ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LV 1972 1

УДК 622.7:519.28

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

В. И. Луценко

Характеристика степени неоднородности смесей по изменчивости одного признака

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. С. Мкртчяном 26 XI 1971)

Целью работы является определение двух предельных состояний смесей однородного и совершенно неоднородного, а также характеристика степени неоднородности промежуточных состояний по изменчивости одного исследуемого признака.

Особенность применяемого с этой целью метода состоит в том, что вопрос о степени неоднородности смесей рассматривается с позиции разделительного процесса. В качестве модели принята такая смесь, в которой изучается одно свойство, или один признак. Примером может служить механическая смесь двух компонентов: один из них является полезным компонентом, в количестве P, другой—дополняющим остатком в количестве N. Изучаемым признаком является содержание полезного компонента в различных частях смеси (в частности, в пробах, взятых из смеси). Среднее содержание полезного компонента в смеси выражается в долях единицы $\frac{P}{P+N}=\alpha$. Таким образом, область существования смесей ограничена замкнутым отрезком $[0,1]$.

Исходя из постулируемой общности характеристик разделительного процесса и состояния неоднородности объекта, для оценки степени неоднородности смеси по изменчивости исследуемого признака нами принят набор показателей, используемых обычно для оценки разделительного процесса ([1]). Пусть Q есть полный запас смеси, состоящий из $P+N$, P есть полный запас полезного компонента в Q, ΔQ_k есть выделенная любым образом из Q k-тая часть смеси и ΔP_k есть запас полезного компонента в k-той части. Эти показатели являются натуральными весовыми количествами

Результат выделения k-той части из полного запаса смеси может быть охарактеризован относительными количествами:

$\frac{\Delta Q_k}{Q}=\gamma_k$—доля k-той части смеси в полном запасе смеси, т. е. выход k-той части; по Матерону-весовая функция ([2]);

$\frac{\Delta P_k}{\Delta Q_k} = \beta_k$—содержание полезного компонента в k-той части; смеси по Матерону — пространственная переменная;

$\frac{\Delta P_k}{P} = \varepsilon_k$ доля k-той части полезного компонента в полном его запасе, т. е. извлечение полезного компонента в k-тую часть. Этот показатель не имеет аналога в математической статистике.

Запишем уравнение связи между указанными показателями:

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta P_k}{P} = \frac{\beta_k \Delta Q_k}{P} = \frac{\beta_k \Delta Q_k}{\alpha Q} = \frac{\beta_k}{\alpha} \gamma_k. \qquad (1)$$

Приведенные показатели сформулированы в детерминированном аспекте. Однако, вероятностный характер неоднородности диктует необходимость рассмотрения этих же показателей в вероятностном аспекте. Действительно, результаты смешивания двух компонентов, или в обратной задаче — результаты разделения смеси на исходные компоненты подвержены колебаниям и в общем случае не могут быть заданы аналитически — они получаются опытным путем.

Поскольку в принятой модели исследуется изменчивость содержания полезного компонента в различных частях смеси, то в вероятном аспекте случайной переменной величиной будет служить содержание полезного компонента, которое в общем случае может принимать значения из замкнутого отрезка $[0,1]$. Тогда показатели γ и ε приобретают смысл вероятностей. При этом плотность γ-вероятностей $\gamma(\beta)$ выражает распределение запаса-смеси по β, а плотность ε-вероятностей $\varepsilon(\beta)$ выражает распределение запаса полезного компонента по β. Уравнение связи в отличие от (1) запишем в следующем виде:

$$\varepsilon(\beta) = \frac{\beta}{\nu_1} \gamma(\beta). \qquad (2)$$

где ν_1 есть математическое ожидание γ — распределения случайной переменной величины β, которое по определению есть начальный момент первого порядка [3]

$$M_\gamma(\beta) = \int_0^1 \beta \gamma(\beta) d\beta = \nu_1. \qquad (3)$$

По физическому смыслу ν_1 выражает среднее содержание полезного компонента в полном запасе смеси $\frac{P}{Q} = \alpha$.

Математическое ожидание ε — распределения случайной переменной величины β будет

$$M_\varepsilon(\beta) = \int_0^1 \beta \varepsilon(\beta) d\beta = \frac{1}{\nu_1} \int_0^1 \beta^2 \gamma(\beta) d\beta = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \qquad (4)$$

где ν_2 есть начальный момент второго порядка γ — распределения случайной переменной величины β.

Для $\gamma(\beta)$ и $\varepsilon(\beta)$ принята нормировка

$$\int_0^1 \gamma(\beta)d\beta = \int_0^1 \varepsilon(\beta)d\beta = 1. \tag{5}$$

Наличие указанного набора детерминированных и вероятностных показателей позволяет дать определение: I — нижнего предела неоднородности (т. е. однородного состояния смеси), II — верхнего предела неоднородности (т. е. совершенно неоднородного состояния смеси) и III — промежуточного между ними неоднородного состояния смеси.

I. Смесь однородна, если значение β-признака в каждой ее части равно среднему значению этого признака в полном запасе смеси

$$\beta_k = \alpha \text{ в каждом } k. \tag{6}$$

Отсюда следует

$$\frac{\Delta P_k}{\Delta Q_k} = \frac{P}{Q},$$

откуда

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta P_k}{P} = \frac{\Delta Q_k}{Q} = \gamma_k,$$

т. е. в однородной смеси детерминированные показатели ε и γ тождественно равны

$$\varepsilon_k = \gamma_k,$$

откуда (7)

$$\varepsilon_k - \gamma_k = 0.$$

По физическому смыслу это отвечает идеальному смешиванию исходных компонентов.

В вероятностном аспекте это означает, что случайная переменная величина β не имеет флуктуаций вокруг ее среднего значения и, следовательно, дисперсия ее равна нулю.

$$D_\gamma(\beta) = \nu_2 - \nu_1^2 = 0,$$

откуда

$$\nu_2 = \nu_1^2. \tag{8}$$

С точки зрения непрерывного изменения случайной переменной величины β этот случай означает, что плотности γ и ε — вероятностей вырождаются в δ-функцию в точке $\beta = \nu_1$.

II. По физическому смыслу, предельная неоднородность смеси означает полное разделение ее на исходные компоненты, когда смесь вырождается в однородное состояние каждого компонента в отдельности.

Полное разделение означает в детерминированном аспекте, что полезный компонент выделен из смеси в чистом виде и без потерь, т. е. β — критическое $= 1$ и ε — критическое $= 1$.

Тогда из (1) следует

$$\gamma_{np}=\nu_2 \quad \text{при} \quad \beta_{np}=1 \quad \text{и} \quad \varepsilon_{np}=1. \tag{9}$$

Следовательно, предельная неоднородность смеси характеризуется предельной разностью показателей

$$\varepsilon_{np}-\gamma_{np}=1-\nu_2. \tag{10}$$

Таким образом, каждая смесь имеет свой собственный верхний предел неоднородности, в зависимости от среднего значения в ней β-признака.

Вероятностный вид этого предела не очевиден и требует особого рассмотрения.

III. Смесь неоднородна, если существует хотя бы одна ее часть, значение β-признака в которой не равно ее среднему значению в полном запасе смеси

$$\beta_i \neq \nu_1. \tag{11}$$

В вероятностном аспекте это означает, что случайная переменная величина β имеет уклонение от своего среднего значения и, следовательно, дисперсия ее больше нуля

$$D_\varepsilon(\beta)=\nu_2-\nu_1^2>0.$$

В общем случае

$$\nu_2-\nu_1^2 \geq 0,$$

откуда

$$\nu_2 \geq \nu_1^2$$

или

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \geq \nu_1. \tag{12}$$

Из (12), (3) и (4) следует

$$M_\varepsilon(\beta) > M_\gamma(\beta) \quad \text{при } 0<\beta<1. \tag{13}$$

Из (2) следует

$$\varepsilon(\beta)=\gamma(\beta) \quad \text{в точке} \quad \beta=\nu_2 \tag{14}$$

причем, по физическому смыслу

$$\varepsilon(\beta)=0 \quad \text{в точке} \quad \beta=0. \tag{15}$$

Из (13) следует, что в случае неоднородной смеси графики плотностей ε- и γ-распределений не совмещаются. Очевидно, их несовместимость при данном ν_1, тем больше, чем больше степень неоднородности смеси по изменчивости β признака, так как указанная несовместимость является следствием неравенства

$$\varepsilon(\beta) \neq \gamma(\beta) \quad \text{для всех} \quad \beta \neq \nu_1. \tag{16}$$

Целесообразность рассмотренной трактовки подтверждается тем, что на этой основе может быть предложен критерий степени неоднородности смеси следующего вида

$$\tau^2 = \frac{M_2(\vartheta) - M_1(\vartheta)}{M_1(\vartheta)} = \frac{\frac{\nu_2}{\nu_1} - \nu_1}{\nu_1} = \frac{\nu_2 - \nu_1^2}{\nu_1^2} = \frac{D_1(\vartheta)}{[M_1(\vartheta)]^2} = \frac{\nu_2}{\nu_1^2} - 1. \qquad (17)$$

По структуре τ^2—критерий соответствует применяемому в статистике коэффициенту вариации, который используется в качестве формальной оценки изменчивости признака ([4])

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}}.$$

Наша трактовка степени неоднородности смеси позволила показать физический смысл τ^2-критерия, как нормированной разности математических ожиданий ε- и ζ- плотностей распределения случайной переменной величины ϑ. Геометрически τ^2-критерий выражается отрезком $\left|\nu_1, \frac{\nu_2}{\nu_1}\right|$, откладываемым на числовом отрезке $[0,1]$ и измеряемым в единицах ν_1.

Предельная величина пробы (существенно влияющая на степень неоднородности) или предельное количество частей, на которое разбивается смесь, определяется исходя из требований исследования. Применительно к геологическим объектам Д. А. Родионовым разработана в последнее время совокупность статистических методов для разграничения объекта на части по комплексу признаков ([7]). Теория, охватывающая проблему оценки среднего значения признака в геологическом объекте, разработана Ж. Матероном ([8]). Рассматриваемая в цитируемых работах „статистическая однородность" объекта означает с нашей позиции, что определенные совокупности частей данного объекта имеют одинаковую степень неоднородности, т. е. равные значения τ^2-критерия.

Армянский научно-исследовательский и проектный
институт цветной металлургии

Վ. Ի. ԼՈՒՍՅԱՆ

Խառնուրդների անհամասեռության աստիճանի բնութագրումը մեկ հատկանիշի փոփոխման դեպքում

Ելնելով բաժանման պրոցեսի բնութագրման (պատճառ) և խառնուրդի համասեռության վիճակի (հետևանք) ընդհանրություններից, առաջարկվում է խառնուրդի համասեռության աստիճանի որոշման նոր մոտեցում։

Սրա էությունը կայանում է, ζ և ε բնութագրերի համադրման միևնույն փոփոխական մեծության (ϑ-հատկանիշ) հավանականությունների բաշխման մեջ, որտեղ ζ-ն դա ϑ հատկանիշի նախնական գրված հավանականության

բաշխումն է, իսկ $z = \frac{\beta}{\nu_1}\gamma$ միևնույն երևույթի հավանականությունների բաշխումն է՝ ածանցված γ-ից։

Խառնուրդների անհամասեռության աստիճանի չափանիշն որոշվում է որպես մաթեմատիկական սպասումների՝ β և γ բաշխումների նորմավորված տարբերություն։

$$v^2 = \frac{M_2(\beta) - M_1(\beta)}{M_1(\beta)} = \frac{\nu_2}{\nu_1^2} - 1$$

որտեղ՝ ν_1 և ν_2-ը պատահական փոփոխական β մեծության առաջին և երկրորդ կարգի սկզբնական մոմենտներ են։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Барский, И. Н. Плаксин*, Критерии оптимизации разделительных процессов, Изд. «Наука», М., 1967. [2] *Ж. Матерон*, Основы прикладной геостатистики, Изд. «Мир», М., 1968. [3] *Б. В. Гнеденко*, Курс теории вероятностей Изд. «Наука», М., 1969. [4] *Р. Л. Миллер, Дж. С. Кан*, Статистический анализ в геологических науках, Изд. «Мир», М., 1965. [5] *Д. А. Родионов*, Статистические методы разграничения геологических объектов по комплексу признаков, Изд. «Недра», М., 1965.