ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LV 1972 3

УДК 539.3

МЕХАНИКА

М. Л. Бурышкин, В. А. Семенов

О равновесии симметричных пластин

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 18 II 1972)

В данной работе изучаются упрощения, вносимые в статические расчеты симметрией пластин. В силу своей структуры пластины могут обладать только двумя типами точечных групп симметрии: циклическими группами C_n и C_{nv} ($n=1, 2, 3, \ldots$). Элементами группы C_n являются повороты C_n^r ($r=0, 1, \ldots, n-1$) на углы $r\alpha$, причем $\alpha=\frac{2\pi}{n}$. В группу C_{nv} кроме указанных элементов входят также отражения σ_{r+1} в плоскостях, проходящих через ось симметрии и составляющих углы $r\frac{\alpha}{2}$ ($r=0, 1, \ldots, n-1$) с некоторой плоскостью симметрии, принятой за начальную.

§ 1. Пусть некоторая система S, состоящая из пластины, связанной со стержнями, занимает область Ω и обладает группой G симметрии порядка m. Положения точек ее срединной поверхности определяются полярными координатами ρ и φ, причем полюс координат располагается на оси симметрии. Уравнения внешнего и внутреннего контуров области Ω имеют вид $\rho=\rho^+(\varphi)$ и $\rho=\rho^-(\varphi)$. Пронумеруем все элементы симметрии $g_j\in G$ ($j=1, 2, \ldots, m$) в следующем порядке: $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^{n-1}, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Обозначим через $\Omega_1\subset\Omega$ область, ограниченную прямыми $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{m}\alpha$ и соответствующими участками контуров области Ω. В Ω_1 стержни располагаются по кривым Γ_{l1} ($l=1, 2, \ldots, a$), где a — число этих стержней. При воздействии элемента g_j симметрии j-й стержень из области Ω_1 перейдет в стержень, расположенный по кривой Γ_{lj} ($l=1, 2, \ldots, a$; $j=1, 2, \ldots, m$), уравнение которой $\rho=\rho_{lj}(\varphi)$.

Если вариации прогибов $\delta w(\rho, \varphi)$ системы S удовлетворяют граничным условиям, то из принципа виртуальных перемещений следует такое уравнение равновесия при действии поперечной нагрузки $q(\rho, \varphi)$:

$$\delta\left(V_0+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{a}V_{ij}\right)=\int_0^{2\pi}\int_{\rho^-(\varphi)}^{\rho^+(\varphi)}q(\rho,\varphi)\delta w(\rho,\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi. \tag{1}$$

где V_0 и V_{ij}—потенциальная энергия пластины и ij-го стержня, причем

$$V_0=\frac{D}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\rho^-(\varphi)}^{\rho^+(\varphi)}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)^2-\frac{2(1-\nu)}{\rho}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial\varphi}\right)^2+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial\varphi}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2\right]\right\}\rho\,d\rho\,d\varphi. \tag{2}$$

и $V_{ij}=\int_{\Gamma_{ij}}dV_{ij}$. Для конкретизации последнего выражения необходимо задаться связями между пластиной и стержнями.

Согласно известным результатам теории представлений групп ([1]) для любой функции $p(\rho,\varphi)$, заданной на Ω, можно построить семейство функций $p_{sk}^{(\nu)}(\rho,\varphi)$ $(k,s=1,2,\ldots,m_\nu;\ \nu=1,2,\ldots,l$, обладающих следующими свойствами:

$$p(\rho,\varphi)=\sum_{\nu=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_\nu}p_{sk}^{(\nu)}(\rho,\varphi), \tag{3}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{\rho^-(\varphi)}^{\rho^+(\varphi)}p_{sk}^{(\nu)}(\rho,\varphi)f_{ik}^{(\mu)}(\rho,\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi=\delta_{\nu\mu}\delta_{si}\frac{m}{m_\nu}\sum_{\alpha=1}^{m_\nu}\int_0^{\frac{n}{m}\alpha}\int_{\rho^-(\xi)}^{\rho^+(\xi)}p_{s\alpha}^{(\nu)}(\rho,\xi)f_{i\alpha}^{(\mu)}(\rho,\xi)\rho\,d\rho\,d\xi. \tag{4}$$

Здесь l—число неприводимых представлений группы G, а m_ν—размерность ν-го представления. Нумерация неприводимых представлений соответствует принятой в([2]).

Пусть к системе S приложена поперечная нагрузка $q_{sk}^{(\nu)}(\rho,\varphi)$. Используя (3) и (4) получаем следующие равенства:

$$\int_0^{2\pi}\int_{\rho^-(\varphi)}^{\rho^+(\varphi)}q_{sk}^{(\nu)}(\rho,\varphi)\delta w(\rho,\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{m}{m_\nu}\sum_{\alpha=1}^{m_\nu}\int_0^{\frac{n}{m}\alpha}\int_{\rho^-(\xi)}^{\rho^+(\xi)}q_{s\alpha}^{(\nu)}(\rho,\xi)\left|\delta w(\rho,\xi)\right|_{i\alpha}^{(k)}\rho\,d\rho\,d\xi, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{a}V_{ij}=\frac{m}{m_\nu}\sum_{\alpha=1}^{m_\nu}\sum_{i=1}^{a}\frac{1}{b_i}V_{i\alpha}^{(\nu k)};\quad V_\Omega=\frac{m}{m_\nu}\sum_{\alpha=1}^{m_\nu}V_{\Omega\alpha}^{(\nu k)}; \tag{6}$$

где $b_i=\frac{m}{n}$, если уравнение кривой Γ_n имеет вид $\varphi=0$ или $\varphi=\frac{n}{m}\alpha$, и $b_i=1$ в противном случае; $V_{\Omega\alpha}^{(\nu k)}$ и $V_{i\alpha}^{(\nu k)}$—потенциальная энергия участка пластины, занимающего область Ω_α и i-го стержня при про-

гибких $\varkappa_{\nu\mu}^{(k)}$ пластины. Подставляя (5) и (6) в уравнение равновесия и учитывая линейную независимость вариаций $[\delta w(\rho, \varphi)]_{\nu\mu}^{(k)}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m_k$) приходим к системе уравнений

$$\delta\left(V_{\nu\mu}^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} V_{ii}^{(\nu\mu)}\right) \int_0^{\frac{a}{m}} \int_{\rho^-(\varphi)}^{\rho^+(\varphi)} q_{\nu\mu}^{(k)}(\rho, \varphi)[\delta w(\rho, \varphi)]_{\nu\mu}^{(k)} d\rho d\varphi, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m_k), \tag{7}$$

определяющей функции $\varkappa_{\nu\mu}^{(k)}(\rho, \varphi)$.

Построение функций $p_{\nu\mu}^{(k)}(\rho, \varphi)$, механическая интерпретация системы уравнений (7), а также связанные с ней упрощения и методика рассматриваемых расчетов обсуждаются ниже.

§ 2. Воздействуя на функцию $p(\rho, \varphi)$ элементом $g_j \in G$, получаем некоторую новую функцию $p_j(\rho, \varphi)$. В общем случае система функций $p_j(\rho, \varphi)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ линейно независима и порождает m-мерное пространство R_m функций. Как показано в [1], функции $p_{\nu\mu}^{(k)}(\rho, \varphi)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, l$; $k, \mu = 1, 2, \ldots, m_k$) являются каноническими базисными функциями регулярного представления T группы G в пространстве R_m и, следовательно

$$p_{\nu\mu}^{(k)}(\rho, \varphi) = \sum_{j=1}^{m} c_{j\nu\mu}^{(k)} p_j(\rho, \varphi), \tag{8}$$

где $c_{j\nu\mu}^{(k)}$ — численные коэффициенты, вещественные для группы C_{nv}. Функции $P_{\nu\mu}^{(k)}(\rho, \varphi)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m_k)$ образуют базис k-го подпространства $R_{m_k}^{(k)}$, инвариантного относительно представления T и преобразующегося по неприводимому представлению τ_k группы G. Весьма удобное для приложений свойство вещественности коэффициентов $c_{j\nu\mu}^{(k)}$ в случае группы C_n симметрии имеет место только для подпространств, преобразующихся по неприводимым представлениям τ_1 и $\tau_{\frac{n}{2}}$ (при четном n). В этом случае целесообразно функцию $p(\rho, \varphi)$ раскладывать по подпространствам $R_1^{(1)}$, $R_1^{(\nu)} \cup R_n^{(\nu)}$, $(\nu = 2, 3, \ldots$

$\left.\begin{matrix} \frac{n-1}{2} & \text{при нечетном } n \\ \frac{n}{2} - 1 & \text{при четном } n \end{matrix}\right)$ и $R_{\frac{n}{2}}$ (в случае четного n). Тогда коэффициенты $c_{j\nu\mu}^{(k)}$ можно выбрать вещественными, а формулы (3), (7) и (8) сохраняют вид, если под τ_k понимать представление, индуцируемое в $R_1^{(\nu)} \cup R_n^{(\nu)}$ представлением T, и положить $m_k = 2$, а $k = 1$. Заметим, что для двумерных представлений рассматриваемых групп матрицы операторов $\tau_k(g_l)$ и $\tau_k(g_{n-l})$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ соответственно имеют вид

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi(l-1)\nu_i}{n}; & -\sin\frac{2\pi(l-1)\nu_i}{n} \\ \sin\frac{2\pi(l-1)\nu_i}{n}; & \cos\frac{2\pi(l-1)\nu_i}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cos\frac{2\pi(l-1)\nu_i}{n}; & -\sin\frac{2\pi(l-1)\nu_i}{n} \\ -\sin\frac{2\pi(l-1)\nu_i}{n}; & \cos\frac{2\pi(l-1)\nu_i}{n} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Используя матрицы (9) и специальные методы теории представлений ([1, 2]), получаем для одномерных представлений групп C_n и C_{nv}:

$$c_{jv} = \frac{1}{m}\chi_\nu(g_j) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \begin{cases} 2\frac{m}{n}, \text{ при четном } n \\ \frac{m}{n}, \text{ при нечетном } n \end{cases}). \tag{10}$$

а для двумерных:

$$c^{(k)}_{j\nu 1} = \frac{2}{m}\left|(-1)^{k(j-n-1)}\delta_{1k}\cos\frac{2\pi\nu_i(j-1)}{n} - \delta_{2k}\sin\frac{2\pi(j-1)\nu_i}{n}\right|, \tag{11}$$

$$c^{(k)}_{j\nu 2} = \frac{2}{m}\left|(-1)^{k(j-n-1)}\delta_{1k}\sin\frac{2\pi\nu_i(j-1)}{n} + \delta_{2k}\cos\frac{2\pi(j-1)\nu_i}{n}\right|, \tag{12}$$

где $\chi_\nu(g_j)$ — значение характера ν-го неприводимого представления на элементе $g_j \in G$; δ_{1k} и δ_{2k} — символы Кронекера

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \geqslant 0, \\ 0, \text{ при } x < 0, \end{cases} \qquad \nu_i = \begin{cases} \nu - 2\frac{m}{n} \text{ при четном } n, \\ \nu - \frac{m}{n} \text{ при нечетном } n. \end{cases}$$

Доказательства свойств (3) и (4) для построенных вышеуказанным способом функций $p^{(k)}_{\varphi}$ проводятся аналогично подобным доказательствам в ([1]).

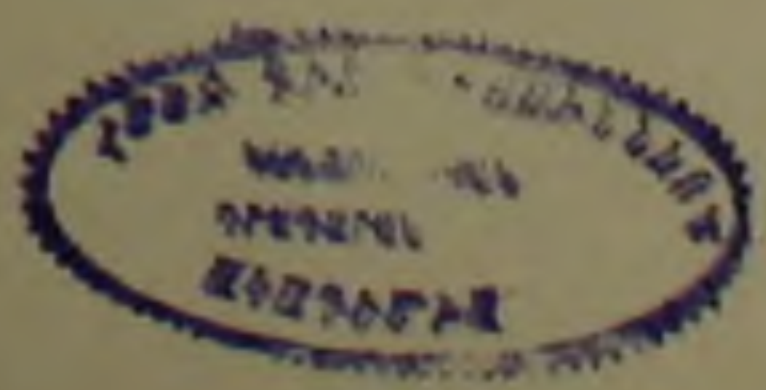
Положим для групп C_n и C_{nv}: $\varphi = (j-1)\alpha + \xi$, $(0 \leqslant \xi \leqslant \alpha;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ и $\varphi = \frac{1}{2}(j-1)\alpha + \xi$, $(0 \leqslant \xi \leqslant \frac{\alpha}{2};\ j = 1, 2, \ldots, 2n)$ соответственно. Тогда функции $p^{(1)}_{\nu 1}(\rho, \varphi)$, преобразующиеся по одномерным представлениям групп C_n и C_{nv}, удовлетворяют равенствам:

$$p^{(1)}_{\nu 1}(\rho, \varphi) = \chi_\nu(g_j)p^{(1)}_{\nu 1}(\rho, \xi) \tag{13}$$

и

$$p^{(1)}_{\nu 1}(\rho, \varphi) = \begin{cases} \chi_\nu(C_n^{\frac{j-1}{2}})p^{(1)}_{\nu 1}(\rho, \xi), \text{ при нечетном } j, \\ \chi_\nu(C_n^{\frac{j}{2}})\chi_\nu(\sigma_1)p^{(1)}_{\nu 1}(\rho, \frac{\alpha}{2} - \xi), \text{ при четном } j \end{cases} \tag{14}$$

а для функций $p^{(k)}_{\nu 2}(\rho, \varphi)$, преобразующихся по двумерным представлениям группы C_n, имеют место следующие соотношения, которые при нечетных значениях j остаются справедливыми и для группы C_{nv}:



$$p_{\nu 1}^{(k)}(\rho,\ \varphi)=\cos\frac{\pi(j-1)\gamma_1}{n}p_{\nu 1}^{(k)}(\rho,\ \xi)-\sin\frac{\pi(j-1)\gamma_1}{n}p_{\nu 2}^{(k)}(\rho,\ \xi),$$

$$p_{\nu 2}^{(k)}(\rho,\ \varphi)=\sin\frac{\pi(j-1)\gamma_1}{n}p_{\nu 1}^{(k)}(\rho,\ \xi)+\cos\frac{\pi(j-1)\gamma_1}{n}p_{\nu 2}^{(k)}(\rho,\ \xi). \tag{15}$$

Если же в случае группы C_{nv} значения j четные, то

$$p_{\nu 1}^{(k)}(\rho,\ \varphi)=-\cos\frac{\pi j\gamma_1}{n}p_{\nu 1}^{(k)}\left(\rho,\ \frac{\pi}{2}-\xi\right)-\sin\frac{\pi j\gamma_1}{n}p_{\nu 2}^{(k)}\left(\rho,\ \frac{\pi}{2}-\xi\right),$$

$$p_{\nu 2}^{(k)}(\rho,\ \varphi)=-\sin\frac{\pi j\gamma_1}{n}p_{\nu 1}^{(k)}\left(\rho,\ \frac{\pi}{2}-\xi\right)+\cos\frac{\pi j\gamma_1}{n}p_{\nu 2}^{(k)}\left(\rho,\ \frac{\pi}{2}-\xi\right). \tag{16}$$

Уравнения (13), (14), (15) и (16) характеризуют те ограничения, которые накладываются на функции $p_{\nu\mu}^{(k)}(\rho,\ \varphi)$. Нетрудно видеть, что любым заданным внутри области Ω_1 функциям $p_{\nu\mu}^{(k)}(\rho,\ \xi)$ ($\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ m_\nu$), и в частности, функциям $|\delta w(\rho,\ \xi)|_{\nu\mu}^{(k)}$ соответствует некоторая функция $p_{\nu\mu}^{(k)}(\rho,\ \varphi)$. Поэтому под функцией $|\delta w(\rho,\ \xi)|_{\nu\mu}^{(k)}$ из системы (8) можно понимать произвольную вариацию прогиба в области Ω_1, удовлетворяющую граничным условиям на соответствующих участках контуров области Ω и ряду дополнительных условий на прямых $\varphi=0$ и $\varphi=\frac{\pi}{n}$ г. Так, для одномерных представлений групп C_n и C_{nv}

$$w_{\nu 1}^{(1)(s)}(\rho,\ \pi)=\chi_\nu(C_n)\,w_{\nu 1}^{(1)(s)}(\rho,\ 0); \tag{17}$$

и

$$w_{\nu 1}^{(1)(s)}\left(\rho,\ \frac{\pi}{2}\right)=(-1)^s\chi_\nu(\sigma_y)w_{\nu 1}^{(1)(s)}\left(\rho,\ \frac{\pi}{2}\right),$$

$$w_{\nu 1}^{(1)(s)}(\rho,\ 0)=(-1)^s\chi_\nu(\sigma_1)w_{\nu 1}^{(1)(s)}(\rho,\ 0), \tag{18}$$

а для двумерных представлений:

$$w_{\nu 1}^{(k)(s)}(\rho,\ \pi)=\cos\frac{\pi\gamma_1}{n}w_{\nu 1}^{(k)(s)}(\rho,\ 0)-\sin\frac{\pi\gamma_1}{n}w_{\nu 2}^{(k)(s)}(\rho,\ 0),$$

$$w_{\nu 2}^{(k)(s)}(\rho,\ \pi)=\sin\frac{\pi\gamma_1}{n}w_{\nu 1}^{(k)(s)}(\rho,\ 0)+\cos\frac{\pi\gamma_1}{n}w_{\nu 2}^{(k)(s)}(\rho,\ 0). \tag{19}$$

и

$$w_{\nu 1}^{(k)(0)}(\rho,\ 0)=w_{\nu 1}^{(k)(2)}(\rho,\ 0)=0,\quad w_{\nu 2}^{(k)(1)}(\rho,\ 0)=w_{\nu 2}^{(k)(3)}(\rho,\ 0)=0, \tag{20}$$

$$w_{\nu 2}^{(k)(s)}\left(\rho,\ \frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}-\operatorname{ctg}\frac{\pi\gamma_1}{n}w_{\nu 1}^{(k)(s)}\left(\rho,\ \frac{\pi}{2}\right), & \text{при четном } s\\ \operatorname{tg}\frac{\pi\gamma_1}{n}w_{\nu 1}^{(k)(s)}\left(\rho,\ \frac{\pi}{2}\right), & \text{при нечетном } s\end{cases}$$

где $w_{\nu\mu}^{(k)(s)}(\rho,\ \xi)$ — s-я частная производная по ξ от функции $w_{\nu\mu}^{(k)}(\rho,\ \xi)$ ($s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$),

Так как любые производные по ρ от функций $w^{(k)}_{\nu\mu}(\rho, \varphi)$ удовлетворяют тем же соотношениям, что и сами функции, то с помощью дифференциальных выражений для углов поворотов и внутренних силовых факторов ([3]) нетрудно придать механический смысл отмеченным граничным условиям.

Для каждого представления τ_ν рассмотрим систему S_ν, состоящую из m_ν пластинок $S_{\nu\mu}(\mu = 1, 2, \ldots, m_\nu)$, любая из которых совпадает с частью системы S, расположенной в Ω_1. Схему загружения системы S_ν, при которой на каждую ее часть $S_{\nu\mu}$ действует соответственно нагрузка $q^{(k)}_{\nu\mu}(\rho, \varphi)$, обозначим через $q^{(k)}_\nu$. Если под $w^{(k)}_{\nu\mu}(\rho, \varphi)$ понимать прогибы пластинки $S_{\nu\mu}$ при схеме $q^{(k)}_\nu$ загружения, то выражение (7) можно трактовать как уравнение равновесия системы S_ν, на части $S_{\nu\mu}$ которой наложены вышеуказанные граничные условия. Решением этой механической задачи при схеме загружения $q^{(k)}_\nu$ являются функции $w^{(k)}_{\nu\mu}(\rho, \varphi)$. Рис. 1 иллюстрирует расчетную схему S_ν для функций $w^{(k)}_{\nu\mu}(\rho, \varphi)$, соответствующую двумерным представлениям группы C_{nv}.

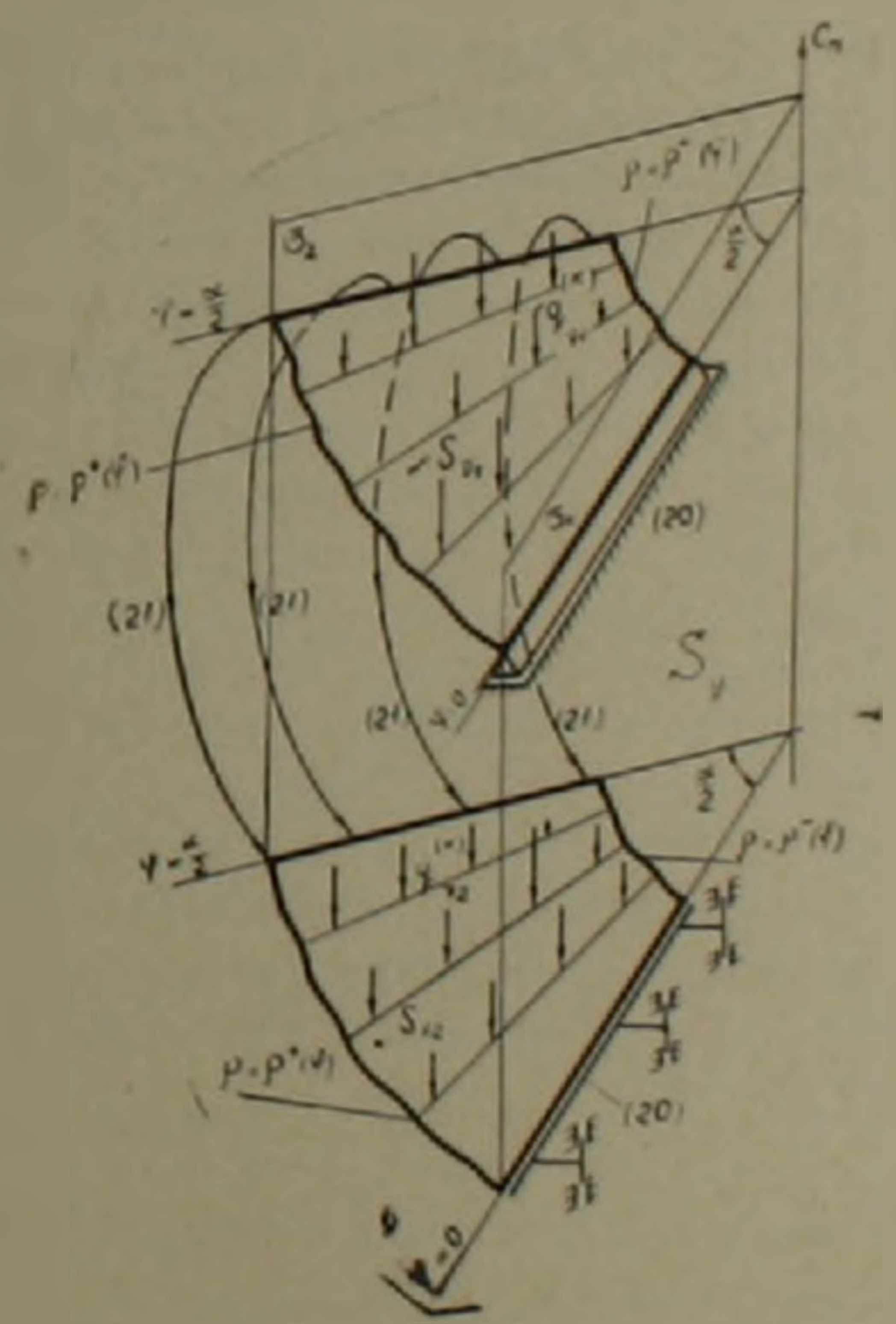


Рис. 1.

В заключение предлагается рациональная методика статических расчетов симметричных пластин: а) по заданной функции нагрузки на основании формул (9), (10), (11) и (12) строятся функции $q^{(k)}_{\nu\mu}(\rho, \varphi)$; б) для каждого представления τ_ν составляется своя система S_ν; в) определяются прогибы $w^{(k)}_{\nu\mu}(\rho, \varphi)$ пластинок $S_{\nu\mu}$ при загрузке S_ν по схеме $q^{(k)}_\nu$ $(k = 1, 2, \ldots, m_\nu)$; г) по формулам (13), (14), (15) и (16) находится функция $w^{(k)}_{\nu 1}(\rho, \varphi)$; д) согласно (3) искомая функция прогибов системы S строится как $w = \sum_{\nu=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_\nu} w^{(k)}_{\nu 1}(\rho, \varphi)$.

Применение предлагаемой методики особенно целесообразно при наличии большого количества стержней, отверстий, точечных опор и т. п.

Одесский инженерно-строительный институт

[illegible]

Սիմետրիկ թաղանթների հավասարակշռության մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է սիմետրիկ թաղանթների ստատիկ հաշվարկների պարզեցումներ: Այդ հաշվարկների համար առաջադրվում է ռացիոնալ մեթոդ. ա) տված կշռային φ ֆունկցիայի միջոցով (9), (10), (11) և (12) բանաձևերի օգնությամբ կառուցվում է $\varphi_{\nu}^{(k)}(\rho, \xi)$ ֆունկցիա. բ) յուրաքանչյուր ν ներկայացման համար կազմվում է S_{ν} հաշվարկման սխեմ, որը բաղկացած է m էլեմենտար բջիջներից՝ $S_{\nu,i}$ գ) որոշվում է $S_{\nu,k}$ թաղանթների $W_{\nu,k}^{(k)}(\rho, \xi)$ ճկումները φ_{ν}^{k} բեռների ազդեցության տակ. դ) (13), (14), (15) և (16) բանաձևերի օգնությամբ գտնվում են $W_{\nu,k}^{(k)}(\rho, \xi)$ ֆունկցիաները. ե) բանաձևի օգնությամբ կառուցվում է որոնելի ճկման ֆունկցիան:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. Г. Каплан*, Симметрия многоэлектронных систем, Изд. «Наука», М., 1969. [2] *Г. Я. Любарский*, Теория групп и ее применение в физике, ГИФМЛ, 1958. [3] *С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер*, Пластинки и оболочки, ГИФМЛ, М., 1963.