ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIV 1972 4

МЕХАНИКА

Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян

Колебания и динамическая устойчивость цилиндрической оболочки в магнитном поле

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 1/XII 1971)

В работе выводятся уравнения магнитоупругих колебаний цилиндрической ферромагнитной оболочки в поперечном магнитном поле. На основе полученных уравнений исследуется статистическая и динамическая устойчивость оболочки, определяются критические значения напряженности магнитного поля и области динамической неустойчивости. Для ферромагнитной пластинки аналогичное исследование проведено в работах ([1-3]).

1. Изотропная цилиндрическая оболочка постоянной толщины h отнесена к ортогональным координатам (α, β, γ). Координатная поверхность совпадает со срединной поверхностью оболочки и представляется безразмерными координатами α, β (α—вдоль образующей, β—по дуге поперечного сечения).

Оболочка изготовлена из магнитомягкого материала и находится в магнитном поле $\vec{B}_0(\gamma, t)$, вектор напряженности которого перпендикулярен недеформированной срединной поверхности.

До тех пор пока оболочка находится в невозмущенном состоянии, $\vec{B}_0(\gamma, t)$ не будет меняться и должно удовлетворять уравнениям электродинамики. Исходя из тех же соображений, что и в работе ([1]), в дальнейшем влиянием токов проводимости и токов смещения будем пренебрегать. Тогда уравнения электродинамики примут вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \tag{1.1}$$

где $\vec{B}$—вектор магнитной индукции, $\vec{H}$—вектор напряженности магнитного поля. В вакууме векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ связаны соотношением $\vec{B}=\mu_0 \vec{H}$, в магнитном материале — $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$. Индуцированное намагничивание $\vec{M}$ для магнитомягких ферромагнитных материалов с линейной характеристикой определяется выражением $\vec{M}=\varkappa\vec{H}$ ($\varkappa$—магнитная восприимчивость).

Согласно наложенным ограничениям на магнитное поле и необходимости удовлетворения уравнения (1.1), векторы $\vec{B}_0$ и $\vec{H}_0$, характеризующие невозмущенное магнитное поле, определяются следующим образом:

$$\vec{B}_e = \frac{B_0}{1-\gamma/R}\vec{e}_\gamma, \quad \vec{H}_0^{(i)} = \frac{B_0}{\mu_0(1-\gamma/R)}\vec{e}_\gamma, \quad \vec{H}_0^{(e)} = \frac{B_0}{\mu_0\mu_r(1-\gamma/R)}\vec{e}_\gamma. \tag{1.2}$$

Здесь $B_0 = B_0(\gamma)$ — величина вектора плотности магнитного поля на срединной поверхности ($\gamma=0$), $\mu_r = \varkappa+1$ — относительная магнитная проницаемость, $\vec{e}_\gamma$ — единичный вектор в направлении координатной линии γ, индекс i обозначает принадлежность к внутренней области (пространство, занимаемое оболочкой), индекс e — к внешней области (пространство вне оболочки).

В этих обозначениях полная массовая сила $\vec{F}$ и полный массовый момент $\vec{m}(m_\alpha, m_\beta)$ определяются выражениями (1)

$$\vec{F} = \int_v (\vec{M}\,\mathrm{grad})\,\vec{B}_0 dv, \quad \vec{m} = \int_v [\vec{r}\times(\vec{M}\,\mathrm{grad})\,\vec{B}_0 + \vec{M}\times\vec{B}_e]\,dv. \tag{1.3}$$

Для невозмущенного состояния $\vec{M} = \varkappa\vec{H}_0$ и из (1.2), (1.3) следует, что

$$\vec{F} = F_0\vec{e}_\gamma = \frac{\varkappa}{\mu_0\mu_r}\,\frac{h/R}{1-h^2/4R^2}\,B_0^2\vec{e}_\gamma, \quad \vec{m} = 0 \tag{1.4}$$

Таким образом, невозмущенное состояние характеризуется магнитным полем (1.2) и силовым полем (1.4). Из (1.4) следует, что до возникновения возмущений на оболочку действует только поперечная сила, обусловленная магнитовым полем. Под действием этой силы в оболочке устанавливается безмоментное напряженное состояние.

2. Перейдем к выводу уравнений устойчивости безмоментного напряженного состояния оболочки, находящейся в магнитном поле (1.2).

В отношении тонкой оболочки принимаются гипотезы Кирхгофа-Лява и общеизвестные упрощения теории оболочек с большим показателем изменяемости (4).

В рассматриваемом случае уравнения движения элемента оболочки имеют вид

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial T_\beta}{\partial\beta} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + m_\beta = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial\alpha^2} - 2\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial^2 M_\beta}{\partial\beta^2} + RT_\beta = R\left(\frac{\partial m_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial m_\beta}{\partial\beta}\right) - R^2 Z, \tag{2.1}$$

$$Z = -\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - R^{-1}F_0\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + q.$$

Здесь $\vec{U}(u, v, w)$ — вектор перемещений срединной поверхности, моменты m_α, m_β и сила q появляются вследствие изгиба оболочки и обусловлены магнитным полем.

Задача устойчивости оболочки в магнитном поле заключается в совместном исследовании систем уравнений (1.1) и (2.1). Магнитное поле и перемещения на деформированной поверхности Г должны удовлетворять общим граничным условиям

$$[\vec{B}^{(i)} - \vec{B}^{(e)}] \cdot \vec{n} = 0, \qquad [\vec{H}^{(i)} - \vec{H}^{(e)}] \times \vec{n} = 0, \tag{2.3}$$

где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности Г. Кроме того, должны удовлетворяться условия затухания возмущений на бесконечности и обычные условия закрепления торцов оболочки.

Полагая $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$ ($\vec{h}$ — добавочная напряженность магнитного поля, обусловленная деформацией оболочки) и вводя потенциальную функцию φ посредством $\vec{h} = \operatorname{grad} \varphi$, удовлетворяем первое уравнение системы (1.1), а из второго уравнения получаем

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \nabla^2 \varphi^{(i)} = 0, \quad \nabla^2 \varphi^{(e)} = 0. \tag{2.4}$$

Из (1.3) для моментов m_α, m_β и силы q находим

$$m_\alpha = \frac{\varkappa B_0}{R} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \alpha} d\gamma, \quad m_\beta = \frac{\varkappa B_0}{R} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \beta} \frac{d\gamma}{1 - \gamma/R},$$

$$q = \frac{\varkappa B_0}{R} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{1 - \gamma/R}. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) и известные выражения усилий T_α, T_β, $T_{\alpha\beta}$ и моментов M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$ через перемещения u, v, w в (2.1), получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} - \nu \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} - \frac{\partial w}{\partial \beta} +$$

$$+ \frac{(1-\nu^2)\varkappa B_0}{Eh} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \beta} d\gamma = 0$$

$$-\nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial v}{\partial \beta} + w + \frac{h^2}{12 R^2} \nabla^4 w +$$

$$+ \frac{(1-\nu^2)\varkappa B_0}{Eh} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{1-\gamma/R} \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial \beta^2} \right] d\gamma = \tag{2.6}$$

$$= \frac{(1-\nu^2) R^2}{Eh} \left[-\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\varkappa B_0^2 h}{\mu_0 \mu_r R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa B_0}{R} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{1-\gamma/R} \right].$$

Предполагая возмущения $\vec{h}$ и $\vec{u}$ малыми, из (2.3) получаем линеаризованные граничные условия

$$\mu_r \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \gamma} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial \gamma}, \qquad \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \beta} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial \beta} + \frac{\varkappa B_0}{\mu_0 \mu_r} \frac{\partial w}{\partial \beta}$$

$$\text{при} \quad \gamma = \pm \frac{h}{2} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial \alpha} + \frac{\varkappa B_0}{\mu_0 \mu_r (1 - \gamma/R)} \frac{\partial w}{\partial \alpha}.$$

Таким образом, задача сводится к совместному решению систем уравнений (2.4), (2.6) с общими граничными условиями (2.7) на колеблющихся поверхностях оболочки.

3. Рассмотрим случай, когда невозмущенное магнитное поле не изменяется во времени. Решение систем (2.5) и (2.6) для бесконечно длинной оболочки представляется в виде:

$$\begin{gathered}
u = u_0 e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n\beta, \qquad v = v_0 e^{i(\omega t - k\alpha)} \sin n\beta, \\
w = w_0 e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n\beta, \quad \varphi^{(i)} = f_1(\gamma) e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n\beta \\
\varphi^{(e)} = f_2(\gamma)\, e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n\beta \quad \text{при} \quad \gamma < -\frac{1}{2} h \\
\varphi^{(e)} = f_3(\gamma)\, e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n\beta \quad \text{при} \quad \gamma > \frac{1}{2} h
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь ω — частота колебаний, $k = \pi R/\lambda$ — безразмерное волновое число, λ — длина полуволны в направлении образующих, n — число волн по окружности оболочки, а все функции от γ являются неизвестными и подлежат определению.

Подставляя (3.1) в уравнение (2.4), замечаем, что все функции от γ должны быть решением следующего уравнения:

$$\frac{d^2 f_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d f_m}{dr} - \left(1 + \frac{n^2}{r^2}\right) f_m = 0, \quad r = k(1 - \gamma/R) \tag{3.2}$$

$$(m = 1,\ 2,\ 3)$$

Общее решение уравнения (3.2) выражается посредством функций Бесселя чисто мнимого аргумента порядка n. Входящие в него постоянные интегрирования определяются удовлетворением граничных условий (2.7) условиям затухания возмущений на бесконечности и ограниченности их во внутренней области.

Окончательно выражения для $\varphi^{(i)}$ и $\varphi^{(e)}$ будут иметь вид

$$\varphi^{(i)} = -\frac{\varkappa B_0}{\mu_0 \mu_r} \Phi(\gamma)\, w$$

$$\varphi^{(e)} = -\frac{\varkappa B_0}{\mu_0 \mu_r} \left| 1 + \Phi\left(-\frac{h}{2}\right) \right| \frac{K_n |k(1 - \gamma/R)|}{K_n |k(1 - h/2R)|} \quad \text{при} \ \gamma < -\frac{h}{2} \tag{3.2}$$

$$\varphi^{(e)} = -\frac{\varkappa B_0}{\mu_0\mu_r}\left[1+\Phi\left(\frac{h}{2}\right)\right]\frac{I_n[k(1-\gamma/R)]}{I_n[k(1-h/2R)]} \quad \text{при} \quad \gamma > \frac{h}{2}$$

где

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{\Delta}\{\Delta_1 I_n[k(1-\gamma/R)] + \Delta_2 K_n[k(1-\gamma/R)]\}$$

$$\Delta = \varkappa^2 K_n[k(1+h/2R)]\, I_n[k(1-h/2R)] - \{\varkappa K_n[k(1+h/2R)] - \Delta_1\}\{\varkappa I_n[k(1-h/2R)] - \Delta_2\}$$

$$\Delta_1 = \varkappa K_n\left[k\left(1+\frac{h}{2R}\right)\right] + K_n\left[k\left(1-\frac{h}{2R}\right)\right] - \mu_r I_n\left[k\left(1-\frac{h}{2R}\right)\right]\frac{K_n'[k(1-h/2R)]}{I_n'[k(1-h/2R)]},$$

$$\Delta_2 = \varkappa I_n\left[k\left(1-\frac{h}{2R}\right)\right] + I_n\left[k\left(1+\frac{h}{2R}\right)\right] - \mu_r K_n\left[k\left(1+\frac{h}{2R}\right)\right]\frac{I_n'[k(1+h/2R)]}{K_n'[k(1+h/2R)]}.$$

Подставляя выражение $\varphi^{(i)}$ из (3.3), выражения для u, v, w из (3.1) в (2.6), получаем характеристическое уравнение

$$\omega^2 - \Omega_0^2 + \frac{1}{\rho h}\frac{\varkappa^2 B_0^2}{\mu_0\mu_r}\left[\left(\frac{n^2+(2+\nu)k^2}{(n^2+k^2)^2}n^2 - k^2\right)A_1 - n^2A_2 + kA_3 + n^2\frac{h}{\varkappa}\right] = 0 \tag{3.4}$$

Здесь

$$A_1 = \int_{-h/2}^{h/2}\Phi(\gamma)\,d\gamma, \quad A_2 = \int_{-h/2}^{h/2}\frac{\Phi(\gamma)}{1-\gamma/R}\,d\gamma, \quad A_3 = -\frac{R}{k}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\Phi'(\gamma)}{1-\gamma/R}\,d\gamma$$

Ω_0 — частота собственных поперечных колебаний оболочки при отсутствии магнитного поля.

Потеря устойчивости оболочки будет иметь место при условии положительности выражения в квадратной скобке в уравнении (3.4). При этом получаем критическое значение B_* для магнитного поля

$$B_* = \frac{\rho h\,\mu_0\mu_r\Omega_0^2(k,\ n)}{\varkappa^2\left[\left(n^2\cdot\frac{n^2+(2+\nu)k^2}{(n^2+k^2)^2} - k^2\right)A_1 - n^2A_2 + kA_3 + n^2\frac{h}{\varkappa}\right]}. \tag{3.5}$$

Частота колебания ω определяется из уравнения (3.4)

$$\omega = \Omega_0(1 - B_0^2/B_*^2)^{1/2}. \tag{3.6}$$

Выражение (3.5) можно упростить в предположении, что $k(1-h/2R) \gg n$. В этом случае, используя асимптотические формулы для функций Бесселя, получаем

$$B_*^2 = \frac{\rho h R^2 \mu_0 \mu_r \Delta_0 \Omega_0^2(k, n)}{\varkappa^2 [2kR \operatorname{sh}(kh/2R) + n^2 h \Delta_0/\varkappa]}, \quad \Delta_0 = \mu_r \operatorname{sh}\frac{kh}{2R} + \operatorname{ch}\frac{kh}{2R}. \tag{3.7}$$

Легко заметить, что в (3.7) вышеупомянутое условие положительности выполняется.

В случае $n=0$ и $R=\infty$ из (3.7) найдем формулу

$$B_*^2 = \frac{\rho h \mu_0 \mu_r \Delta_0 \Omega_0^2(k_0)}{2\varkappa^2 k_0 \operatorname{sh}(k_0 h/2)} \quad (k_0 = \pi/l),$$

которая совпадает с формулой, полученной в ([1]) для стержня-пластины.

4. Если невозмущенное магнитное поле изменяется также во времени $\vec{B}_0 = \vec{B}_0(\gamma, t)$ (динамическая задача), то решение системы (2.6) представляется в форме (3.1), с учетом, что u_0, v_0, w_0, f_m являются функциями от времени t.

После такой же процедуры, что и в пункте 3, для потенциалов магнитного поля найдем выражения, определяемые формулами (3.5), в которых $B_0 = B_0(t)$.

Характеристическое уравнение задачи получается в виде

$$\frac{d^2 w_0}{dt^2} - \Omega_0^2 [1 - B_0^2(t)/B_*^2]\, w_0 = 0. \tag{4.1}$$

Здесь B_* — критическое значение статистического магнитного поля, определяемое формулой (3.5).

Пусть изменение магнитного поля во времени задается по закону

$$B_0(t) = B_1(1 + \varepsilon \cos\theta t) \qquad \varepsilon \ll 1 \tag{4.2}$$

Уравнение (4.1) в силу (4.2) примет вид

$$\frac{d^2 w_0}{dt^2} - \omega^2 (1 - 2\eta \cos\theta t)\, w_0 = 0, \tag{4.3}$$

где ω — частота колебаний оболочки в статическом магнитном поле — дается формулой (3.6) при $B_0 = B_1$

$$\eta = \varepsilon B_1^2/(B_*^2 - B_1^2).$$

Уравнение (4.3) представляет собой известное уравнение Матье ([3]). Его решение может быть неустойчивым, устойчивым или периодическим во времени в зависимости от значений параметров ω, η, θ

Границы первой (главной) области неустойчивости определяются по формуле

$$\theta_* = 2\omega \sqrt{1 \pm \eta}.$$

Отсюда вытекает, что возрастание напряженности магнитного поля приводит к расширению области неустойчивости.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

Գլանային թաղանթի տատանումները և դինամիկական կայունությունը մագնիսական դաշտում

Աշխատանքում ստացված են ֆեռոմագնիսական թաղանթի տատանումների հավասարումներն ընդլայնական մագնիսական դաշտում։ Ստացված հավասարումների հիման վրա ուսումնասիրված են երկար գլանային թաղանթի տատանումները, ստատիկական և դինամիկական կայունությունը։

Ցույց է տրված, որ հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայությունը փոքրացնում է թաղանթի տատանման հաճախականությունը, իսկ ըստ ժամանակի հարմոնիկ օրենքով փոփոխվող մագնիսական դաշտը կարող է առաջացնել թաղանթի պարամետրական ռեզոնանս։

Որոշված են մագնիսական դաշտի լարվածության կրիտիկական արժեքը և դինամիկական կայունության տիրույթները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Мун, Пао И-синь,* Магнитоупругое выпучивание тонкой пластинки, Прикладная механика, № 1, изд. „Мир“, 1968. [2] *Мун, Пао И-синь,* „Прикладная механика“, № 1, 1969. [3] *S. Kaliski,* Bull. Acad. Pol. Sci. Seric Sci. Techn. v. XVIII, № 9 (1969). [4] *А. Л. Гольденвейзер,* Теория упругих тонких оболочек, М., ГИТТЛ, 1953. [5] *В. В. Болотин,* Динамическая устойчивость упругих систем, М., ГИТТЛ, 1956.