ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LV 1972 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

К. М. Мосесян

Базируемые и сильно базируемые графы

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 23.III 1972)

В настоящей статье мы придерживаемся терминологии, принятой в ([1]). Под словом „граф" всюду будем понимать конечный связный граф без петель (параллельные ребра допускаются).

Неориентированный граф, который можно ориентировать так, чтобы он стал базисным графом некоторого орграфа (граф частичного упорядочения) назовем базируемым (сильно базируемым), а соответствующую ориентацию — базирующей (сильно базирующей).

В монографии ([2]) поставлены следующие задачи: описать классы базируемых (гл. 8, п. 4, проблема 1*) и сильно базируемых (гл. 9, п. 1) графов.

В настоящей статье получена связь между понятиями базируемости и сильной базируемости. В частности, доказано, что для обыкновенных графов без треугольников эти понятия равносильны. Кроме того, получена нижняя оценка, в некотором смысле точная, для количества сильно базирующих ориентаций.

Приведем некоторые определения.

Орграф $\vec{L} = (X, \vec{U})$ называется бисвязным, если для любых вершин a и b ($a, b \in X$, $a \neq b$) существует путь, идущий из a в b.

Подграф $\vec{L'} = (X', \vec{U'})$ орграфа $\vec{L} = (X, \vec{U})$ называется бикомпонентой, если он бисвязен и максимален относительно этого свойства.

Подграф $H = (Y, V)$ графа $L = (X, U)$ называется насыщенным, если он базируем, и при всякой базирующей ориентации превращается в бисвязный орграф.

Стягиванием подграфа $H = (Y, V)$ называется процесс, при котором все дуги из $H = (Y, V)$ опускаются, а вершины отождествляются.

Вершина $a \in X$ орграфа $\vec{L} = (X, \vec{U})$ инцидентная не более, чем двум дугам, называется антиузлом.

Бисвязный граф, который утрачивает это свойство после удаления любого ребра, называется минимально связным.

Через B обозначим класс базируемых, а через S — класс сильно базируемых графов.

Через $\Phi_a^+(L)(\Phi_a^-(L))$ обозначим класс таких сильно базирующих ориентации графа $L=(X, U)$, при которых все дуги, инцидентные вершине a, исходят из нее (заходят в нее), а через Λ_p — класс графов, не имеющих циклов длины меньшей, чем p.

Известны следующие результаты (см. соотв. [illegible]).

(1). Минимальный связный граф имеет, по крайней мере, два антиузла.

(2). Если граф $L'=(X', U')$, полученный из $L=(X, U)\in\Lambda_4$ удалением какой-нибудь вершины a степени $\rho(a)\leq 2$, является сильно базируемым, то сильно базируемым будет и граф $L=(X, U)$.

(3). $L=(X, U)\in S \Longleftrightarrow \forall a\in X(\Phi_a^+(L)\neq\varnothing)$.

Можно показать, что имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\vec{L}'=(X', \vec{U}')$ — одна из бикомпонент базируемо-ориентированного графа $\vec{L}=(X, \vec{U})$. Тогда длина всякой цепи между вершинами $a, b\in X'$, состоящей из ребер $U\setminus U'$, не менее 4.*

Лемма 2. *Стягивая бисвязный подграф $\vec{H}=(Y, \vec{V})$ базируемо ориентированного графа $\vec{L}=(X, \vec{U})$, получим базируемо ориентированный граф.*

Из (1) следует

Лемма 3. *Если все вершины графа $L=(X, U)\in B$ имеют степень $\rho(x)\geq 3$, то L не имеет бисвязной базирующей ориентации.*

В (*) доказано, что в классе Λ_4 для графов с числом ребер не более 20, свойства базируемости и сильной базируемости эквивалентны. Следующая теорема показывает, что в Λ_4 эта эквивалентность имеет место независимо от числа ребер.

Теорема 1. $S=B\cap\Lambda_4$.

Доказательство. Ясно, что $S\subseteq B\cap\Lambda_4$.

Соотношение

$$B\cap\Lambda_4\subseteq S \tag{1}$$

докажем индукцией по числу ребер. Для однореберных графов (1) тривиально. Допустим, что оно верно для всех графов с числом ребер не более $m-1$, и пусть граф $L\in B\cap\Lambda_4$ содержит m ребер $(m\geq 2)$.

а) $\exists a\in X\,\rho(a)\leq 2$.

Удаляя вершину a из графа $L=(X, U)$, получим граф $L'=(X\setminus a, U')\in B\cap\Lambda_4$. Так как $m(L')\leq m-1$, то $L'\in S$ и, в силу (2), $L=(X, U)\in S$.

б) $\forall x\in X\,\rho(x)\geq 3$.

Придадим графу $L=(X, U)$ какую-нибудь базирующую ориентацию. Если при этой ориентации нет орциклов, то она сильно базирующая. Если же есть орциклы, то, стянув в точку $a \notin X$ одну из биокомпонент $\vec{H} = (Y, \vec{V})$, получим (по лемме 2) базируемо ориентированный граф $\vec{L}'' = (X'', \vec{U}'')$ с $m(L'') < m - 1$.

По лемме 3 граф L'' не пустой, а по лемме 1, $L'' \in \Lambda_1$. Следовательно, по индуктивному предположению, $L'' \in S$ и $H \in S$. В силу (3) $\Phi_a^+(X'') \neq \varnothing$. Пусть $\varphi(L'') \in \Phi_a^+(L'')$, а $\Psi(H)$ какая-нибудь сильно базирующая ориентация графа $H = (Y, V)$. Легко заметить, что ориентация $\gamma(L) = \varphi(L'') + \Psi(H)$ будет сильно базирующей для графа $L = (X, U)$. Значит, $L = (X, U) \in S$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Граф содержит насыщенный подграф тогда и только тогда, когда он содержит треугольники или пару вершин, соединенную двумя ребрами.

Следующая теорема устанавливает связь между понятиями базируемости и сильной базируемости для графов из класса $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$.

Т е о р е м а 2. *Для базируемости графа $L = (X, U)$ необходимо и достаточно, чтобы после стягивания всех максимальных насыщенных подграфов получался сильно базируемый граф.*

В работе ([5]) был доказан следующий результат.

(5): если для графа $L = (X, U) \in S$ существует сильно базирующая ориентация, в которой длина наибольшего пути равна p, то существует не менее, чем $p + 1$ различных сильно базирующих ориентаций.

Оказывается, что эта оценка точная только для двух графов, а для всех остальных можно ее удвоить. Именно, имеет место.

Т е о р е м а 3. *Если граф $L = (X, U) \in S$, не являющийся цепью длины $\leqslant 2$, при какой-нибудь сильно базирующей ориентации имеет путь длины p, то существует не менее $2(p + 1)$ различных сильно базирующих ориентаций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сильно базирующие ориентации.

$$\varphi_0(X_p^+, X_0^-); \qquad \varphi_k(X_{p-k}^+, X_{p-k+1}^-) \qquad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{6}$$

построенные в ([5]). Так как все ориентации системы (6) попарно различны, то попарно различны также их противоположные ориентации

$$\bar{\varphi}_0(X_p^+, X_0^-); \qquad \bar{\varphi}_k(X_{p-k}^+, X_{p-k+1}^-), \qquad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{7}$$

Можно показать, что для графов с хроматическим числом $\gamma \geqslant 3$ любые две ориентации, взятые соответственно из (6) и (7), различаются. Следовательно, для них теорема 3 верна. Легко заметить, что она верна также для деревьев.

Рассмотрим бихроматический граф, не являющийся деревом. Раскрасим его цветами 2, 3 и обозначим эту раскраску через $\Psi_1(2, 3)$. Очевидно, при $\Psi_1(2, 3)$ каждым цветом будут окрашены по меньшей мере две вершины. Раскрасив одну из вершин цвета 2 цветом 4, получим раскраску Ψ_2 (2, 3, 4), и раскрасив одну из вершин цвета 3 цветом 1, раскраску Ψ_3 (1, 2, 3).

Сильно базирующие ориентации φ_1, φ_2 и φ_3 получаются соответственно из раскрасок Ψ_1 (2, 3), Ψ_2 (2, 3, 4) и Ψ_3 (1, 2, 3) путем ориентации ребер от вершин меньшего номера к вершинам большего номера. Легко заметить, что ориентации φ_1, φ_2, φ_3, $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\bar{\varphi}_3$ все различны. Теорема доказана.

Замечание. Известно ([1]), что утверждение (5) верно и для бесконечных графов. Как видно из доказательства, теорема 3 также справедлива для бесконечных графов.

Следствие. Для сильно базируемого графа $L = (X, U)$, не являющегося ребром, существует не менее $2\gamma(L)$ различных сильно базирующих ориентаций.

Это вытекает из теоремы Витавера ([1]) и из теоремы 3.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета.

Կ. Մ. ՄՈՎՍԵՍՅԱՆ

Բազիսացվող և ուժեղ բազիսացվող գրաֆներ

Ոչ կողմնորոշված գրաֆը կոչվում է բազիսացվող (ուժեղ բազիսացվող), եթե այն կարելի է կողմնորոշման միջոցով դարձնել որևէ գրաֆի (մասնակի կարգավորման գրաֆի) բազիսային գրաֆ։

Օրեի ([2]) մենագրությունում դրված են հետևյալ խնդիրները. նկարագրել բազիսացվող (գլ. 8, § 1, խնդիր 1°) և ուժեղ բազիսացվող (գլ. 9, § 1) գրաֆների դասը։

Աշխատանքում կապ է հաստատվում բազիսացման և ուժեղ բազիսացման գաղափարների միջև։ Ապացուցվում է, որ գրաֆի ուժեղ բազիսացման համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի բազիսացվող և չունենա չորսից փոքր երկարությամբ ցիկլ. բացի դրանից գրաֆի ուժեղ բազիսային կողմնորոշումների քանակի համար ստացված է ներքին գնահատական, որը բոլոր գրաֆների համար՝ բացի 1 և 2 երկարությամբ շղթաներից, տալիս է 2 անգամ մեծ արդյունք, քան նախկինում հայտնի գնահատականը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Зыков*, Теория конечных графов. I, изд. «Наука», Новосибирск, 1969. [2] *О. Оре*, Теория графов, изд. «Наука», М., 1968. [3] *К. Берж*, Теория графов и ее применение, ИЛ, М., 1962. [4] *К. М. Мосесян*, ДАН Арм ССР, т. LIV, № 2 (1972). [5] *К. М. Мосесян*, ДАН Арм ССР, т. LIV, № 2 (1972). [6] *К. М. Мосесян*, ДАН Арм ССР, т. LIV, № 1 (1972).