ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LV 1972 1

УДК 5194.45

МАТЕМАТИКА

Г. С. Микаелян

О Q-картеровых подгруппах локально конечных групп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 31 I 1972)

В заметке вводится понятие Q-картеровой подгруппы и приводятся три теоремы о существовании и сопряженности Q-картеровых подгрупп локально конечных групп.

Пусть $\underline{\Sigma}$—некоторый абстрактный класс групп. Следуя Холлу Ф. обозначим через $s\underline{\Sigma}$—класс подгрупп $\underline{\Sigma}$—групп, $q\underline{\Sigma}$—класс гомоморфных образов $\underline{\Sigma}$—групп, $e\underline{\Sigma}$—класс расширений $\underline{\Sigma}$—групп при помощи $\underline{\Sigma}$—групп, $l\underline{\Sigma}$—класс групп, обладающих локальными системами из $\underline{\Sigma}$—групп.

Класс групп называется силовским (1), если $\theta\underline{\Sigma}\subseteq\underline{\Sigma}$, где $\theta = s$, q, e, l.

Система силовских классов $Q=<\underline{\Sigma}_\alpha|\alpha\in M>$ называется расщепляемой (1), если для всяких α, $\beta\in M$ справедливо $\underline{\Sigma}_\alpha\cap\underline{\Sigma}_\beta=E$, где E—силовский класс, состоящий только из единичной группы. В дальнейшем всюду под Q понимается расщепляемая система силовских классов $<\underline{\Sigma}_\alpha|\alpha\in M>$.

Подгруппу K некоторой группы G назовем Q-**картеровой**, если она:

1) Q—разложима (см. (1));

2) максимальна в G как Q—разложимая подгруппа;

3) совпадает со своим нормализатором в G.

В работе (2) Стонехевер рассмотрел совпадающиеся со своими нормализаторами, максимальные локально-нильпотентные подгруппы периодических групп. Эти подгруппы будут Q-картеровыми, если для всякого $\alpha\in M$ вместо класса $\underline{\Sigma}_\alpha$ взять класс всех локально конечных p_α—групп, где p_α—простое число и различным α соответствуют различные p_α.

Скажем, что в группе G справедлива CQ—теорема, если для всякого $\alpha\in M$ в G имеет место сопряженность силовских $\underline{\Sigma}_\alpha$—подгрупп. В частности, если Q взять указанным выше образом, то в каждой конечной группе выполняется CQ—теорема. В каждой конечной разрешимой группе справедлива CQ—теорема, если для всякого α вместо класса $\underline{\Sigma}_\alpha$ взять класс всех Π_α-групп, где Π_α некоторое множество простых чисел и при $\alpha, \alpha' \in M$, $\alpha \neq \alpha'$ справедливо $\Pi_\alpha \cap \Pi_{\alpha'} = \varnothing$.

Лемма. *В локально конечной группе G с Q—разложимой нормальной подгруппой H конечного индекса из справедливости CQ—теоремы во всех конечных подгруппах следует справедливость CQ—теоремы и в самой группе G.*

Доказательство. Обозначим через H_α силовскую $\underline{\Sigma}_\alpha$-подгруппу группы H. H_α характеристична в H и, следовательно, нормальна в G. Пусть A_α и B_α любые две силовские $\underline{\Sigma}_\alpha$—подгруппы группы G. Тогда

$$A_\alpha \cap H = B_\alpha \cap H = H_\alpha .$$

Следовательно,

$$A_\alpha H/H \simeq A_\alpha/H_\alpha , \quad B_\alpha H/H \simeq B_\alpha/H_\alpha .$$

Ввиду конечности группы G/H конечны и подгруппы A_α/H_α, B_α/H_α. Тогда из локальной конечности G следует, что $A_\alpha = AH_\alpha$, $B_\alpha = BH_\alpha$, $C = \{A_\alpha, B_\alpha\} = \{A, B\}H_\alpha$, где A, B, $\{A, B\}$—конечны.

Пусть A' и B' силовские $\underline{\Sigma}_\alpha$—подгруппы группы $\{A, B\}$, содержащие соответственно A и B. Тогда

$$g^{-1}A'g = B' \tag{1}$$

для некоторого $g \in \{A, B\}$. Покажем, что

$$g^{-1}A_\alpha g = B_\alpha .$$

Пусть $a_\alpha \in A_\alpha$. Тогда $a_\alpha = ah$, где $a \in A$, $h \in H_\alpha$.
Отсюда, так как $a \in A'$, то по (1) $g^{-1}ag \in B'$ или

$$g^{-1}a_\alpha g = (g^{-1}ag)(g^{-1}hg) \in B'H_\alpha .$$

Но очевидно, что $B'H_\alpha \in \underline{\Sigma}_\alpha$ и, так как $B \subseteq B'$, то

$$B'H_\alpha = BH_\alpha = B_\alpha ,$$

т. е. элемент $g^{-1}a_\alpha g$ содержится в B_α и тем самым лемма доказана.

Теорема 1. *Локально конечная группа, в каждой конечной подгруппе которой справедлива CQ-теорема и которая является расширением Q—разложимой группы при помощи конечной Q—разложимой группы, обладает Q—картеровой подгруппой.*

Теорема 2. *Пусть в каждой конечной подгруппе локально конечной группы G справедлива CQ-теорема. Тогда, если в G существует Q—разложимая нормальная подгруппа H конечного индекса, то из существования в группе G/H Q—картеровых подгрупп следует существование таких подгрупп в группе G.*

Следуя Б. И. Плоткину, через $R(G)$ обозначим локально нильпотентный радикал группы G. Имея в виду то, что периодическая локально нильпотентная группа разлагается в прямое произведение своих силовских p—подгрупп, из теоремы 2 получим такое следствие:

Следствие 1. Пусть G локально конечная, $G/R(G)$—конечная группы. Тогда из существования в $G/R(G)$ картеровых (см. [3]) подгруппы, следует существование в G максимальных, совпадающих со своими нормализаторами, локально нильпотентных подгрупп.

В теореме 2.1 работы [2] аналогичный результат сформулирован при наличии еще и требования локальной разрешимости на G. Так как существуют простые картеровые подгруппы, то следствие 1 немного усиливает упомянутое утверждение указанной теоремы.

Назовем группу G QN—**группой**, если для каждого $\alpha \in M$ всякая ее $\sum_\alpha$—подгруппа является N—группой (см. [4]). Если для всех $\alpha \in M$ вместе $\sum_\alpha$ взять класс p_α-групп, где p_α—простое число, то каждая конечная группа будет QN-группой.

Теорема 3. *Пусть в каждой конечной подгруппе локально конечной группы G справедлива CQ-теорема. Тогда, если G обладает такой Q—разложимой нормальной подгруппой H, что G/H конечная QN-группа, то из сопряженности в группе G/H Q—картеровых подгрупп следует сопряженность таких подгрупп в группе G.*

Следствие 2. Пусть G—локально конечная, $G/R(G)$—конечная группы. Тогда из сопряженности в $G/R(G)$ картеровых подгрупп следует сопряженность в G максимальных, совпадающих со своими нормализаторами, локально нильпотентных подгрупп.

В упомянутой теореме 2.1 из [2] и этот результат получен при наличии локальной разрешимости группы G. Следовательно и здесь можно было сделать то замечание, которое было сделано по поводу следствия 1.

Специальная научная редакция
армянской советской энциклопедии
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Լոկալ վերջավոր խմբերի Q-կարտերյան ենթախմբերի մասին

Հոդվածում մտցվում է Q-կարտերյան ենթախմբի գաղափարը: Բերվում են որոշ թեորեմներ վերջավոր ինդեքսով Q-ռադիկալ ունեցող լոկալ վերջավոր խմբերում Q-կարտերյան ենթախմբերի գոյության և համալուծության վերաբերյալ: Մասնավորաբար այդ թեորեմներից Ստոնհեվերի [2] աշխատանքի հիմնական արդյունքն ստացվում է ավելի թույլ պայմանների առկայությամբ:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. И. Плоткин.* Тр. уральск. электромех. ин-та инж. ж. д. трансп., вып. 2, 7—14, 1959. [2]. *S. E. Stonehewer*, Abnormal subgroups of a class of periodic locally soluble groups. Proc. London Math. Soc. 14, 1964, 520—536. [3]. *М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков.* Теория групп, т. II, 1969. [4]. *А. Г. Курош.* Теория групп. Издание 3, М., 1967.