ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LV 1972 3

УДК 518

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

В. Г. Мхитарян

Об эффективном решении одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 14/IV 1972)

В работе излагается эффективный способ решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения

$$a(x)\varphi'(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi'(y)dy}{y-x}=b(x)\varphi(x)+f(x) \qquad (0.1)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-\infty)=0,\ \varphi(\infty)=P=\mathrm{const}, \qquad (0.2)$$

где известные функции $a(x)$, $b(x)\in L^2(-\infty,\infty)$, неизвестная функция $\varphi'(x)\in L^2(-\infty,\infty)$, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. В дальнейшем на эти функции будут наложены еще некоторые дополнительные условия. Предложенный здесь способ решения уравнения (0.1) распространяется на соответствующее интегральное уравнение, а также на системы таких уравнений. Более того, указанным способом можно эффективно решить интегро-дифференциальное или интегральное уравнение типа (0.1), а также системы таких уравнений, и в том случае, когда неизвестная функция $\varphi'(x)$ входит в интеграл в виде произведения с некоторой функцией из достаточно общего класса.

Решению интегро-дифференциального уравнения (0.1) при граничных условиях (0.2) сводится в постановке работ [1,2] решение ряда контактных задач для полуплоскости и плоскости, усиленных упругими накладками малой толщины с переменными или постоянными физическими и геометрическими характеристиками. Эти уравнения встречаются и в других областях математической физики, например в задачах теории дифракции [3], когда к ним применяется метод Винера-Хопфа и решение соответствующей задачи факторизации сводится к решению одного или системы интегральных уравнений упомянутого типа.

Указанный выше способ эффективного решения уравнения (0.1) основан на его сведении к вполне регулярным или квазивполне регулярным бесконечным системам линейных уравнений. Приводится два приема такого сведения. Предварительно рассматривается одна полная ортогональная система функций, тесно связанная с многочленами Эрмита и используемая в дальнейшем.

В заключении обсуждается один частный случай уравнения (0.1).

1. Известно ([4,5]), что если функции $\varphi_l(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ $(l=1, 2)$, а функции $\Phi_l(x)$, $(l=1,2)$ их преобразования Гильберта

$$\Phi_l(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_l(y)dy}{y-x}, \qquad (l=1, 2)$$

то $\Phi_l(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ $(l=1,2)$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(x)\Phi_2(x)dx$$

и кроме того, преобразование Гильберта однозначно обратимо в $L^2(-\infty, \infty)$. Это означает, что преобразование Гильберта в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ является унитарным оператором.

Рассмотрим, в частности, функции Эрмита $\{He_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — многочлены Эрмита. Введем в рассмотрение функции

$$G_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{He_n(y)dy}{y-x} \qquad (n=0, 1, 2, \dots) \tag{1.1}$$

Согласно только что сказанному

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_n(x)G_m(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} He_n(x)He_m(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ при } n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, \text{ при } n=m \end{cases} \tag{1.2}$$

т. е. система функций $\{G_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна на интервале $(-\infty, \infty)$. То, что эта система функций полна в $L^2(-\infty, \infty)$, непосредственно следует из полноты системы функций Эрмита в том же пространстве $L^2(-\infty, \infty)$.

При помощи преобразования Фурье легко получить

$$G_{2m}(x) = (-1)^{m+1}\sqrt{2/\pi}(2m)!\,x \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k 2^{2(m-k)}}{k![2(m-k)]!} \Phi\left(m-k+1;\ \frac{3}{2};\ -\frac{x^2}{2}\right),$$

$$G_{2m+1}(x) = (-1)^m\sqrt{2/\pi}(2m+1)! \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k 2^{2(m-k)+1}}{k![2(m-k)+1]!} \Phi\left(m-k+1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{x^2}{2}\right),$$

$$(m=0, 1, 2, \dots),$$

где $\Phi(a; c; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция ([6]).

Отправляясь от соответствующих свойств функций Эрмита, можно показать, что функции $\{G_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $G_n''(x)+(2n+1-x^2)G_n(x)=A_n+B_nx$,

где

$$A_n=\begin{cases}0, & \text{при } n=2m\\ \sqrt{2/\pi}\,2^{m+1}(2m+1)!!, & \text{при } n=2m+1\end{cases}\qquad B_n=\begin{cases}0, & \text{при } n=2m+1\\ \sqrt{2/\pi}\,2^{m}(2m-1)!!, & n=2m\end{cases}$$

$$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

рекуррентному соотношению

$$G_{n+1}(x)=2xG_n(x)-2nG_n(x)+2B_nx$$

и кроме того, $\dfrac{dG_n(x)}{dx}=-\dfrac{1}{2}G_{n+1}(x)+nG_{n-1}(x)$. $\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

Следуя (⁵), обычными методами математического анализа можно получить при больших индексах следующие асимптотические формулы

$$G_{2m}(x)=\frac{G'_{2m}(0)}{\sqrt{4m+1}}\left[\sin\sqrt{4m+1}\,x+O(x)\right]$$

$$G_{2m+1}(x)=G_{2m+1}(0)\left[\cos\sqrt{4m+1}\,x+O(x)\right],\quad \text{при } m\to\infty \qquad (1.3)$$

где $O(x)$—величины, остающиеся ограниченными при возрастании m, если x находится в любом ограниченном промежутке своего изменения*. С другой стороны можно показать, что

$$\frac{G_{2m}(0)}{(-1)^{m+1}\sqrt{2/\pi}\,2^m(2m)!}=O(1);\quad \frac{G_{2m+1}(0)}{(-1)^m\sqrt{2/\pi}\,2^m(2m+1)!}=O(1)\ \text{при } m\to\infty$$

$$(1.4)$$

Отметим, что последние оценки, а также оценки для дополнительных членов $O(x)$ в формулах (1.3) можно значительно уточнить и тем самым получить более точные асимптотические формулы. На этом, однако, останавливаться не будем, поскольку для наших целей формулы (1.3) и (1.4) вполне достаточны.

2. Обращаясь к решению сингулярного интегро-дифференциальному уравнению (0.1) при граничных условиях (0.2) положим

$$\varphi'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x_nHe_n(x),\quad \varphi(x)=\frac{P}{2\pi}(\pi+\operatorname{arc\,tg}x)+\sum_{n=1}^{\infty}y_nHe_n(x), \qquad (2.1)$$

где коэффициенты $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ неизвестны. Очевидно, что построенная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет граничным условиям (0.2). Далее положив $1/1+x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nHe_n(x)$, после некоторых операций будем иметь:

---

* На самом деле эти величины при указанных x бесконечно малы когда $m\to\infty$.

$$x_0 = \frac{Pa_0}{\pi} + y_1, \qquad x_n = \frac{Pa_n}{\pi} - \frac{y_{n-1}}{2} + (n+1)y_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (2.2)$$

Подставляя выражения функций $\varphi'(x)$ и $\psi(x)$ из (2.1) и (2.2) в уравнение (0.1) и используя формулы (1.1) и (1.2), после некоторых выкладок приходим к одной бесконечной системе и одной конечной системе линейных уравнений:

$$X_m + \frac{1}{(\pi 2^m m!)^{1/2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n n!}\, K_{m,n} X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n n!}\, R_{m,n} Y_n \right] =$$

$$= \frac{f_m - \sqrt{\pi} K_{0,m} X_0}{\pi(\sqrt{\pi} 2^m m!)^{1/2}}, \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$Y_1 - \frac{X_0}{\sqrt{2}} = \frac{Pa_0}{\pi^{5/4}\sqrt{2}}, \qquad Y_2 - \frac{X_1}{4} = \frac{Pa_1}{\pi^{5/4} 4\sqrt{2}}, \quad (2.3)$$

$$Y_m - \frac{Y_{m-2}}{2m\sqrt{(m-1)m}} - \frac{X_m}{m\sqrt{2m}} = -\frac{Pa_m}{\pi^{5/4} m\sqrt{2^m m!}} \quad (m = 3, 4, \ldots)$$

где введены следующие обозначения:

$$x_m = \sqrt{\sqrt{\pi}\, 2^m m!}\, X_m, \qquad y_m = \sqrt{\sqrt{\pi}\, 2^m m!}\, Y_m, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$K_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} a(x) He_n(x) G_m(x)\, dx, \qquad R_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} B(x) He_n(x) G_m(x)\, dx$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

притом предполагается, что $b(x) \operatorname{arctg} x \in L^2(-\infty, \infty)$. После того как определены коэффициенты $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ неизвестный коэффициент X_0 легко определится из соотношения

$$X_0 + \frac{1}{\pi^{3/2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2^n n!}\, K_{0,n} X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n n!}\, R_{0,n} Y_n \right] = f_0/\pi^{3/4}.$$

Очевидно, что уравнения (2.3) можно рассматривать как две бесконечные системы линейных уравнений.

Исследование бесконечных систем (2.3) будем проводить в предположении, что существуют производные $a'(x), b'(x) \in L^2(-\infty, \infty)$. Тогда будем иметь:

$$K_{m,n} = -k^{(1)}_{m,n}/2(n+1), \quad R_{m,n} = -k^{(2)}_{m,n}/2(n+1), \quad (m, n = 0, 1, \ldots) \quad (2.4)$$

где

$$k^{(1)}_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} [a'(x)G_m(x) + a(x)G'_m(x) - xa(x)G_m(x)]\, He_{n+1}(x)\, dx,$$

$$k^{(2)}_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} [b'(x)G_m(x) + b(x)G'_m(x) - xb(x)G_m(x)]\, He_{n+1}(x)\, dx. \quad (2.5)$$

Теперь оценим суммы

$$S_m^{(1)}=\frac{1}{(\pi 2^m m!)^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2^n n!}\,|K_{m,n}|,$$

$$(m,\ n=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$S_m^{(2)}=\frac{1}{(\pi 2^m m!)^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2^n n!}\,|R_{m,n}|.$$

Приняв во внимание (2.4) и неравенство Коши-Буняковского, можем записать:

$$S_m^{(1)}=\frac{1}{2\pi(\sqrt{\pi 2^m m!})^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\,|K_{m,n}^{(1)}|}{n+1}<$$

$$<\frac{1}{2\pi(\sqrt{\pi 2^m m!})^{3/2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\pi}\,2^n n!\,|K_{m,n}^{(1)}|^2}<$$

$$<\frac{1}{2\sqrt{6}(\sqrt{\pi 2^m m!})^{3/2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\pi}\,2^n n!\,|K_{m,n}^{(1)}|^2}.$$

Учитывая (2.5) и известное неравенство Бесселя из теории ортогональных рядов, отсюда находим

$$S_m^{(1)}<\frac{1}{2\sqrt{6}(\sqrt{\pi 2^m m!})^{1/2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|a'(x)G_m(x)+a(x)G_m'(x)-xa(x)G_m(x)|^2dx\right\}^{1/2}$$

$$(m=1,\ 2,\ \ldots) \tag{2.5}$$

Совершенно аналогичным образом

$$S_m^{(2)}<\frac{1}{2\sqrt{6}(\sqrt{\pi 2^m m!})^{1/2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|b'(x)G_m(x)+b(x)G_m'(x)-xb(x)G_m(x)|^2dx\right\}^{1/2}$$

$$(m=1,\ 2,\ \ldots) \tag{2.6}$$

Если $a(x)$ и $b(x)$, а также их производные финитные функции,* сосредоточенные на интервале $(-N,\ N)$, где N сколь угодно большое положительное число, то из оценок (2.5) и (2.6) и ассимптотических формул (1.3) и (1.4) непосредственно следует, что по крайней мере

$$S_m^{(i)}=O\left(\frac{1}{\sqrt{2^m(m-1)}}\right),\quad \text{при } m\to\infty,\quad (i=1,\ 2) \tag{2.7}$$

т. е. суммы $S_m^{(1)}$ и $S_m^{(2)}$ при $m\to\infty$ довольно быстро стремятся к нулю. Соотношение (2.7) позволяет утверждать ([8]), что бесконечные системы (2.3) квазивполне регулярны, и, следовательно, их решения можно найти с любой необходимой точностью.

3. В уравнении (0.1) и в граничных условиях (0.2) перейдем к новым переменным $x=\operatorname{tg}(t/2)$, $y=\operatorname{tg}(s/2)$, $(-\pi<t,\ s<\pi)$. Это преоб-

---

* При помощи известных теорем анализа можно освободиться от указанных жестких ограничений на функции $a(x)$ и $b(x)$.

разование, очевидно, связано с отображением полуплоскости на единичный круг. После перехода будем иметь:

$$2a_1(t)\cos^2\frac{t}{2}\psi'(t)+\cos^2\frac{t}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}\psi'(s)ds=b_1(t)\psi(t)+f_1(t)+\frac{P\sin t}{2},\tag{3.1}$$

$$\psi(-\pi)=0,\qquad \psi(\pi)=P,\tag{3.2}$$

где $a_1(t)=a\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $b_1(t)=b\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $f_1(t)=f\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $\psi(t)=\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$.

Полагая $\psi'(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k e^{ikt}$ $(-\pi<t<\pi)$ и удовлетворяя условиям (3.2), получаем

$$\psi(t)=\frac{P}{2\pi}(t+\pi)-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\psi_k}{k}e^{ikt}+i\gamma,\qquad \gamma=i\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k\psi_k}{k}.$$

Подставляя выражения функций $\psi'(t)$ и $\psi(t)$ в уравнении (3.1) и принимая во внимание фундаментальное соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}e^{iks}ds=\operatorname{sign}k\,e^{ikt},\quad(-\pi<t<\pi),\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots),$$

непосредственно вытекающее из известных формул Гильберта ([4]), после некоторых операций получим бесконечную систему уравнений*

$$\psi_m+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}K_{m,k}\psi_k=g_m,\quad(m=\pm1,\ \pm2,\ldots)\tag{3.3}$$

где

$$K_{m,k}=K'_{m,k}/2\pi^2 i\operatorname{sign}m,\quad g_m=f'_m/2\pi^2 i\operatorname{sign}m,\quad(m,\ k=\pm1,\ \pm2,\ldots)$$

$$K'_{m,k}=\int_{-\pi}^{\pi}\left[a_1(t)+\frac{ib_1(t)}{2k\cos^2\frac{t}{2}}\right]e^{i(k-m)t}dt,$$

$$f'_m=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\gamma b_1(t)}{2\cos^2\frac{t}{2}}+\frac{Pb_1(t)}{4\pi\cos^2\frac{t}{2}}(t+\pi)-\frac{Pa_1(t)}{2\pi}+\frac{f_1(t)}{2\cos^2\frac{t}{2}}+\frac{P}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right]e^{-imt}dt$$

Поступая аналогично предыдущему пункту, можно показать, что если $a_1(t)$, $a_1'(t)$, $b_1(t)/2\cos^2\frac{t}{2}\in L^2(-\pi,\ \pi)$ и $a_1(-\pi)=a_1(\pi)$, то бесконечная система (3.3) при условии

$$\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,\|a_1'(t)\|+\|b_1(t)/2\cos^2\frac{t}{2}\|\leq q<1$$

вполне регулярна.

---

* Постоянная γ может быть определена способом, совершенно аналогичному указанному выше для определения X_0.

Таким образом, при определенных условиях, вообще говоря более общих чем указанные, бесконечные системы линейных уравнений, к которым изложенными двумя способами сводится интегро-дифференциальное уравнение (0.1) при граничных условиях (0.2), квазивполне регулярны или вполне регулярны.

При решении конкретных задач можно пользоваться обеими способами.

В заключении рассмотрим частный случай уравнения (0,1), когда $a(x)$ и $b(x)$ постоянные. Это соответствует контактной задаче для анизотропной полуплоскости, усиленной бесконечной накладкой постоянной толщины и модуля упругости. Преобразование Фурье дает

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{bF(\lambda)}{b+ia\lambda+\pi|\lambda|}e^{-i\lambda x}d\lambda, \qquad F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx.$$

Если $a=0$ и $f(x)=PH(x)$, где $H(x)$ — функция Хевисайда, то отсюда получим известное решение (⁵).

В рассматриваемом частном случае вместо бесконечной системы (3.3) получим следующие конечные уравнения:

$$\frac{aP}{2\pi}+\frac{a}{2}(\varphi_1+\varphi_{-1})+\frac{\pi i}{2}(\varphi_1-\varphi_{-1})=\frac{bP}{2}+b\gamma+y_0$$

$$a\varphi_k+\frac{a}{2}(\varphi_{k+1}+\varphi_{k-1})+\pi i\varphi_k\,\mathrm{sign}\,k+\frac{\pi i}{2}[\varphi_{k+1}\mathrm{sign}(k+1)+\varphi_{k-1}\mathrm{sign}(k-1)]=$$

$$=-\frac{(-1)^k ibP}{2k\pi}-\frac{ib\varphi_k}{k}+g_k \quad (k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

где

$$f(t)+\frac{P\sin t}{2}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_k e^{ikt} \qquad (-\pi<t<\pi)$$

Очевидно, что коэффициенты $\varphi_k(|k|\geq 2)$ выражаются через φ_1. Подставив их выражения через φ_1, в первое уравнение, определим φ_1 и вместе с тем все коэффициенты.

Ереванский государственный
университет

Վ. Դ. [illegible]

Սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների մի դասի էֆեկտիվ լուծման մասին

Աշխատանքում առաջարկվում է (0.1) տիպի սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման, որտեղ ինտեգրալը հասկացվում է Կոշու գլխավոր արժեքի իմաստով, (0.2) եզրային պայմաններին բավարարող լուծման էֆեկտիվ կառուցման եղանակ: Այդ տիպի ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարում-

ներ կամ համապատասխան ինտեգրալ հավասարումներ, ինչպես նաև այդպիսի հավասարումների սիստեմներ, առաջանում են մաթեմատիկական ֆիզիկայի մի շարք բնագավառներում։ Որպես օրինակներ կարելի է նշել դիֆրակցիայի տեսության շատ խնդիրներ, առաձգական վերադիրներով ուժեղացված կիսահարթության կամ լրիվ հարթության համար կոնտակտային խնդիրներ և այլն։

Ստացված արդյունքները հիմնվում են Էրմիտի հայտնի բազմանդամների հետ սերտորեն կապված լրիվ օրթոգոնալ ֆունկցիաների մի դասի վրա, որը ըստ երևույթին ֆունկցիաների նոր դաս է և որի ուսումնասիրությունը նախապես բերվում է աշխատանքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян*. ПММ, т. 32, № 4 (1968). [2] *E. Melan*. Ingenieur Archiv, 3, № 2 (1932). [3] *Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестфаль*. Теория дифракции. Изд. Мир, 1964. [4] *Ф. Трикоми*. Интегральные уравнения. Изд. ИЛ, М., 1960. [5] *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., 1948. [6] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962. [7] *В. И. Смирнов*. Курс высшей математики, т. 3, часть 2, «Наука», 1969. [8] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов*. Приближенные методы высшего анализа. Изд. М.—Л., Физматгиз, 1962.