ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LV 1972 2

УДК 539—3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Мелкумян

Контактная задача для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 2/III 1972)

Рассматривается плоская контактная задача для упругой, изотропной полуплоскости, с разрезом конечной длины a вдоль оси y, начиная от горизонтальной границы.

На участке $2b$ границы полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной формы, симметрично расположенный относительно оси разреза. Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних усилий, а в разрезе действует только нормальное давление (рис. 1). Насколько известно, эта задача рассматривается впервые. Задача решена методом Фурье.

Решение задачи сводится к системе из двух „парных" интегральных уравнений. Эта система в свою очередь сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Показано, что решение последнего уравнения может быть найдено методом последовательных приближений.

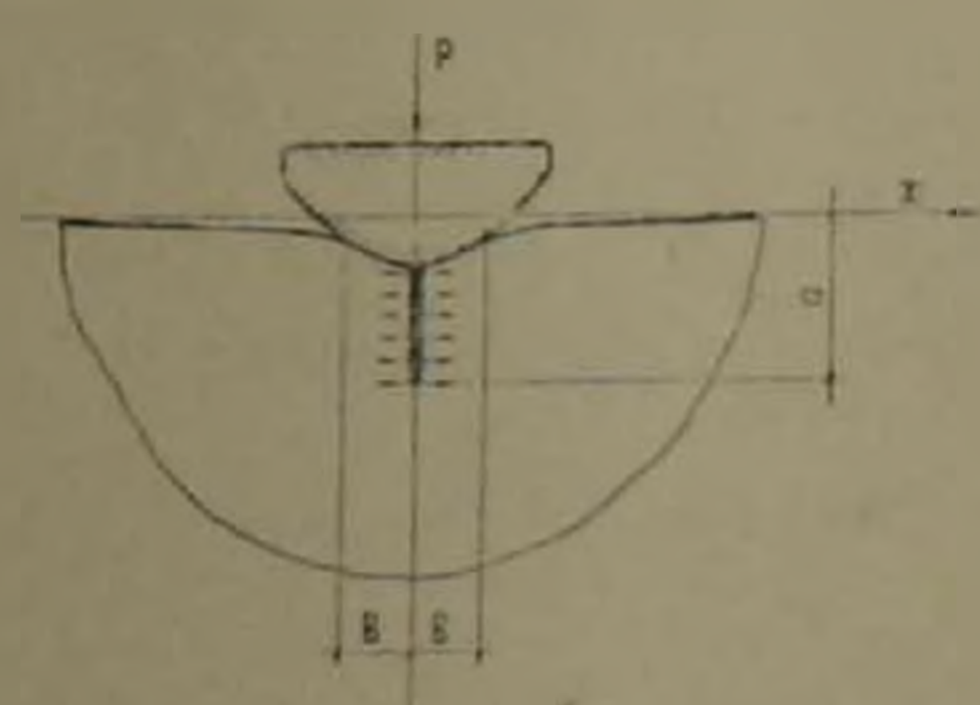

Рис. 1

В частных случаях, когда $a=0$ или $a=\infty$, соответственно получается контактная задача плоской теории упругости для полуплоскости без разреза и квадранта [1].

В силу симметрии граничных условий достаточно рассматривать только область квадранта ($0<x<\infty$, $0<y<\infty$), при этом граничные условия задачи будут иметь вид:

$$\tau_{xy}(x, 0)=0 \quad (0<x<\infty); \quad \tau_{xy}(0, y)=0 \quad (0<y<\infty)$$

$$v(x,\ 0)=f(x)\quad (0<x<b);\quad \sigma_y(x,\ 0)=0\quad (b<x<\infty)$$

$$\sigma_x(0,\ y)=f(y)\quad (0<y<a);\quad u(0,\ y)=0\quad (a<y<\infty) \tag{1}$$

Бигармоническую функцию напряжения для решения рассматриваемой задачи берем в виде:

$$\Phi(x,\ y)=\int_0^\infty [A(\alpha)+\alpha x B(\alpha)]e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)d\alpha +$$

$$+\int_0^\infty [C(\beta)+\beta y D(\beta)]e^{-\beta y}\sin(\beta x)d\beta \quad (0<x<\infty;\ 0<y<\infty) \tag{2}$$

Напряжения и перемещения определяются при помощи известных формул (2):

$$\sigma_x(x,\ y)=-\int_0^\infty \alpha^2[A(\alpha)+\alpha x B(\alpha)]e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)d\alpha +$$

$$+\int_0^\infty \beta^2[C(\beta)-2D(\beta)+\beta y D(\beta)]e^{-\beta y}\sin(\beta x)d\beta,$$

$$\sigma_y(x,\ y)=\int_0^\infty \alpha^2[A(\alpha)-2B(\alpha)+\alpha x B(\alpha)]e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)d\alpha -$$

$$-\int_0^\infty \beta^2[C(\beta)+\beta y D(\beta)]e^{-\beta y}\sin(\beta x)d\beta, \tag{3}$$

$$\tau_{xy}(x,\ y)=-\int_0^\infty \alpha^2[A(\alpha)-B(\alpha)+\alpha x B(\alpha)]e^{-\alpha x}\sin(\alpha y)d\alpha +$$

$$+\int_0^\infty \beta^2[C(\beta)-D(\beta)+\beta y D(\beta)]e^{-\beta y}\cos(\beta x)d\beta.$$

$$u(x,\ y)=\frac{1}{E}\Big\{\int_0^\infty \alpha[A(\alpha)(1+\nu)+B(\alpha)(1-\nu)+\alpha x B\alpha(1+\nu)]e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)d\alpha -$$

$$-\int_0^\infty \beta[C(\beta)(1+\nu)-2D(\beta)+\beta y D(\beta)(1+\nu)]e^{-\beta y}\cos(\beta x)d\beta\Big\}-a_0 y+b_0.$$

$$v(x,\ y)=\frac{1}{E}\Big\{\int_0^\infty \alpha[A(\alpha)(1+\nu)-2B(\alpha)+\alpha x B(\alpha)(1+\nu)]e^{-\alpha x}\sin(\alpha y)d\alpha +$$

$$+\int_0^\infty \beta[C(\beta)(1+\nu)+D(\beta)(1-\nu)+\beta y D(\beta)(1+\nu)]e^{-\beta y}\sin(\beta x)d\beta\Big\}+a_0 x+c_0.$$

Закрепляя бесконечно удаленную точку, имеем

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0. \tag{4}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1), получаем

$$C(\beta) = D(\beta), \tag{5}$$

$$B(\alpha) = A(\alpha) - \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\infty \frac{\beta^3 D(\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\beta, \tag{6}$$

$$\int\limits_0^\infty \beta D(\beta)\sin(\beta x)\,d\beta = \frac{E}{2}\,f(x), \quad (0 < x < b) \tag{7}$$

$$\int\limits_0^\infty \beta^2 D(\beta)\sin(\beta x)\,d\beta = \int\limits_0^\infty \alpha^2[A(\alpha) - 2B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)]\,e^{-\alpha x}\,d\alpha, \quad (b < x < \infty)$$

$$\int\limits_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)\cos(\alpha y)\,d\alpha = -f(y), \quad (0 < y < a) \tag{8}$$

$$\int\limits_0^\infty \alpha A(\alpha)\cos(\alpha y)\,d\alpha = \int\limits_0^\infty \beta^2 y e^{-\beta y} D(\beta)\,d\beta. \quad (a < y < \infty)$$

Подобные „парные" уравнения рассматривались в работах (3—5) и в других.

Используя результаты работы (5), из (7) для функции $D(\beta)$ получаем

$$D(\beta) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\beta}\int\limits_0^b \Psi(t)\,J_0(\beta t)\,dt + \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\beta}\int\limits_b^\infty F(t)\,J_0(\beta t)\,dt, \tag{9}$$

где

$$\Psi(t) = \frac{d}{dt}\,\frac{E}{2}\int\limits_0^t \frac{f(x)\,x\,dx}{\sqrt{t^2 - x^2}}, \tag{10}$$

$$F(t) = t\int\limits_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)\,K_0(\alpha t)\,d\alpha - 2t\int\limits_0^\infty \alpha^2 B(\alpha)\,K_0(\alpha t)\,d\alpha + t^2\int\limits_0^\infty \alpha^3 B(\alpha)\,K_1(\alpha t)\,d\alpha. \tag{11}$$

$K_i(\alpha t)$ — функции Макдональда;

$J_0(\beta t)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом.

Выразим функцию $A(\alpha)$ через функцию $D(\beta)$. Для этого умножим первое уравнение из (8) на $(r^2 - y^2)^{-1/2}\,dy$, проинтегрируем по y от нуля до r.

Умножая второе уравнение на $y(y^2 - r^2)^{-1/2}\,dy$ и интегрируя полученное равенство по y от r до бесконечности, потом дифференцируя по r, имеем:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\alpha r J_0(\alpha r)\,d\alpha = r\varphi_1(r), \quad (0<r<a) \tag{12}$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\,\alpha r\, J_0(\alpha r)\,d\alpha = r\varphi_2(r) \quad (a\leqslant r<\infty).$$

Используя формулу обращения для преобразования Ханкеля, из (12) получаем:

$$A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\alpha}\int_0^a r\varphi_1(r)J_0(\alpha r)\,dr+\frac{2}{\pi}\frac{1}{\alpha}\int_a^\infty r\varphi_2(r)J_0(\alpha r)\,dr, \tag{13}$$

где

$$\varphi_1(r)=-\int_0^r \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}}, \tag{14}$$

$$\varphi_2(r)=\int_0^\infty \beta^2 D(\beta)[\beta r K_1(\beta r)-K_0(\beta r)]\,d\beta. \tag{15}$$

Подставляя значения функции $\varphi_2(r)$ из (15) в (13) и учитывая (9), получаем

$$A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\alpha}\int_0^a r\varphi_1(r)J_0(\alpha r)\,dr+\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{\alpha}\int_0^b \Psi(t)\,dt\int_a^\infty \frac{r(r^2-t^2)}{(r^2+t^2)^2}J_0(\alpha r)\,dr+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{\alpha}\int_b^\infty F(t)\,dt\int_a^\infty \frac{r(r^2-t^2)}{(r^2+t^2)^2}J_0(\alpha r)\,dr. \tag{16}$$

При получении (13), (15) и (16) были учтены значения следующих интегралов ([6])

$$\int_0^r \frac{\cos(\alpha y)\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}}=\frac{\pi}{2}J_0(\alpha r); \qquad \int_r^\infty \frac{y\cos(\alpha y)\,dy}{\sqrt{y^2-r^2}}=-\frac{\pi}{2}rJ_1(\alpha r),$$

$$\int_r^\infty \frac{y^2e^{-\beta y}\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}}=r\left[rK_0(\beta r)+\frac{1}{\beta}K_1(\beta r)\right]; \tag{17}$$

$$\int_0^\infty \beta J_0(\beta r)K_0(\beta t)\,d\beta=\frac{1}{r^2+t^2}; \qquad \int_0^\infty \beta^2 J_0(\beta t)K_1(\beta r)\,d\beta=\frac{2r}{(r^2+t^2)^2}.$$

Подставляя значения $A(\alpha)$ и $D(\beta)$ соответственно из (16) и (19) в (6), получаем

$$B(\alpha)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\alpha}\int_0^a r\varphi_1(r)\,J_0(\alpha r)\,dr+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{\alpha}\int_0^b \Psi(t)\left|\int_a^\infty \frac{r(r^2-t^2)}{(r^2+t^2)^2}J_0(\alpha r)dr+\alpha tK_1(\alpha t)-2K_0(\alpha t)\right|d\alpha+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{\alpha}\int_b^\infty F(t)\left|\int_a^\infty \frac{r(r^2-t^2)^2}{(r^2+t^2)^2}J_0(\alpha r)dr+\alpha tK_1(\alpha t)-2K_0(\alpha t)\right|d\alpha. \qquad (18)$$

Исключая теперь $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ из соотношений (11), (16) и (18), для определения функции $F(t)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$F(z)=\Omega(z)+\int_b^\infty F(t)K(z,t)\,dt, \qquad (19)$$

где

$$\Omega(z)=\frac{2}{\pi}z\int_0^a r\varphi_1(r)\frac{z^2-r^2}{(z^2+r^2)^2}dr+\frac{4}{\pi^2}z\int_0^b \Psi(t)\left\{\frac{\ln t/z}{t^2-z^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(z^2+t^2)^2}\left[\frac{3z^2+t^2}{2}\ln\frac{a^2+z^2}{z^2}-\frac{a^2}{2}\frac{2z^2+t^2+a^2}{a^2+z^2}\right]\right\}, \qquad (20)$$

$$K(z,t)=\frac{4z}{\pi}\left\{\frac{\ln t/z}{t^2-z^2}-\frac{1}{(z^2+t^2)^2}\left[\frac{3z^2+t^2}{2}\ln\frac{a^2+z^2}{z^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{a^2}{2}\frac{2z^2+t^2+a^2}{a^2+z^2}\right]\right\}. \qquad (21)$$

При получении формул (19), (20), (21) были использованы (17) и значения интегралов (*)

$$\int_0^\infty \alpha K_0(\alpha t)K_0(\alpha z)\,d\alpha=\frac{\ln t/z}{t^2-z^2},$$

$$\int_0^\infty \alpha^2K_1(\alpha t)K_0(\alpha z)d\alpha=\frac{z^2-t^2+2t^2\ln t/z}{t(t^2-z^2)^2};$$

$$\int_0^\infty \alpha^3K_1(\alpha t)K_1(\alpha z)d\alpha=2\frac{z^4-t^4-4t^2z^2\ln z/t}{zt(z^2-t^2)^3};$$

$$\int_0^\infty \frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{(\beta^2+\alpha^2)^2}J_0(\beta t)d\beta=K_0(\alpha t)-\alpha tK_1(\alpha t); \qquad (22)$$

$$\int_0^a \frac{r(z^2-r^2)(r^2-t^2)}{(z^2+r^2)^2}dr=\frac{3z^2+t^2}{2}\ln\frac{a^2+z^2}{z^2}-\frac{a^2}{2}\frac{2z^2+t^2+a^2}{a^2+z^2}.$$

Покажем, что интегральное уравнение (19) можно решить методом последовательных приближений.

Нетрудно видеть, что

$$|K(z, t)| < \frac{4}{\pi^2}\, z\, \frac{\ln t/z}{t^2 - z^2},$$

$$\int_b^\infty |K(z, t)|\,dt < \int_0^\infty |K(z, t)|\,dt < \frac{4}{\pi^2}\, z \int_0^\infty \frac{\ln t/z}{t^2 - z^2}\,dt = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\ln t/z}{t(t/z - z/t)}\,dt.$$

Перейдем к новым переменным следующим образом: переменную интегрирования t заменим через $t = e^\eta$, а переменную (параметр) z заменим через $z = e^x$. После таких преобразований неравенство (24) примет вид:

$$\int_b^\infty |K(z, t)|\,dt < \int_0^\infty |K(z, t)|\,dt = \int_{-\infty}^\infty |K(\eta, x)|\,d\eta < \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{(\eta - x)\,d(\eta - x)}{\operatorname{sh}(\eta - x)}.$$

Пользуясь значением интеграла (*)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\xi\,d\xi}{\operatorname{sh}\xi} = \frac{\pi^2}{2} \tag{25}$$

получаем

$$\int_b^\infty |K(z, t)|\,dt < 1.$$

Очевидно, что функция $\Omega(z)$ ограничена сверху и стремится к нулю когда $z \to \infty$.

Решая интегральное уравнение (19) методом последовательных приближений, получаем выражение функции $F(t)$. Далее, по формулам (18), (16), (9), (5) последовательно можно определить все искомые функции.

Напряжения и перемещения по известным формулам (3) будут определены в любой точке полуплоскости.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую признательность моему научному руководителю В. С. Тоноян за постановку задачи и ценные указания в ходе ее решения.

Ереванский политехнический институт имени К. Маркса

Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

Ուղղաձիգ վերջավոր երկարության ճեղքով կիսահարթության կոնտակտային խնդիր

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից սկսած ուղղաձիգ վերջավոր երկարության ճեղք ունեցող առաձգական, իզոտրոպ կիսահարթության կոնտակտային խնդիրը։ Կիսահարթության եզրին ճնշում է, ճեղքի առանցքի նկատմամբ համաչափ դասավորված, կամայական հիմքով կոշտ դրոշմը։ Ենթադրվում է, որ շփումը դրոշմի և կիսահարթության միջև բացակայում է։ Պարզության համար ընդունված է, որ կիսահարթության եզրը դրոշմից դուրս ազատ է լարումներից, ինչպես նաև ճեղքի եզրերում ազդում են միայն նորմալ լարումներ։

Խնդիրը բերվում է զույգ ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի, որի լուծումը հանգում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։

Ցույց է տրված, որ վերջին հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների եղանակով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. Л. Абрамян.* Изв АН СССР, МТТ, № 1 (1969). [2] *С. П. Тимошенко,* Теория упругости ОНТИ, М., 1937. [3] *А. А. Баблоян,* ПММ, т. 28, вып 6 (1964). [4] *I. N. Sneddon,* Proc. Glasgow Math. Ass. vol. 4, 106–110, (1960). [5] *В. С. Тоноян,* „Известия АН Арм ССР", Механика, т. XXI, № 3 (1968). [6] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик,* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Физматгиз М., 1952.