

УДК 517.43

МАТЕМАТИКА

С. Г. Рубанович

Об индексе некоторых сингулярных интегродифференциальных уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 1 II 1972)

1. Пусть задан гладкий замкнутый контур l без самопересечений в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$. Рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$\left(a(t_0)u(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_l \frac{u(t)dt}{t-t_0} \right)' + c(t_0)u(t_0) + \frac{d(t_0)}{\pi i} \int_l \frac{u(t)dt}{t-t_0} + \int_l K(t, t_0)u(t)dt = f(t_0), \quad (1)$$

где функции $d(t)$, $c(t)$, $a(t)$, $b(t)$ — кусочно гладкие на контуре l , $K(t, t_0)$ — некоторое ядро Карлемана, $u(t)$ — искомая функция на контуре l , а интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши. В случае, когда в каждой точке контура l выполнены условия

$$a(t) + b(t) \neq 0 \quad (2)$$

$$a(t) - b(t) \neq 0 \quad (3)$$

это будет уравнение нормального типа.

В этом случае уравнение (1) хорошо изучено (¹⁻³).

Если условие (2) или (3) не выполнено в некоторых изолированных точках, в окрестности которых выполняются некоторые условия регулярности функций $a(t)$ и $b(t)$, то уравнение (1) также хорошо изучено (³⁻⁶). Ниже рассматривается случай, когда на некотором интервале $l_1 \subset l$ выполняется условие

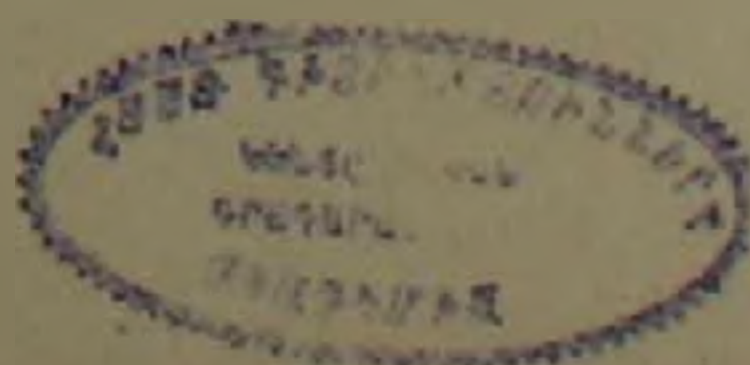
$$a(t) + b(t) \neq 0, \quad a(t) - b(t) = 0, \quad c(t) + d(t) \neq 0, \quad (4)$$

а на дополнительном интервале l_2 выполняется условие

$$a(t) + b(t) = 0, \quad a(t) - b(t) \neq 0, \quad c(t) + d(t) \neq 0. \quad (5)$$

В случае, когда (4) или (5) выполнено на всем контуре уравнение (1) также изучено (⁷).

Функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, предполагаются достаточно гладкими на каждом из интервалов l_1 и l_2 (в отдельности). Введем обозначения:



$$u^+(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(t)dt}{t - t_0} + \frac{u(t_0)}{2}, \quad u^-(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(t)dt}{t - t_0} - \frac{u(t_0)}{2}.$$

Пространство $M(l_1, l_2)$ определим как множество всех функций $u(t)$ на контуре l , для которых конечна норма

$$\|u\|_{M(l_1, l_2)}^2 \equiv \|u\|_{L_2(l)}^2 + \int_{l_1}^{\Gamma} |u^{+'}(t)|^2 |dt| + \int_{\Gamma}^l |u^{-'}(t)|^2 |dt|,$$

где $\|u\|_{L_2(l)}^2 = \int_{\Gamma} |u(t)|^2 |dt|$, $u^{+'}$ и $u^{-'}$ есть обобщенные производные

от u^{+} и u^{-} по касательному направлению на контуре l .

В нашем случае уравнение (1) можно переписать в виде

$$Lu(t) = \begin{cases} u^{+'}(t) + \alpha(t)u(t), & t \in l_1 \\ u^{-'}(t) + \alpha(t)u(t), & t \in l_2 \end{cases} + Ku(t) = f(t), \quad (A)$$

где оператор K вполне непрерывен, как оператор, действующий из $M(l_1, l_2)$ в $L_2(l)$, а $\alpha(t)$ — гладкая функция на замыканиях интервалов l_1 и l_2 , нигде на контуре l не обращающаяся в нуль.

Доказывается, что образ оператора L , действующего из $M(l_1, l_2)$ в $L_2(l)$ замкнут, размерность ядра m и размерность коядра n оператора L конечны, и вычисляется индекс оператора L .

2. Обозначим через t_1 и t_2 начало и конец (по отношению к положительному направлению обхода контура l) интервала l_1 .

Лемма 1.

При выполнении условий

$$\begin{aligned} \arg \lim_{t, \beta t \rightarrow t_1} \alpha(t) + \arg \lim_{t, \beta t \rightarrow t_1} \alpha(t) &+ 2\beta_1 + (2p_1 + 1)\pi \\ \arg \lim_{t, \beta t \rightarrow t_2} \alpha(t) + \arg \lim_{t, \beta t \rightarrow t_2} \alpha(t) &+ 2\beta_2 + (2p_2 + 1)\pi \end{aligned} \quad (B)$$

ни для каких целых чисел p_1 и p_2 , где β_i есть угол между положительным направлением касательной к точке t_i , $i = 1, 2$, и осью OX , для $u \in M(l_1, l_2)$ имеет место оценка

$$\|u\|_{M(l_1, l_2)} \leq \text{const} \|Lu\|_{L_2(l)} + \|K_0 u\|_{L_2(l)}, \quad (6)$$

где K_0 — есть некоторый вполне непрерывный оператор из $M(l_1, l_2)$ в $L_2(l)$.

Теорема 1.

Оператор L , как оператор, действующий из $M(l_1, l_2)$ в $L_2(l)$ имеет конечный индекс.

Пусть оператор T действует из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 .

Тогда, если T имеет конечный индекс, то существует оператор P (регуляризатор), действующий из B_2 в B_1 , такой, что

$$TP = E + K_1, \quad PT = E - K_2, \quad \text{Ind } P = -\text{Ind } T,$$

где E — тождественный оператор, K_1 и K_2 — вполне непрерывные операторы.

Лемма 2.

Пусть функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ бесконечно дифференцируемы на замыканиях интервалов I_1 и I_2 и нигде на контуре l не равны нулю, а функция $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$ не тривиальна на всем контуре l и равна нулю на концах интервала I_1 .

Пусть L_1 — есть оператор вида (A) с коэффициентом $\alpha_1(t)$, а L_2 — с коэффициентом $\alpha_2(t)$. Тогда, если P_1 есть регуляризатор оператора L_1 , то

$$L_2 P_1 v(t) = \begin{cases} v'(t) - \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)} v'(t), & t \in I_1 \\ -v'(t) + \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)} v'(t), & t \in I_2 \end{cases} + K v(t),$$

где K — вполне непрерывный оператор из $M(I_1, I_2)$ в $L_2(l)$.

Эта лемма доказывается с помощью разбиения единицы и локального вычисления $L_2 P_1$. Так как индекс оператора в фигурных скобках легко вычисляется (*), то лемма 2 помогает свести вычисление индекса оператора L_2 к вычислению индекса оператора L_1 , коэффициент которого может иметь простой вид.

(Имеет место равенство $\text{Ind } L_2 P_1 = \text{Ind } L_2 + \text{Ind } P_1 = \text{Ind } L_2 - \text{Ind } L_1$ (**)).

Теперь рассмотрим оператор вида

$$L_c u(t) = \begin{cases} u'(t) + cu(t), & t \in I_1 \\ u'(t) + u(t), & t \in I_2 \end{cases} \quad (7)$$

Предположим, что l есть окружность радиуса $R > 0$

$$I_1 = -Ri, \quad I_2 = Re^{i\psi_2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi_2 < \frac{\pi}{2}$$

и выполнены условия (B), то есть константа c не отрицательна и $\arg c + 2\psi_2 \neq 0$, где $-\pi < \arg c < \pi$.

Лемма 3.

$$\text{Ind } L_c = \begin{cases} 1, & \text{если } \arg c + 2\psi_2 > 0 \\ 0, & \text{если } \arg c + 2\psi_2 < 0. \end{cases}$$

Вернемся к произвольному контуру l .

Введем обозначения

$$\alpha_+(t_l) = \lim_{t \rightarrow t_l} \alpha(t), \quad \alpha_-(t_l) = \lim_{t \rightarrow t_l} \alpha(t), \quad l = 1, 2$$

φ_l , $l = 1, 2$ — углы между положительным направлением касательной

и точке t_i и осью OX , выбранное таким образом, что если точку касания непрерывно перемещать из точки t_1 в точку t_2 в положительном направлении вдоль контура L , z_1 перейдет в z_2 .

Заметим, что в зависимости от контура L разность $z_2 - z_1$ может быть сколько угодно большой.

Целые числа k_1 и k_2 определим из неравенств

$$-\pi < \arg z_+(t_i) + \arg z_-(t_i) + 2z_i + 2\pi k_i < \pi, \quad i = 1, 2$$

Теорема 2.

$$\begin{aligned} \text{Ind } L = & \frac{\arg z_+(t_1) + \arg z_-(t_1) - \arg z_+(t_2) - \arg z_-(t_2)}{2\pi} + \\ & + k_1 - k_2 + \left| \frac{\ln z(t)}{2\pi i} \right|_{t_1} - \left| \frac{\ln z(t)}{2\pi i} \right|_{t_2}. \end{aligned}$$

Производя замену независимой переменной и функции, и применяя лемму 2, теорему 2 можно свести к лемме 3.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

II. Կ. ՌԻՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Որոշ սինգուլյար ինտեգրոդիֆերենցիալ համասարումների ինդեքսի մասին

Հաջվածում գիտարկվում է (1) համասարումը կամպլեքս հարթության ողորկ, ստանց ինքնահատման L կոնտուրի վրա, երբ տեղի ունեն (3), (4) պայմանները: Այդ դեպքում (1) համասարումը համարվեք է (A) համասարմանը: Երբ L օպերատորի $z(t)$ զործակիցը բաժանաչափ ողորկ է և բաժարարվում են (B) պայմանները, ապացուցվում է (1) համասարման նյութաբաժանը L_2 տարածությունում և հաջված է այդ համասարման ինդեքսը: Ինդեքսը հաշվելու համար օգտագործվում է լեմմա 2-ը, որը հնարավորություն է տալիս համեմատելու տարրեր զործակիցների տնեցող օպերատորների ինդեքսները և անալիտիկ շարունակության մեթոդը: Ցույց է տրվում, որ ինդեքսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$\begin{aligned} \text{Ind } L = & \frac{\arg z_+(t_1) + \arg z_-(t_1) - \arg z_+(t_2) - \arg z_-(t_2)}{2\pi} + \\ & + k_1 - k_2 + \left| \frac{\ln z(t)}{2\pi i} \right|_{t_1} - \left| \frac{\ln z(t)}{2\pi i} \right|_{t_2}. \end{aligned}$$

որտեղ՝

$$-\pi \leq \arg z_+(t_i) + \arg z_-(t_i) + 2z_i + 2\pi k_i < \pi, \quad i = 1, 2.$$

ЛИТЕРАТУРА — ТРЦЦЦЦЦЦЦЦЦЦ

1. И. Н. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Изд. «Наука», 1968.
2. И. Н. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, Изд. «Наука», 1970.
3. Ф. Д. Гахов, Красовы задачи, М., 1963. 4. И. Н. Векуа, Тр. Тбилисск. матем. института АН Груз. ССР, т. 18, стр. 307 (1951). 5. Б. В. Хведелидзе, Тр. Тбилисск. матем. института АН Груз. ССР, т. 23, стр. 3 (1957). 6. Л. А. Чикин, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 113, кн. 10 (1953). 7. И. Е. Томасян, Дифференциальные уравнения, т. 3, вып. 1, (1967). 8. С. Г. Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физ. мат. изд., 1962.