ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LV 1972 4

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

В. М. Едигарян

Об обыкновенных и абсолютных моментах аналитических в угле функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 7/V 1972)

1. В работе исследуются возможные возрастания обыкновенных и абсолютных моментов аналитической в угле функций, при этом обобщаются ранее известные результаты Салинаса (1).

Используя метод преобразования типа свертки, оказывается, что, не выходя из общей схемы Салинаса, можно при более общих условиях, наложенных на последовательность степеней моментов, решать вопрос о скоростях моментов аналитических в угле функций.

Рассмотрим последовательность положительных чисел $0=\gamma_0<\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_n<\ldots$, удовлетворяющих условиям

$$\gamma_k\leq k, \quad \gamma_{k+1}-\gamma_k>c>0, \tag{1.1}$$

числовая функция

$$n(t)=\sum_{\gamma_k\leq t} 1\sim tl(t) \quad \text{при } t\to\infty \tag{1.2}$$

где $l(t)$ — медленно растущая функция, т. е. $l(kr)\sim(lr)$ при $r\to\infty$ для $\forall k$ и

$$\int_0^\infty \frac{n(t)}{t^2}\,dt=+\infty. \tag{1.3}$$

Основная лемма. *Пусть функция $F(t)$ конечна и интегрируема в интервале $(0, +\infty)$ и ее обыкновенными и абсолютными моментами соответственно являются*

$$a_n=\int_0^\infty F(t)t^{\gamma_n}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{1.4}$$

$$b_n=\int_0^\infty |F(t)|t^{\gamma_n}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{1.5}$$

которые конечны и удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|a_n|}{\ln|\bar{\Gamma}(\gamma_n)|}<\sigma_0<\sigma<1 \tag{1.6}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\,dr=\infty, \tag{1.7}$$

где

$$T(r)=\sup_n\frac{r^{\gamma_n}}{A_n(\gamma)b_n},\qquad A_n(\gamma)=\frac{1}{\bar{\Gamma}(\sigma_n,\gamma)\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left|1-\frac{\sigma_n^2}{\gamma_k^2}\right|}\quad \gamma_{n-1}<\sigma_n<\gamma_n, \tag{1.8}$$

а

$$\bar{\Gamma}(\sigma,\gamma)=\frac{1}{\sigma\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\sigma}{\gamma_k}\right)e^{-\frac{\sigma}{\gamma_k}}}.$$

Тогда следующая функция

$$f(z)=\int_0^\infty \omega(zt,\gamma)\,F(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k z^{\gamma_k}}{\gamma_k\prod\limits_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\left(1-\frac{\gamma_k}{\gamma_n}\right)e^{\frac{\gamma_k}{\gamma_n}}}, \tag{1.9}$$

где

$$\omega(zt,\gamma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{(zt)^{-\xi}\,d\xi}{\xi\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\xi}{\gamma_k}\right)e^{-\frac{\xi}{\gamma_k}}},\quad (\delta>0)$$

представляется единственным образом в угле $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}$, *причем ряд правой части* (1.9) *сходится везде и следовательно представляет собой квазицелую функцию.*

Доказательство. Так как

$$\omega(zt,\gamma)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(zt)^{\gamma_k}}{\gamma_k\prod\limits_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\left(1-\frac{\gamma_k}{\gamma_n}\right)e^{\frac{\gamma_k}{\gamma_n}}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma_n-i\infty}^{-\sigma_n+i\infty}\frac{(zt)^{-\xi}d\xi}{\xi\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\xi}{\gamma_k}\right)e^{-\frac{\xi}{\gamma_k}}}, \tag{1.10}$$

то, делая замену переменной $\xi=\xi'-\sigma_n$ и подставляя полученное в (1.9) и используя обозначение (1.4), получаем

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k z^{\gamma_k}}{\gamma_k\prod\limits_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\left(1-\frac{\gamma_k}{\gamma_n}\right)e^{\frac{\gamma_k}{\gamma_n}}}+R_n(z,t,\gamma), \tag{1.11}$$

где

$$R_n(z, z, \gamma) = \int_0^\infty (zt)^{\rho_n} F(t) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \frac{(zt)^{-\xi} d\xi}{(\xi - \rho_n) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi - \rho_n}{\gamma_k}\right) e^{-\frac{\xi - \rho_n}{\gamma_k}}} \right\} dt.$$

Введя обозначение

$$\psi(t) = \sum_{\gamma_l < t} \frac{1}{\gamma_l}$$

и используя легко получающиеся формулы

$$n(t) = t\psi(t) - \int_0^t \psi(s) ds$$

$$\psi(t) = \frac{n(t)}{t} + \int_0^t \frac{n(s)}{s^2} ds$$

нетрудно получить, что при сделанных предположениях на последовательности $\{\gamma_\nu\}$ имеет место

$$\lim_{y \to \infty} |y| \int_0^\infty \frac{N_n(t)}{t(y^2 + t^2)} dt \geq \frac{\pi}{2}, \qquad (1.12)$$

где $N_n(t)$ — числовая функция последовательности $\{\gamma_{n+i} - \rho_n\}_{i=1}^{\infty}$, после чего легко получается оценка

$$|R_n(z, t, \gamma)| \leq |z|^{\rho_n} b_n A_n(\gamma) \ \text{в} \ |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}. \qquad (1.13)$$

Следовательно, по условию (1.7), согласно теореме Донжуа-Карлемана, представление (1.9) единственно.

Сходимость ряда (1.9) везде следует из условий (1.1), (1.6) и из следующей асимптотической оценки

$$\overline{\Gamma}(\gamma_k, \gamma) \sim \exp\left[\gamma_k \int_0^{\gamma_k} \frac{n(t)}{t^2} dt\right]. \quad (\text{см. } (^2))$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1.1. *При*

$$0 < \delta_n \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\tau_n}{U_n},$$

где

$$\tau_n = \exp\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right), \qquad U_n = \exp\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}\right)$$

имеем

$$|\omega(t, \gamma)| < e^{-t_0 e^{-C \ln t}} A, \tag{1.14}$$

где A — абсолютная константа, а C — константа Эйлера.

Доказательство следует из представления

$$\omega(t, \gamma) = \int_{0}^{\infty} G\left(\frac{t}{t_0}, \gamma, \beta\right) \omega(t_0, \beta) \frac{dt_0}{t_0}, \tag{1.15}$$

полученного Г. В. Бадаляном [3], взявшего $\beta = \infty$ и заметившего, что $\omega(x, \infty) = \exp(-x e^{-C})$.

Лемма 1.2. *Пусть последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условиям (1.1), (1.2) и (1.3) и пусть $F(t)$ конечна, интегрируема на $(0, +\infty)$, регулярна в угле $|\arg z| < \alpha$ и там удовлетворяет неравенству*

$$|F(t)| \leq M e^{\sigma |t|} \quad (|t| > 1, \quad |\arg z| < \alpha)$$

Тогда функцию

$$f(z) = \int_{0}^{\infty} \omega(zt, \gamma) F(t)\, dt$$

можно аналитически продолжать в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{2} + \alpha$.

Доказательство следует из оценки (1.14) и теоремы 2.1 гл. работы [2].

2. Теорема 2.1. *Пусть $F(z)$ некоторая функция, аналитическая в угле $S(\varphi_1, \varphi_2)$; $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$, с раствором $\alpha\pi \le 2\pi$ такова, что*

$$\overline{\lim_{z \to \infty}} \frac{\ln |F(z)|}{|z|} \leq h(\psi_1, \psi_2) < +\infty \tag{2.1}$$

в любом угле $\bar{S}(\psi_1, \psi_2) \subset S(\varphi_1, \varphi_2)$.

Если a_n и b_n обыкновенные и абсолютные моменты, определенные соответственно в (1.4), (1.5), конечны и удовлетворяют условиям (1.6), (1.7) и

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln \ln \mu(r^{1/(1-k)})}{\ln r} \leq \frac{1}{k}, \tag{2.2}$$

где $\mu(r)$ — максимальный член ряда (1.9), то $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно предполагать

$$-\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Исходя из предположения (2.2), доказывается, что квазицелая функция

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k z^{\gamma_k}}{\gamma_k\prod\limits_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty}\left(1-\frac{\gamma_k}{\gamma_n}\right)e^{\frac{\gamma_k}{\gamma_n}}}$$

имеет порядок $\rho\leqslant\frac{1}{1-\alpha_0}$, где α_0 — параметр, участвующий в условии (1.6).

Беря $h=h\left(-\frac{\alpha'\pi}{2},\ \frac{\alpha'\pi}{2}\right)$, где $\alpha_0<\alpha'<\alpha$, с помощью замены пути интегрирования, возможность которой следует из леммы 2, имеем

$$f(z)=\int_{0}^{\infty(\varphi)}\omega(zt,\ \gamma)F(t)dt \tag{2.3}$$

для $\mathrm{Re}(ze^{i\varphi})>h$ и $|\varphi|\leqslant\frac{\alpha'\pi}{2}$. Используя условие (2.1) и лемму 1.1, получаем, что $|f(z)|$ ограничена внутри $|\arg(z-z_0)|\leqslant\frac{1+\alpha'}{2}\pi$, где $z_0=\frac{h+\delta}{\cos\alpha'\frac{\pi}{2}}$. Отсюда следует, что $f(z)$ ограничена на сторонах угла $|\arg(z-z_0)|\leqslant(1-\alpha')\frac{\pi}{2}$ и порядок ее $\leqslant\frac{1}{1-\alpha_0}<\frac{1}{1-\alpha'}$.

Применяя принцип Фрагмена-Линделёфа, получим, что функция ограничена и на всей плоскости, значит $f(z)\equiv 0$, следовательно по формуле обращения преобразования типа свертки $F(z)\equiv 0$.

Аналогично доказывается также следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть функция $F(z)$ аналитическая внутри угла с раствором $\alpha\pi\leqslant\pi$ и такова, что там*

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{\ln|F(z)|}{|z|}\leqslant h<+\infty. \tag{2.4}$$

Если обыкновенные и абсолютные моменты функции $F(z)$, определенные соответственно в (1.4) *и* (1.5), *конечны и удовлетворяют условиям* (1.6), (1.7) *и*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\mu(r^{1-\beta})}{r^{1-\beta}}=0\quad(\beta=d_0+\varepsilon<\alpha,\quad \alpha_0<\alpha,) \tag{2.5}$$

тогда

$$F(z)\equiv 0.$$

Теорема 2.3. *Пусть $F(z)$ некоторая функция, аналитическая в полуплоскости* $\mathrm{Re}\ z>0$ *и такая, что*

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{\ln|F(z)|}{|z|}<h<+\infty. \tag{2.6}$$

Если ее обыкновенные и абсолютные моменты конечны и удовлетворяют условиям (1.7) *и*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n\cdot e^{\gamma_n}\sqrt[\gamma_n]{|a_n|}}{\sqrt[\gamma_n]{\gamma_n\overline{\Gamma}(\gamma_n)}}=\sigma<\frac{\pi}{2eh}, \tag{2.7}$$

тогда $F(z)\equiv 0$.

Доказательство. Поступаем так же, как и выше. Вводя функцию

$$f(z)=\int_0^\infty \omega(zt,\gamma)F(t)\,dt$$

и производя замену пути интегрирования, получаем, что функция

$$f(z)=\int_0^{\infty(\varphi)}\omega(zt,\gamma)F(t)\,dt\;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^{\gamma_n}}{\gamma_n\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\left(1-\frac{\gamma_n^2}{\gamma_k^2}\right)\overline{\Gamma}(\gamma_n)}$$

квазицелая и ограничена в каждой полуполосе $(I_m z)<h+\delta$, $(\delta>0)$, $\mathrm{Re}\,z<0$. И так как $\sigma h<\frac{\pi}{2e}$, можем выбрать такие два числа $\sigma'>\sigma$, $h'=h+\delta>h$, что $\sigma' h'<\frac{\pi}{2e}$.

Рассматривая затем функцию

$$\Phi_\varepsilon(z)=f(z)\exp[-\varepsilon e^{-i\sigma' z}]\quad(\varepsilon>0)$$

и используя условие (2.7), имеем

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{\ln\ln|f(z)|}{|z|}=\sigma e<\sigma' e.$$

Следовательно

$$\ln|\Phi_\varepsilon(z)\leqslant\ln|f(z)|-\varepsilon\cos(e\sigma' h')\,e^{\sigma' r}\to-\infty,$$

когда $|\mathrm{Im}\,z|\leqslant h'$ и $\mathrm{Re}\,z\leqslant 0$. Если M верхняя грань функции $f(z)$ на границе полосы, то, согласно принципу максимума, имеем

$$|\Phi_\varepsilon(z)|\leqslant M\quad\text{и}\quad|f(z)|\leqslant M\exp[\varepsilon e^{-i\sigma' z}]$$

в $|\mathrm{Im}\,z|\leqslant h'$ и $\mathrm{Re}\,z\leqslant 0$, где $\varepsilon>0$ и, устремляя ε к нулю, получим $|f(z)|\leqslant M$ в $|\mathrm{Im}\,z|\leqslant h'$ и $\mathrm{Re}\,z\leqslant 0$.

Следовательно $f(z)\equiv 0$ и $F(z)\equiv 0$.

В заключение приношу благодарность Г. В. Бадаляну за обсуждение результатов и полезные советы.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Վ. Մ. ԽԴԻԴԱՐՅԱՆ

Անկյան մեջ անալիտիկ ֆունկցիայի սովորական և բացարձակ մոմենտների վերաբերյալ

Դիցուք գոյություն ունեն հետևյալ մեծությունները՝

$$a_n = \int_0^\infty F(t)\, t^{\gamma_n}\, dt$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$b_n = \int_0^\infty |F(t)|\, t^{\gamma_n}\, dt$$

որտեղ՝

$$0=\gamma_0<\gamma_1<\dots<\gamma_n<\dots,\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2}<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}=\infty$$

կամայական դրական թվերի հաջորդականություն է, որը բավարարում է նաև որոշ պայմանների (1. 1) և (1. 2)։ Այդ մեծություններին համապատասխանաբար անվանում են $F(t)$ ֆունկցիայի սովորական և բացարձակ մոմենտներ։ Աշխատանքում հիմնվելով ծալվածքային տիպի ձևափոխության վրա, ստացված են անկյան մեջ անալիտիկ ֆունկցիաների վերաբերյալ սովորական և բացարձակ մոմենտների տերմիններով միակության թեորեմներ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *B. R. Salinas*, Journal de Mathematiques pures et appliques ser. 9, v. 35. (1956). [2] *М. А. Евграфов*, Аналитические функции, изд. „Наука", 1965. [3] *Г. В. Бадалян* ИАН СССР, сер. мат. 26 стр. 313—328, (1962).