ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIV 1972 5

МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

К. М. Мосесян

Некоторые теоремы о сильно базируемых графах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 13/I 1972)

В монографии ([1]) поставлена следующая задача: в каких случаях можно приписать ребрам неориентированного графа $L=(X, U)$ такие ориентации, чтобы он стал базисным графом частичного упорядочения? Такие графы мы назовем сильно базируемыми, а соответствующую ориентацию—сильно базирующей ориентацией.

В настоящей статье рассматриваются обыкновенные (конечные, без петель и кратных ребер) графы. Мы придерживаемся терминологии А. А. Зыкова [2]. Всюду под раскраской графа будем понимать раскраску его вершин.

Скажем, что в орграфе $\vec{L}=(X, \vec{U})$ есть l—неполный цикл, если в X имеются вершины a и b, для которых существуют идущие из a в b и непересекающиеся (кроме точек a и b) простые пути длиною l и k, где $k > l$.

Очевидно, имеет место

Лемма 1. *Следующие свойства графа равносильны:*

1. *Граф $L=(X, U)$ сильно базируем.*

2. *Каждый блок графа $L=(X, U)$ сильно базируем.*

3. *Можно граф $L=(X, U)$ так ориентировать, чтобы не было 0 и 1 — неполных циклов.*

Лемма 2. *Если граф $L=(X, U)$ можно окрасить так, чтобы ни на каком простом цикле длины p не было более $p-l$ последовательно расположенных вершин попарно различных цветов*

$$(0 \leqslant l \leqslant p-2), \text{ то графу } L=(X, U)$$

можно придать такую ориентацию, при которой не будет i-неполных циклов ($i \leqslant l$).

Доказательство.

Пусть $g(x)$ — предполагаемая раскраска графа $L=(X, U)$. Полагая

$$\vec{U} = \{\vec{xy} / xy \in U \;\&\; g(x) < g(y)\},$$

получим орграф $\vec{L} = (X, \vec{U})$. Ясно, что на каждом простом цикле длины p графа $L = (X, U)$ длина наибольшего простого пути в орграфе $\vec{L} = (X, \vec{U})$ будет не больше, чем $p - l - 1$. Если в $\vec{L} = (X, \vec{U})$ будет i-неполный цикл, то длины простых путей на этом цикле будут равны i и $p - i$, но

$$p - i \geq p - l > p - l - 1,$$

а это противоречит тому, что длины наибольшего простого пути в орграфе $\vec{L} = (X, \vec{U})$ не больше $p - l - 1$.

Из леммы 1 и 2 следует

Лемма 3. *Пусть граф $L = (X, U)$ имеет блоки $H_1, H_2, \cdots, H_n$. Если хроматическое число каждого блока меньше длины своего минимального цикла, то граф $L = (X, U)$ сильно базируем.*

Следствие. Для сильной базируемости плоского графа необходимо и достаточно, чтобы он не содержал треугольников.

Следующий пример показывает, что условие леммы 3 не является необходимым. Обозначим через K_6^5 граф, у которого длина минимального цикла равна 6, а хроматическое число равно 5 ([3], теорема 5.1). По лемме 3 граф K_6^5 сильно базируем. Показанная на рис. 1 конструкция (где u — ребро графа K_6^5, а остальные три изображенных ребра, вместе с двумя вершинами, — новые), дает пример сильно базируемого графа, у которого длина минимального цикла равна 4, а хроматическое число — 5.

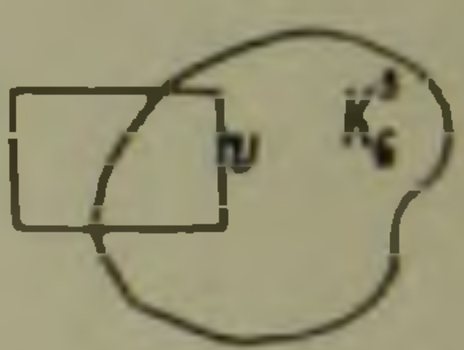

Рис. 1

Теорема 1. *Если граф $L = (X, U)$ сильно базируем и существует сильно базирующая ориентация, в которой длина наибольшего простого пути равна p, то существует четное число, не меньшее чем $p + 1$, различных сильно базирующих ориентаций, в каждой из которых длина наибольшего простого пути не больше p.*

Доказательство.

Пусть графу $L = (X, U)$ дана сильно базирующая ориентация и при этом длина наибольшего простого пути равна p. Определим последовательность $X_1, X_2, \cdots$ множеств вершин, полагая

$$X_0 = \{x / x \in X \& \Gamma x = \emptyset\},$$

$$X_i = \{x / x \in X \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} X_j \& \Gamma x \subseteq \bigcup_{j=0}^{i-1} X_j\} \qquad i = 1, 2, \cdots$$

Как известно (см., например, доказательство теоремы Витавера ([1], § 42), имеют место следующие соотношения:

$i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$ (1)

в каждом X_i никакие две вершины не смежны (2)

$X_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in X_i \exists y \in X_{i-1} (y \in \Gamma x)$ при $i \geq 1$ (3)

$$X_i = \emptyset \Rightarrow X = \bigcup_{j=0}^{i-1} X_j \qquad \text{при } i > 0 \tag{4}$$

$$i > p \Rightarrow X_i = \emptyset \tag{5}$$

$$X = \bigcup_{j=0}^{p} X_j \tag{6}$$

Данную сильно базирующую ориентацию обозначим через $\varphi_0(X_p^+, X_0^-)$. Такое обозначение показывает, что все дуги, инцидентные с вершинами из X_p (рис.2), исходят из этих вершин, а все дуги, инцидентные с вершинами из X_0, заходят в эти вершины. Ясно, что при ориентации $\varphi_0(X_p^+, X_0^-)$ для любого X_j, где $1 \leqslant j \leqslant p-1$, существуют исходящие и заходящие дуги.

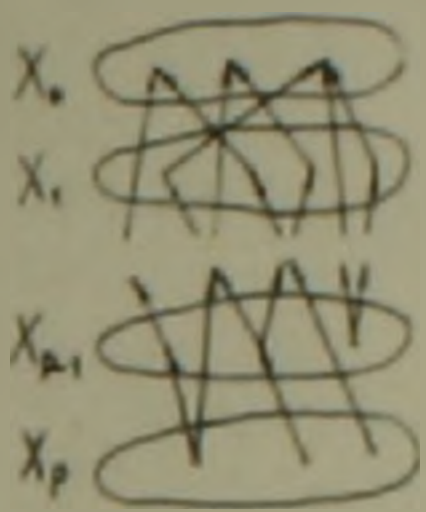

Рис. 2

Опишем процесс, с помощью которого получаются требуемые ориентации.

I шаг. Все дуги, исходящие из X_p в ориентации $\varphi_0(X_p^+, X_0^-)$, переориентируем. Легко видеть, что в полученной при этом ориентации $\varphi_1(X_{p-1}^+, X_p^-)$ циклов не будет. Не будет также 1 — неполных циклов, так как в противном случае они были бы при ориентации $\varphi_0(X_p^+, X_0^-)$. Значит, $\varphi_1(X_{p-1}^+, X_p^-)$ — сильно базирующая ориентация.

Заметим, что $\varphi_1(X_{p-1}^+, X_p^-)$ отличается от $\varphi_0(X_p^+, X_0^-)$ и длина наибольшего простого пути при ориентации $\varphi_1(X_{p-1}^+, X_p^-)$ не превосходит p. Легко видеть, что при ориентации $\varphi_1(X_{p-1}^+, X_p^-)$ для любого X_j, где $1 \leqslant j \leqslant p-2$ существуют исходящие и заходящие дуги.

II шаг. Все дуги, исходящие из X_{p-1} в ориентации $\varphi_1(X_{p-1}^+, X_p^-)$, переориентируем. Получим новую ориентацию $\varphi_2(X_{p-2}^+, X_{p-1}^-)$, которая является сильно базирующей, отличается от $\varphi_0(X_p^+, X_0^-)$ и $\varphi_1(X_{p-1}^+, X_p^-)$, и длина наибольшего простого пути не превосходит p. Ясно, что при ориентации $\varphi_2(X_{p-2}^+, X_{p-1}^-)$ для любого X_j, где $1 \leqslant j \leqslant p-3$, существуют исходящие и заходящие дуги. И т. д.

p-й шаг. Все дуги, исходящие из X_1, в ориентации $\varphi_{p-1}(X_1^+, X_2^-)$, переориентируем. Получим новую сильно базирующую ориентацию $\varphi_p(X_0^+, X_1^-)$, которая отличается от $\varphi_0(X_p^+, X_0^-)$ и от всех

$$\varphi_k(X_{p-k}^+, X_{p-k+1}^-), \qquad k = 1, 2, \cdots, p-1,$$

и при которой длина наибольшего простого пути не превосходит p.

Таким образом, для нашего графа $L = (X, U)$ имеются по крайней мере $p+1$ различных сильно базирующих ориентаций.

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что если граф $\vec{L} = (X, \vec{U})$ ориентирован сильно базируемо, то, переориентируя все дуги, получим новую сильно базирующую ориентацию.

Замечание. Как видно из доказательства, теорема 1, справедлива и для бесконечных графов.

Следствие 1. Если граф $L=(X, U)$ (конечный) сильно базируем, то для произвольной вершины a существует хотя бы одна сильно базирующая ориентация, такая, что в полученном орграфе $\vec{L}=(X, \vec{U})$ все дуги, инцидентные a, исходят из a (заходят в a).

Следствие 2. Если граф $L=(X, U)$ сильно базируем, то для него существует четное число, не меньшее $\gamma(L)$, различных сильно базирующих ориентаций.

По теореме Витавера, при любой ориентации графа $L=(X, U)$ длина наибольшего пути не меньше $\gamma(L)-1$. Следствие 2 вытекает из упомянутой теоремы и из теоремы 1.

Следствие 3. Если граф $L=(X, U)$ сильно базируем и имеет блоки $H_1, H_2, \cdots, H_n$, то для $L=(X, U)$ существует четное число, не меньшее $\prod\limits_{i=1}^{n}\gamma(H_i)$, различных сильно базирующих ориентаций.

Так как при сильно базирующей ориентации графа $L=(X, U)$ можно каждому его блоку отдельно, независимо от других, придать сильно базирующую ориентацию, то доказательство получается из следствия 2.

Предложение 1. *Для того, чтобы граф $L=(X, U)$ был сильно базируемым, необходимо и достаточно, чтобы X можно было бы разбить на такие подмножества $X_1, X_2, \cdots, X_n$, для которых выполняются следующие условия:*

1. $i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing$
2. *В каждом X_i никакие две вершины не смежны.*
3. *Если есть цепь $x_{i_p} x_{j_l}, \cdots, x_{k_s}$, где $x_{t_q} \in X_t$, $t=1, 2, \cdots, n$, $q=1, 2, \cdots, |X_t|$ и $i>j>\cdots>k$, то не существуют ребра $(x_{i_p} x_{k_s})$.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть множество X разделено на подмножества $X_1, X_2, \cdots, Z_n$, так, как это сделано при доказательстве теоремы 1. Очевидно, при этом условия предложения 1 выполняются.

Достаточность. Предположим, что множество X разделено на подмножества $X_1, X_2, \cdots, X_n$, так, что выполняются условия 1, 2 и 3. Полагая

$$\vec{U}=\{\overrightarrow{x_{i_p} x_{j_l}} / x_{i_p} x_{j_l} \in U \,\&\, i>j\},$$

получим сильно базирующую ориентацию.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Կ. Մ. ՄՈՎՍԵՍՅԱՆ

Ուժեղ բազիսացվող գրաֆիկների վերաբերյալ մի քանի թեորեմներ

Օրեի մենագրությունում դրված է հետևյալ խնդիրը ([1]), գլ. 0§1) ինչպիսին պետք է լինի ոչ կողմնորոշված գրաֆը, որպեսզի հնարավոր լինի կողմնորոշման միջոցով այն դարձնել ինչ-որ մասնակի կարգավորման բազիսային գրաֆ։ Այսպիսի գրաֆները կանվանենք ուժեղ բազիսացվող։

Պարզ է, որ ուժեղ բազիսացվող գրաֆներում երեք երկարությամբ ցիկլեր չկան։ Ցույց է տրվում, որ հարթ գրաֆների համար այդ պայմանը նաև բավարար է։

Ապացուցվում է, որ եթե գրաֆի խրոմատիկ թիվը փոքր է իր ամենակարճ ցիկլի երկարությունից, ապա այն ուժեղ բազիսացվող է։ Պարզվում է, որ վերոհիշյալ պայմանն անհրաժեշտ չէ։

Ստացվում է ներքին գնահատական գրաֆի ուժեղ բազիսային կողմնորոշումների քանակի համար։ Ապացուցվում է, որ ուժեղ բազիսացվող գրաֆի ցանկացած գագաթի համար գոյություն ունի այնպիսի ուժեղ բազիսային կողմնորոշում, որի դեպքում այդ գագաթից ելնող աղեղներ չկան։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *О. Оре*. Теория графов. М., изд. „Наука", 1968. [2] *J. B. Kelly* and *L. M. Kelly*. Amer. J. Math., pp. 786—792, v. 76 (1954). [3] *А. А. Зыков*, Теория конечных графов, 1, изд. „Наука", Новосибирск, 1969.