{-1},z)}{A(\bar a^{-1},z)}\right]^{2/q-1}$$

единственная из всех $\varphi\in H^q(K)$ *такая, что*

$$\|\omega-\varphi^*\|_{L^q(\Gamma)}=\inf_{\varphi\in H^q(K)}\|\omega-\varphi\|_{L^q(\Gamma)}=\|\omega\|_p^*.$$

Здесь введены обозначения: $A(b,z)=(z-b)\prod\limits_1^\infty\left(1-\rho^{2m}\dfrac{z}{b}\right)\left(1-\rho^{2m}\dfrac{b}{z}\right)$, $\gamma=\dfrac{d}{dz}A(a,z)\Big|_{z=a}=\prod\limits_1^\infty(1-\rho^{2m})^2$. Заметим, что функция $A(b,z)$ является кольцевым аналогом двучлена $z-b$. Она может быть выражена с помощью Θ_1-функции Якоби:

$$A(b,z)=-i\gamma^{-1/2}\rho^{-1/4}(bz)^{1/2}\,\Theta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z}{b}\right)$$

Во всех встречающихся формулах взяты главные значения степенной функции и логарифма.

Теорема 2. *Если* $1+\dfrac{\ln|a|}{\ln\rho}<p<\infty$, то в утверждениях *a*), *b*) и *c*) теоремы 1

$$\|\omega\|_p^* = \frac{\gamma^{1/p}}{|2\pi A(|a|^{-1},|a|)|^{1/p}} \left| \frac{A(-\rho|a|^{1-q},|a|)}{a\rho A(-\rho^{-1}|a|^{q-1},|a|)} \right|^{1/q},$$

$$f^*(z) = \left| \frac{M}{\|\omega\|_p^*} \right|^{q-1} \frac{A(-\rho a|a|^q,z)}{\rho z\left[A\left(\frac{1}{\bar a},z\right)\right]^{2/p}} |A(-(\rho\bar a)^{-1}|a|^q,z)|^{2/p-1},$$

где

$$M=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\gamma|A(\bar a^{-1},a)|^{2/q-1}}{|A(-(\rho\bar a)^{-1}|a|^q,a)|^{2/q}},$$

$$\varphi^*(z)=\frac{1}{2\pi i(z-a)}-M\,\frac{|A(-(\rho\bar a)^{-1}|a|^q,z)|^{2/q}}{A(a,z)|A(\bar a^{-1},z)|^{2/q-1}}.$$

При $p=\infty$, очевидно $-f^*(z)=1=\|\omega\|_\infty^*$. В этом случае может оказаться любопытной

Теорема 3. *Пусть* $p=\infty$. *Существует бесконечно много функций* $\varphi^*(z)\in H^1(K)$, *реализующих нижнюю грань в экстремальной задаче* (1). *Все они задаются формулой*

$$\varphi^*(z)=\frac{1}{2\pi i(z-a)}-\frac{a\gamma A(\bar a^{-1},a)A(\alpha,z)A(\bar\alpha^{-1},z)}{2\pi iA(\alpha,a)\,A(\bar\alpha^{-1},a)\,A(a,z)A(\bar a^{-1},z)z},$$

где $\dfrac{\alpha}{a}<0,\ \rho\leqslant|\alpha|\leqslant 1.$

Таким образом, множество экстремальных функций $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$ существенно изменяется при прохождении через кривые $p=1+\dfrac{\ln|a|}{\ln\rho}$ и $p=\infty$ в области $\rho<a<1$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, хотя и $\|\omega\|_p^*$ непрерывна в ней.

Следует отметить, что подобные факты не могут иметь места в аналогичной задаче для круга.

В работе ([3])(см. также ([2]), § 5) П. Р. Гарабедян нашел значение $\sup|f'(a)|$ для ограниченных по модулю единицей аналитических функций в произвольных конечно-связных областях. Оно выражалось через ядро Сеге, построенного для этих областей.

Отметим, что функция $f^*(z)$, реализующая вышенаписанную верхнюю грань, должна иметь нуль в точке a, иначе существовала бы функция $q(z)=\dfrac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}$ из этого же класса со свойствами $q(z)\ne f(z)$, $|q'(a)|>|f'(a)|$. Этот факт позволяет в случае кольца непосредственно вычислить $\sup|f'(a)|$, а также найти экстремальные функции $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$.

Теорема 4. *Пусть* $\omega(z)=\dfrac{1}{2\pi i(z-a)^2}$, $a\in K$. *Тогда*

a) $$\|\omega\|^*_\infty=\sup_{f\in S_\infty}|f'(a)|=\left|\frac{\gamma A(-\rho|a|^{-1},|a|)}{\rho a A(\rho|a|^{-1},|a|)A(-|a|\rho^{-1},|a|)}\right|$$

b) Функция

$$f^*(z)=\frac{A(a,z)\,A(-\rho\bar a^{-1},z)}{\rho z\,A(\bar a^{-1},z)\,A(-\bar a\rho^{-1},z)}$$

единственная из S_∞, *с точностью до постоянного множителя* $e^{i\theta}$, *такая, что* $|f'(a)|=\|\omega\|^*_\infty$.

c) Функция

$$\varphi^*(z)=\frac{1}{2\pi i(z-a)^2}-\frac{1}{2\pi i}\frac{|\gamma A(-\bar a\rho^{-1},z)|^2}{|A(-\bar a\rho^{-1},a)A(a,z)|^2}$$

и только она реализует нижнюю грань в экстремальной задаче (1).

Замечание. Все утверждения для $H^\infty(K)$ в рассмотренных задачах переносятся без изменения на банахово пространство $A(K)$ функций, аналитических в K и непрерывных в $\bar K$, с sup—нормой.

Ереванский государственный
университет

Վ. Վ. ՈՍԿԱՆՅԱՆ

Օղակում անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի համար մոդուլով մեծագույն արժեքների մասին

Դիցուք $K=\{z:\rho<|z|<1\}$, $a\in K$, $1\leq p\leq\infty$.

Oգտագործելով հեղինակի [1] *արդյունքը, հաջողվում է լրիվ լուծել հետևյալ էքստրեմալ խնդիրները՝*

$$\sup\{|f(a)|: f\in H^p(k),\ \|f\|_p\leq 1\}\ \text{և}$$
$$\sup\{|f'(a)|: f\in H^\infty(K),\ \|f\|_\infty\leq 1\},$$

այսինքն՝ գտնել այդ վերին եզրերը, այդ արժեքները հաղորդող $f^*(z)$ *և* $\varphi^*(z)$ *էքստրեմալ ֆունկցիաները երկակի խնդրում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. В. Восканян*, „Известия АН Арм. ССР“, т. 6, № 5, 412—418 (1971). [2] *С. Я. Хавинсон*, УМН т. 18, № 2, 25—98 (1963). [3] *P. R. Garabedian*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 67, № 1, 1—35 (1947).