ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIV 1972 4

УДК 518.9

МАТЕМАТИКА

Р. В. Хачатрян

Дифференциальные игры с конечным информационным разбиением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 16/XI 1971)

Пусть точка x перемещается в пространстве R^2 в соответствии с уравнением движения

$$\dot{x} = f(x, u, v) \tag{1}$$

из начального состояния x_0. Относительно вектор-функции $f(x, u, v)$ мы будем предполагать, что она непрерывна по всем аргументам и по x удовлетворяет условию Липшица, с константой, не зависящей от u и v, $u \in U \subset R^k$, $v \in V \subset R^l$, где U, V компактные множества.

Задано конечное разбиение S^P пространства R^2 множествами $S_1^P, \cdots, S_n^P$ и конечное разбиение S^E того же пространства множествами $S_1^E, \cdots, S_m^E$. Обозначим через X некоторое множество в R^2, обладающее следующим свойством: существуют такие наборы $i_1, i_2, \cdots, i_k$, $j_1, j_2, \cdots, j_l$, что $\bigcup\limits_{m=1}^{k} S_{i_m}^P = \bigcup\limits_{n=1}^{l} S_{j_n}^E = X$. Очевидно, что такое множество X существует, например в качестве X можно взять все пространство R^2.

Игра происходит следующим образом. Случай выбирает точку x_0 в соответствии с непрерывным распределением $G(x)$ на X. Пусть выбранная точка $x_0 \in S_{i_0}^P \cap S_{j_0}^E$, тогда игроку P сообщается, что x_0 принадлежит множеству $S_{i_0}^P$ и игроку E сообщается, что x_0 принадлежит множеству $S_{j_0}^E$. Игра развивается из точки x_0 в соответствии с дифференциальным уравнением (1). Пока точка $x(t)$ остается в пересечении $S_{i_0}^P \cap S_{j_0}^E$ игрокам P и E ничего дополнительного не сообщается. Пусть в некоторый момент $\bar{t}$ точка $x(\bar{t})$ оказывается в множестве $S_{i_k}^P \cap S_{j_l}^E$, тогда игроку P сообщается, что точка $x(t)$ принадлежит множеству $S_{i_k}^P$, а игроку E, что она принадлежит $S_{j_l}^E$. Эта информация не пополняется, пока точка остается в множестве $S_{i_k}^P \cap S_{j_l}^E$.

При попадании точки $x(t)$ в следующее пересечение, игрокам сообщаются соответствующие элементы пересечения и т. д.

Процесс продолжается до момента T_0 и игрок E получает выигрыш $F(x_0, x(t))$, где F — ограниченный и непрерывный функционал, заданный на траекториях процесса. Выигрыш игрока P равен $-F$.

Перейдем теперь к определению игры в нормальной форме.

Информационные множества. Элементы разбиения S^P мы будем называть информационными множествами игрока P. Аналогично, информационными множествами игрока E мы будем называть элементы разбиения S^E.

Чистые стратегии. Под чистыми стратегиями $u(\cdot)(v(\cdot))$ игрока $P(E)$ мы [1,2] будем понимать всевозможные однозначные отображения $S^P \xrightarrow{u(\cdot)} U\,(S^E \xrightarrow{v(\cdot)} V)$. Таким образом стратегии игроков P и E оказываются конечномерными векторами $u=(u_1, \cdots, u_n)$, $v=(v_1, \cdots \cdots, v_m)$, где $u_i \in U$ есть выбор игрока P в информационном множестве S_i^P, а $v_j \in V$ есть выбор игрока E в информационном множестве S_j^E.

Для дальнейшего нам потребуется наложить дополнительные условия на разбиения S^P и S^E и на правую часть уравнения (1).

Рассмотрим множество точек, являющихся граничными для пересечений $S_i^P \cap S_j^E$ $i=1, \cdots, n$; $j = 1, \cdots, m$. Обозначим это множество через A. Точку $a \in A$ будем называть простой точкой, если существует такое $\varepsilon > 0$, что ε-окрестность точки a пересекается не более чем с двумя множествами вида $S_i^P \cap S_j^E$ и $S_k^P \cap S_l^E, i, k=1, \cdots, m$ $j, l = 1, \cdots, n$. Остальные точки множества A будем называть особыми точками.

Информационное разбиение $S^P(S^E)$ называется регулярным, если: 1) каждое из информационных множеств, входящих в это разбиение, имеет строго положительную Лебегову меру; 2) в любой ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что множество начальных состояний B, из которых траектории в ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$ попадают в δ-окрестность особых точек имеет Лебегову меру меньше ε; 3) для любой простой точки $x \in A$ существует такое $\delta > 0$, что траектория $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \delta$ принадлежит только одному пересечению $S_i^P \cap S_j^E$, при всевозможных выборах управлений u, v на отрезке времени $[0; \delta]$; 4) число особых точек конечно и граница каждого из информационных множеств является кусочно-гладкой кривой.

В тех случаях, когда в ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$ из начального состояния $x_0 \in X$ траектория движения не содержит особых точек, может быть построено единственное решение $x(t)$, $t \in [0, T_0]$ системы (1) для любых регулярных информационных разбиений $S^P(S^E)$. Если же в ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$ точка $x(t)$ в какой-то момент времени попадает в особую точку, то дальнейшее продолжение решения может оказаться невозможным из-за возникновения „скользящего режима*. В последнем случае мы под решением системы (1) на отрезке $[0; T_0]$ будем понимать просто отрезок траектории до первой особой точки. Поскольку в случае регулярного информационного разбиения число особых точек конечно, а начальное состояние выбирается в соответствии с непрерывным распределением $G(x)$, то вероятность попадания в ситуация $(u(\cdot), v(\cdot))$ в особую точку равна нулю.

Из определения чистых стратегий игроков P и E следует, что множества всех чистых стратегий игроков P и E являются компактными множествами в пространстве R^{nk} и R^{ml} соответственно. Обозначим множество всех чистых стратегий игрока P через Δ_1, а множество всех чистых стратегий игрока E через Δ_2.

Выигрыш. Пусть в результате случайного выбора $G(x)$ реализовалось начальное состояние x_0, и игроки P и E выбрали $(u(\cdot), v(\cdot))$. Тогда выигрыш равен

$$K(x_0; u(\cdot), v(\cdot)) = F(x_0; x(t)), \tag{2}$$

если в ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$ из начального состояния x_0 траектория $x(t)$ не проходит через особые точки и

$$K(x_0; u(\cdot), v(\cdot)) = 0 \tag{3}$$

в противном случае.

Функция выигрыша. По определению каждой паре стратегии $(u(\cdot), v(\cdot))$ и начальному состоянию x_0 однозначно соответствует выигрыш $K(x_0; u(\cdot), v(\cdot))$. Однако выбор начального состояния x_0 случаен, поэтому под функцией выигрыша $M(u(\cdot), v(\cdot))$ мы будем понимать среднее значение выигрыша, усредненное по начальному состоянию

$$M(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_X K(x; u(\cdot), v(\cdot))\, dG(x). \tag{4}$$

Определив пространства стратегий игроков P и E и функцию выигрыша, мы определили игру в нормальной форме

$$\Gamma = \langle \Delta_1, \Delta_2, M(u(\cdot), v(\cdot)) \rangle.$$

Данная игра является развитием игры, рассмотренной Л. А. Петросяном ([3]).

Игра Γ является игрой с неполной информацией, поэтому в подавляющем большинстве случаев ситуация равновесия в чистых стратегиях в этой игре не существует. Поэтому для построения решения мы расширим множества стратегий Δ_1 и Δ_2 до смешанных стратегий.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, сформулируем следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Если разбиения S^P и S^E* регулярны, *функционал $F(x_0, x(t))$ непрерывен и ограничен и множество X ограничено, то функция $M(u(\cdot), v(\cdot))$ непрерывна на произведении компактных множеств $\Delta_1 \times \Delta_2$.*

Приведем идею доказательства теоремы 1.

Рассмотрим произвольную ситуацию $(\bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))$ и докажем непрерывность функции $M(u(\cdot), v(\cdot))$ в точке $(\bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))$. Пусть $(u_n(\cdot), v_n(\cdot))$ последовательность сходящаяся к $(\bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))$ (поскольку $u(\cdot)$, $v(\cdot)$—вектора, то сходимость понимается в евклидовой метрике). Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} M(u_n(\cdot), v_n(\cdot))=M(\bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))$. Из регулярности разбиений S^P и S^E и непрерывности распределения $G(x)$ следует, что для любого $\varepsilon>0$, можно найти такое $\delta>0$, что множество начальных состояний B, из которых траектории в ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$ попадают в δ-окрестности особых точек a_k, имеет меру меньше ε. Имеем

$$M(u(\cdot), v(\cdot)) = \int\limits_B K(x; u(\cdot), v(\cdot))dG(x) + \int\limits_{X\setminus B} K(x; u(\cdot), v(\cdot))dG(x). \tag{5}$$

Далее получаем

$$|M(\bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))-M(u_n(\cdot), v_n(\cdot))| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_B |K(x; \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))-K(x; u_n(\cdot), v_n(\cdot))|\,dG(x) + \tag{6}$$

$$+\int\limits_{X\setminus B} |K(x; \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))-K(x; u_n(\cdot), v_n(\cdot))|\,dG(x).$$

Из определения $K(x; u(\cdot), v(\cdot))$ и ограниченности $F(x_0, x(t))$ следует, что

$$\int\limits_B |K(x); \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))-K(x; u_n(\cdot), v_n(\cdot))|\,dG(x) \leqslant \varepsilon L, \tag{7}$$

где L некоторая константа. Из (6) и (7) получаем

$$|M(\bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))-M(u_n(\cdot), v_n(\cdot))| \leqslant \varepsilon L +$$

$$+\int\limits_{X\setminus B} |K(x; (\bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))-K(x; u_n(\cdot), v_n(\cdot))|\,dG(x). \tag{8}$$

Из устойчивости решений уравнения (1) следует, что функция $K(x; u(\cdot), v(\cdot))$ непрерывна в точке $(\bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))$, для всех $x\in X\setminus B$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} K(x; u_n(\cdot), v_n(\cdot))=K(x; \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot)). \tag{9}$$

Можно показать далее, что сходимость (9) равномерна по x на множестве $X\setminus B$.

Тогда из (8) и (9) имеем

$$\lim_{n\to\infty} |M(\bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))-M(u_n(\cdot), v_n(\cdot))| \leqslant \varepsilon L \tag{10}$$

Поскольку ε произвольно, то

$$M(\bar{u}(\cdot),\ \bar{v}(\cdot)) = \lim_{n\to\infty} M(u_n(\cdot),\ v_n(\cdot)).$$

Смешанные стратегии. Пусть $\mu(\nu)$ произвольные вероятностные меры на $\Delta_1(\Delta_2)$. Под смешанной стратегией $\mu(\nu)$ игрока $P(E)$ мы будем понимать произвольную вероятностную меру на $\Delta_1(\Delta_2)$. Множество всех смешанных стратегий $P(E)$ мы будем обозначать через $\sum_1(\sum_2)$. Под смешанным расширением игры преследования с неполной информацией мы понимаем игру в нормальной форме над пространствами стратегий $\sum_1$, $\sum_2$ с функцией выигрыша

$$R(\mu,\ \nu) = \int\limits_{\Delta_1}\int\limits_{\Delta_2} M(u(\cdot),\ v(\cdot))\, d\mu\, d\nu. \tag{11}$$

Таким образом $R(\mu,\ \nu)$ есть просто математическое ожидание выигрыша $M(u(\cdot),\ v(\cdot))$, если стратегии $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ выбираются случайно в соответствии с вероятностными мерами $\mu\in\sum_1$ и $\nu\in\sum_2$. Под ситуацией равновесия в смешанном расширении игры преследования с неполной информацией мы будем понимать такую пару стратегий μ^*, ν^*, что

$$R(\mu,\ \nu^*) \geqslant R(\mu^*,\ \nu^*) \geqslant R(\mu^*,\ \nu), \tag{12}$$
$$\mu\in\sum\nolimits_1, \qquad \nu\in\sum\nolimits_2.$$

Мы будем говорить, что игра преследования с неполной информацией имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях, если ее смешанное расширение имеет ситуацию равновесия. В теории игр известно, что всякая игра в нормальной форме определенная на компактных множествах стратегий и с непрерывной функцией выигрыша имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях. Из этого и теоремы 1 получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Если дифференциальная игра Γ с неполной информацией определена на регулярных информационных разбиениях S^P, S^E, распределение $G(x)$ непрерывно, множество X ограничено, а функционал F непрерывен и ограничен, то она имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.*

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Ի. Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Դիֆերենցիալ խաղեր վերջավոր ինֆորմացիայ տրոհումով

Հոդվածում ուսումնասիրվում է դիֆերենցիալ խաղերի մի հատուկ դաս՝ ոչ լրիվ ինֆորմացիայով դիֆերենցիալ խաղեր վերջավոր ինֆորմացիայ

տրոհումով։ Քանի որ ոչ լրիվ ինֆորմացիայով դիֆերենցիալ խաղերում զուտ ստրատեգիաների բազմությունում հավասարակշռության իրադրություն ընդհանրապես գոյություն չունի, հոդվածում տրված է այդ տիպի խաղերի այսպես կոչված խառն ընդլայնման գաղափարը և դրանց համար ապացուցված է հավասարակշռության իրադրության գոյությունը խառը ստրատեգիաների բազմությունում։ Եթե վերցնենք ոչ լրիվ ինֆորմացիայով դիֆերենցիալ խաղի խառն ընդլայնումը, ապա նրա մասին ճիշտ է հետևյալ թեորեմը։

Թ ե ո ր ե մ. Եթե ոչ լրիվ ինֆորմացիայով դիֆերենցիալ խաղը որոշված է S_P, S^E ռեգուլյար ինֆորմացիալ տրոհումների վրա, $G(x)$ բաշխումը անընդհատ է, X բազմությունը սահմանափակ է, F ֆունկցիոնալը անընդհատ է և սահմանափակ, ապա նա ունի հավասարակշռության իրադրություն խառը ստրատեգիաների բազմությունում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Н. Воробьев*, УМН, XXV. вып. 2 (152) (1970). [2] *Л. А. Петросян*, ДАН СССР, т. 195, № 3 (1970). [3] *Л. А. Петросян*, Вторая Всесоюзная конференция по теории игр. Вильнюс, 1971.