ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LV 1972 2

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. К. Таслакян

Оценка коэффициентов и абсолютная сходимость обобщенных рядов Лежандра. Оценка остатка

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 18/II 1972)

В работе [1] установлено условие разложимости функций в ряд Фурье по квазиполиномам Лежандра, а именно

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

где $x \in (0,1)$

$$P_n(x) = \frac{\sqrt{\gamma_n^* + \gamma_n'}}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\xi + \gamma_\nu^* + 1}{\xi - \gamma_\nu^*} \frac{x^\xi}{\xi - \gamma_n^*} d\xi; \qquad a_n = \int_0^1 f(x) P_n(x)\,dx$$

$$0 < \gamma_0^* < \gamma_1^* < \cdots < \gamma_n^* < \cdots, \qquad \gamma_\nu' = \gamma_\nu^* + 1, \quad \gamma_n^* = O(n),$$

а контур C здесь, и впредь в аналогичных случаях, охватывает окрестности нулей знаменателя подынтегральной функции.

В настоящей работе оценивается скорость коэффициента Фурье a_n, с которой он стремится к нулю, доказывается абсолютная сходимость обобщенных рядов Лежандра и получается оценка остатка.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$-функция с ограниченным изменением на $[0,1]$, V есть полное изменение функции $f(x)$ на $[0,1]$, и пусть a_n коэффициент Фурье функции $f(x)$. Тогда*

$$|a_n| < \frac{CV}{R_0}, \tag{1}$$

где R_0 есть единственный положительный корень уравнения

$$\ln\frac{1}{x} = 2\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\gamma_\nu^*}{R_0^2 + \gamma_\nu^{*2}},$$

который стремится к бесконечности с такой же быстротой, как и n, а C абсолютная постоянная.

Доказательство. Так как $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением, то ее можно представить

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ монотонные функции. Следовательно,

$$a_n = \int_0^1 f(x) P_n(x) dx = \int_0^1 \varphi_1(x) P_n(x) dx - \int_0^1 \varphi_2(x) P_n(x) dx = I_1 - I_2.$$

Имеем

$$P_n(x) = \frac{\sqrt{2\gamma_n^* + 1}}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\xi + \gamma_\nu^* + 1}{\xi - \gamma_\nu^*} \cdot \frac{x^\xi}{\xi - \gamma_n^*} d\xi.$$

В качестве контура C целесообразно взять $\xi = R_1 e^{i\varphi}$, где $R_1 = R_0\sqrt{1-\delta}$, δ $(0 < \delta < 1)$ произвольное, но достаточно малое число.

Далее, используя теорему о среднем значении, получаем

$$I_1 = \varphi_1(1) \int_{x_1}^1 P_n(x) dx = -\varphi_1(1) \frac{\sqrt{2\gamma_n^* + 1}}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\xi + \gamma_\nu^* + 1}{\xi - \gamma_\nu^*} \frac{x_1^{\xi+1} d\xi}{(\xi + 1)(\xi - \gamma_n^*)}.$$

Обозначим

$$\gamma_\nu^* + \frac{1}{2} = \gamma_\nu, \qquad u = \ln \frac{1}{x}, \qquad \text{тогда}$$

$$I_1 = -\varphi_1(1) \frac{\sqrt{2\gamma_n x_1}}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\xi + \gamma_\nu}{\xi - \gamma_\nu} \frac{e^{-u\xi}}{\left(\xi + \frac{1}{2}\right)(\xi - \gamma_n)} d\xi.$$

В работе [2] доказано

$$x^{\prime} \cdot P_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\gamma_n R_0}{(R_0^2 + \gamma_n^2)\psi''(1)}} \cos[\varphi(R_0) + \Theta] + 0(1), \tag{2}$$

где

$$\psi''(1) = 4R_0^2 \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\gamma_\nu}{(R_0^2 + \gamma_\nu^2)^2}, \qquad |\psi''(1)| < M,$$

$$\varphi(R_0) = uR_0 - 2\sum_{\nu=0}^{n} \operatorname{arc\,tg} \frac{R_0}{\gamma_\nu}, \qquad \Theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma_n - R_0}{\gamma_n + R_0}.$$

Следовательно

$$I_1 = -\varphi_1(1) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\gamma_n R_0}{(R_0^2 + \gamma_n^2)\psi''(1)}} \cdot \frac{\cos[\varphi(R_0) + \Theta]}{R_0} x_1 + 0\left(\frac{1}{R_0}\right)$$

и окончательно

$$|I_1| < C \frac{|\varphi_1(1)|}{R_0}.$$

Таким же путем можно получить

$$|I_2| < C \frac{|\varphi_2(1)|}{R_0}.$$

откуда

$$|a_n| < \frac{CV}{R_0}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $f'(x)$ функция с ограниченным изменением на $[0,1]$, V_1 есть полное изменение функции $f'(x)$ на $[0,1]$. Тогда*

$$|a_n| < \frac{C_1 V_1}{R_0^2}. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим

$$I_n(t) = \int_0^t P_n(x)dx.$$

Имеем

$$a_n = \int_0^1 f(t)P_n(t)dt = \int_0^1 f(t)dI_n(t) = -\int_0^1 f'(t)I_n(t)dt$$

так как

$$I_n(1) = I_n(0) = 0.$$

Поступая аналогично, как и выше, получим доказательство теоремы.

Следствие 1. Пусть $f^{(p)}(x)$ $(p > 1)$ — функция с ограниченным изменением на $[0,1]$, V_p — есть полное изменение функции $f^{(p)}(x)$ на $[0,1]$.

Тогда

$$|a_n| < \frac{C_p V_p}{R_0^{p+1}}. \tag{3'}$$

Теорема 3. *Если $f'(x)$ есть функция с ограниченным изменением на $[0,1]$, то ряд*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

сходится абсолютно в промежутке $(0,1)$.

Доказательство. Имеем

$$a_n = \int_0^1 f(x)P_n(x)dx = -\int_0^1 f'(x)I_n(x)dx.$$

С другой стороны, так как

$$|P_n(x)| < M_1, \quad x \in (0,1)$$

и используя (3), получаем

$$\sum_{n=p}^{q} |a_n P_n(x)| \leq C_2 \sum_{n=p}^{q} \frac{1}{R_0^2} < C_2 \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{R_0^2} < \varepsilon.$$

так как $R_n \to \infty$ с той же скоростью, что и n.

Теорема доказана.

Следствие 2. Если $f'(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(\alpha - 1)$, то ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

сходится абсолютно в промежутке (0,1).

Оценка остатка. Рассмотрим функцию. ([1])

$$L_n(x) = \int_0^1 |K_n(x, t)|\, dt,$$

где ([1])

$$K_n(x, t) = \frac{\sqrt{xt}}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=0}^{n} \frac{\xi+\gamma_\nu}{\xi-\gamma_\nu} x^\xi d\xi \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \prod_{\nu=0}^{n} \frac{z+\gamma_\nu}{z-\gamma_\nu} \frac{t^z dz}{z+\xi+\frac{1}{2}}.$$

Лемма. *Для любых* $x \in (0,1)$ *и* $t \in (0,1)$ *верно*

$$L_n(x) < C_2 \sqrt{R_n} \ln R_n \tag{4}$$

Доказательство. В самом деле, пусть $x \in (0,1)$, тогда для достаточно малого h $\left(h = \frac{1}{\sqrt{R_n}}\right)$ весь сегмент $[x-h, x+h]$ также принадлежит к (0,1). Функцию $L_n(x)$ запишем в виде

$$L_n(x) = \int_0^{x-h} |K_n(x, t)|\, dt + \int_{x-h}^{x+h} |K_n(x, t)|\, dt + \int_{x+h}^{1} |K_n(x, t)|\, dt =$$

$$= I_{n,1}(x) + I_{n,2}(x) + I_{n,3}(x).$$

В работе ([1]) доказано, если

$$|A_n(x)| = \int_0^{x-h} |K_n(x, t)|\, dt + \int_{x+h}^{1} |K_n(x, t)|\, dt,$$

$$|B_n(x)| = \int_{x-h}^{x+h} |K_n(x, t)|\, dt,$$

то верно

$$|A_n(x)| < \frac{C_3}{\sqrt{R_n}}; \qquad |B_n(x)| < C_5 \ln R_n$$

следовательно

$$|K_n(x, t)| < C_4 \sqrt{R_n}, \qquad 0 \leq t \leq x - h, \qquad x + h \leq t \leq 1,$$

$$|K_n(x, t)| < C_5 R_n \ln R_n, \qquad x - h \leq t \leq x + h.$$

и окончательно получим

$$L_n(x) < C_3\sqrt{R_0}\ln R_0.$$

Следствие 3. Если $|f(x)| < M$, то частная сумма ее обобщенного ряда Лежандра удовлетворяет

$$|S_n(x)| < MC_3\sqrt{R_0}\ln R_0 \leq C_4\sqrt{R_0}\ln R_0 \tag{5}$$

В самом деле, благодаря (4) имеем

$$|S_n(x)| \leq M\int_0^1 |K_n(x, t)|\,dt < MC_3\sqrt{R_0}\ln R_0 \leq C_4\sqrt{R_0}\ln R_0$$

Следствие 4. Если $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением на $[0,1]$, V—есть полное изменение на $[0,1]$, то

$$|S_n(x)| < C_5 V \ln R_0 \tag{6}$$

В самом деле, имеем

$$S_n(x) = \int_0^1 \varphi_1(x)K_n(x, t)dt + \int_0^1 \varphi_2(x)K_n(x, t)dt = I_1(x) + I_2(x),$$

где

$$I_1(x) = \int_0^{x-h} \varphi_1(x)K_n(x, t)dt + \int_{x-h}^{x+h} \varphi_1(x)K_n(x, t)dt + \int_{x+h}^{1} \varphi_1(x)K_n(x, t)dt$$

$$I_2(x) = \int_0^{x-h} \varphi_2(x)K_n(x, t)dt + \int_{x-h}^{x+h} \varphi_2(x)K_n(x, t)dt + \int_{x+h}^{1} \varphi_2(x)K_n(x, t)dt.$$

В дальнейшем поступаем так, как в работе [1].

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ имеет производные до p-го порядка ($p \geq 1$) включительно, и пусть $|f^{(p)}(x)| \leq M_p$.*
Тогда

$$|R_n(f, x)| < C_6 \frac{\ln R_0}{R_0^{p-\frac{1}{2}}} M_p. \tag{7}$$

Доказательство. Имеем

$$R_n(f, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k P_k(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} a_k P_k(x) = \lim_{m\to\infty} S_m(x) - S_n(x),$$

где

$$S_m(x) = \int_0^1 f(t)K_m(x, t)\,dt,$$

$$S_n(x) = \int_0^1 f(t) K_n(x, t)\, dt.$$

Интегрируя p раз по частям, получаем

$$S_m(x) = (-1)^p \int_0^1 f^{(p)}(t) I_{m,p}(x, t)\, dt,$$

где

$$I_{m,1}(x, t) = \int_0^t K_m(x, u)\, du$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$I_{m,p}(x, t) = \int_0^t I_{m,p-1}(x, u)\, du.$$

Далее

$$|S_m(x)| \leqslant M_p \int_0^1 |I_{m,p}(x, t)|\, dt,$$

используя неравенство (1), получаем

$$\int_0^1 |I_{m,p}(x, t)|\, dt < C_3 \frac{\ln \bar{R}_0}{\bar{R}_0^{p-\frac{1}{2}}},$$

где $\bar{R}_0$ определяется так, как и R_0.

Следовательно

$$|S_m(x)| < C_3 M_p \frac{\ln \bar{R}_0}{\bar{R}_0^{p-\frac{1}{2}}},$$

где $\bar{R}_0 = O(m)$. Значит $S_m(x) \to 0$, когда $m \to \infty$.

Такую же оценку можно получить и для $S_n(x)$, а именно

$$|S_n(x)| < C_2 \frac{\ln R_0}{R_0^{p-\frac{1}{2}}}.$$

Окончательно получим

$$|R_n(f, x)| < C_1 \frac{\ln R_0}{R_0^{p-\frac{1}{2}}} M_p.$$

Теорема доказана.

Следствие 5. Если $f^{(p)}(x)$ есть функция с ограниченным изменением, и V_p ее полное изменение на $[0,1]$, то

$$|R_n(f,x)|<C_*\frac{\ln R_0}{R_0^{\frac{1}{2}}}V_p. \tag{8}$$

В самом деле, благодаря (6) и поступая аналогично как и выше, получим доказательство теоремы.

В заключение приношу благодарность Г. В. Бадаляну за постановку задачи и советы при выполнении.

Ереванский государственный университет

Ա. Կ. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Լեժանդրի ընդհանրացած շարքերի գործակիցների գնահատականը և բացարձակ զուգամիտությունը: Մնացորդի գնահատականը

Աշխատանքում դիտարկվում է

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x), \quad P_n(x)=\frac{\sqrt{2\gamma_n+1}}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{\xi+\gamma_\nu+1}{\xi-\gamma_\nu}\frac{x^\xi d\xi}{\xi-\gamma_n}$$

շարքի a_n Ֆուրյեի գործակցի վերին ձևակոչ արտահայտությունը. ապացուցվում է այդ շարքի բացարձակ զուգամիտությունը և ստացվում է մնացորդի գնահատականը:

Թեորեմ 1. Դիցուք $f(x)$-ը $[0,1]$-ում սահմանափակ փոփոխության ֆունկցիա է, V-ն $f(x)$-ի լրիվ փոփոխությունն է $[0,1]$-ում և դիցուք a_n-ը $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցն է: Այդ դեպքում

$$|a_n|<\frac{CV}{R_0}$$

որտեղ՝ R_0-ն

$$\ln\frac{1}{x}=2\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\gamma_\nu}{R_0^2+\gamma_\nu^2}$$

հավասարման միակ արմատն է:

Թեորեմ 2. Դիցուք $f'(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ փոփոխության ֆունկցիա է $[0,1]$-ում, V_1-ը $f'(x)$ ֆունկցիայի լրիվ փոփոխությունն է $[0,1]$-ում: Այդ դեպքում

$$|a_n|<\frac{C_1V_1}{R_0^2}$$

Թեորեմ 3. Եթե $f'(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ փոփոխության ֆունկցիա է $[0,1]$-ում, ապա՝

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x)$$

շարքը բացարձակ զուգամիտ է $[0,1]$-ում:

Թեորեմ 4. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան ունի ներառյալ մինչև p կարգի ածանցյալ ($p > 1$) և դիցուք

$$|f^{(p)}(x)| \leq M_p.$$

Այդ դեպքում՝

$$|R_n(f, x)| < C_7 \frac{\ln R_0}{R_0^{p-\frac{1}{2}}} M_p.$$

Ստացվում են նաև (1), (2), (3), (4) և (5) հետևանքները

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. К. Таслакян*, «Молодой научный работник ЕГУ», № 14, 1971. [2] *Г. В. Бадал*
«Известия АН Арм. ССР», т. 13, № 3 (1960). [3] *И. П. Натансон*, Конструктивная теор
функций, М.—Л., 1949.