УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Н. О. Синанян

О суммируемости ортогональных рядов линейными методами
 в метрике $L_p[0,1]$, $0 < p < 1$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 15/III 1972)

Пусть

$$T = \| a_{mk} \| \quad (1)$$

— линейный регулярный метод суммирования, то есть матрица (1) удовлетворяет условиям

$$\sum_{k=1}^m |a_{mk}| < H, \quad \text{где } H \text{ не зависит от } m, \quad (2)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mk} = 0 \quad \text{для каждого } k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m a_{mk} = 1 \quad (4)$$

Пусть далее

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (5)$$

есть ряд почти везде конечных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \quad (6)$$

— его частные суммы.

Обозначим через

$$A_m(x, T) = \sum_{k=1}^m a_{mk} S_k(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (7)$$

T —средние ряда (5), определяемые матрицей (1).

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L_2[0,1]$ ортонормированная система.

В работе (1) А. А. Талаляном была доказана возможность представления функции $f(x)$, из класса $L_p[0,1]$ ($0 < p < 1$) рядами по системе $\{\varphi_n(x)\}$ в метрике $L_p[0,1]$.

Естественно рассмотреть следующий вопрос

Существует ли ряд по системе $\{\varphi_n(x)\}$, последовательность T -средних которого, определяемая матрицей (1), сходится к заданной функции $f(x) \in L_p[0,1]$ в метрике $L_p[0,1]$.

Оказывается, что это имеет место, если матрица (1) удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{mk}|^p < +\infty \quad \text{для каждого} \quad m=1, 2, \dots \quad (8)$$

А именно, справедлива

Теорема 1.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L_2[0,1]$ ортонормированная система, $T = \|a_{mk}\|$ — линейный регулярный метод суммирования, который удовлетворяет условию (8).

Тогда для произвольной функции $f(x) \in L_p[0,1]$ ($0 < p < 1$) существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

последовательность

$$A_n(x, T) \quad n=1, 2, \dots$$

T -средних которого сходится к $f(x)$ в метрике $L_p[0,1]$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |A_n(x, T) - f(x)|^p dx = 0.$$

Далее доказываются следующие теоремы:

Теорема 2.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L_2[0,1]$ ортонормированная система. Существуют ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad (9)$$

и

$$T = \|a_{mk}\|$$

— линейный регулярный метод суммирования, где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_k |a_{nk}| = 0 \quad (10)$$

удовлетворяющие условиям

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^p dx = 0 \quad \text{где} \quad 0 < p < 1$$

2) Последовательность $\{A_n(x, T)\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к нулю в метрике $L_p[0,1]$ и по мере.

Теорема 3.

Пусть

$$T = \| a_{mk} \|$$

— линейный регулярный метод суммирования, который удовлетворяет условию (10).

Существует полная в $L_2[0,1]$ ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

который удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 2.

Теоремы 2 и 3 не допускают усиления в том смысле, что если задан произвольный $T = \| a_{mk} \|$ — линейный регулярный метод суммирования, который удовлетворяет условию (10), и произвольная полная ортонормированная система в $L_2[0,1]$, нельзя утверждать, что существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

который удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 2.

Приведем такой пример.

Рассмотрим

$$T = \| a_{mk} \| \quad (11)$$

— линейный регулярный метод суммирования, где a_{mk} ($m = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$) определяются следующим образом

$$a_{1k} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=1 \\ 0 & \text{при } k \neq 1 \end{cases}$$

$$a_{2k} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=2 \\ 0 & \text{при } k \neq 2 \end{cases}$$

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-2}} & \text{при } 2^{n-2} + 1 \leq k \leq 2^{n-1} \quad n=3, 4, \dots \\ 0 & \text{при остальных } k \end{cases}$$

Доказывается, что если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad (12)$$

по системе Хаара сходится в метрике $L_p[0,1]$ к функции $f(x) \in L_p[0,1]$, то последовательность T -средних ряда (12), определяемая матрицей (11), тоже сходится к $f(x)$ в метрике $L_p[0,1]$.

Далее доказывается следующее утверждение.

Ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

по системе Хаара и последовательности

$$A_n(x, T) \quad n=1, 2, \dots$$

7-средних этих рядов, определенных матрицей (11), сходятся почти всюду (по мере) на отрезке $[0,1]$ одновременно к одной и той же функции.

В основе доказательства теорем 1, 2 и 3 лежит следующая лемма (1).

Лемма Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L_2[0,1]$ ортонормированная система $\Phi(x) \in L_p[0,1]$, $0 < p < 1$ и p_0 — фиктивное число $0 < p_0 < p$.

Тогда для всякого натурального N и положительного $\eta > 0$ существует полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$H(x) = \sum_{k=N}^m a_k \varphi_k(x), \quad m > N$$

который удовлетворяет условиям

$$\alpha) \int_0^1 |H(x) - \Phi(x)|^q dx < \eta, \quad p_0 \leq q \leq p$$

$$\beta) \int_0^1 \left| \sum_{k=N}^m a_k \varphi_k(x) \right|^q dx \leq \eta + \int_0^1 |\Phi(x)|^q dx$$

$$(N \leq n \leq m, \quad p_0 \leq q \leq p)$$

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ն. Հ. ՍՈՆԱՆՅԱՆ

Որոշագոնալ շարքերի գծային մեթոդով գումարման մասին $L_p[0,1]$ ($0 < p < 1$) մետրիկայով

Ամեն մի $f(x) \in L_p[0,1]$ ($0 < p < 1$) ֆունկցիայի համար և ամեն մի դժային ուղղությամբ գումարման մեթոդի համար, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին $\sum_{k=1}^m |a_{mk}|^p < +\infty$, $m=1, 2, \dots$ կամայական լրիվ օրթոնորմալ

սիստեմով կառուցվում է շարք, որի միջինների հաջորդականությունը $L_p[0,1]$ ($0 < p < 1$) մետրիկայով գումարվում է $f(x)$ ֆունկցիային:

Ամեն մի լրիվ $\{\varphi_n(x)\}$ օրթոնորմալ սիստեմի համար կառուցվում է դժային ուղղությամբ գումարման մեթոդ, որի համար $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_k |a_{mk}| = 0$, և շարք ըստ $\{\varphi_n(x)\}$ սիստեմի, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին

$$1) \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x) \right|^q dx = 0$$

2) շարքի միջինները չեն գույամիտում 0-ին ըստ $L_p[0,1]$ ($0 < p < 1$) մետրիկայի և ըստ չափի:

Ամեն մի դժային ուղղությամբ գումարման մեթոդի համար կառուցվում է լրիվ օրթոնորմալ սիստեմ, որով գրվում է շարք, որը բավարարում է վերը նշված 1) և 2) պայմաններին:

Л И Т Е Р А Т У Р А — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. А. А. Талалаян, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tom 21 (1-2), pp. 1-9 (1970).