

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Э. М. Погосян

Δ -графы и некоторые их свойства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 11/IX 1971)

1. В заметке рассматриваются свойства графов некоторого специального вида — Δ -графов, связанных с представлением систем упорядоченных подмножеств конечных множеств. Комбинаторный аппарат, построенный на основе Δ -графов был использован для получения окончательного решения задачи о системах множеств с наименьшим числом подмножеств (^{1,2}). Ниже приводятся теорема об изоморфизме и ряд количественных характеристик Δ -графов. Некоторые другие специфические свойства Δ -графов описаны в (²).

2. Мы будем пользоваться терминологией и обозначениями работы (¹). В дальнейшем изложении будем считать, что в множестве всех поднаборов R_n набора $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ определено отношение лексикографической упорядоченности $\prec$. ("A $\prec$ B" читается как "A лексикографически меньше B").

Последовательность Δ_n -наборов $A_1, \dots, A_m$ назовем " $+$ -уплотненной, если

$$\forall j (1 \leq j \leq m-1 \rightarrow A_j \prec A_{j+1} \& \exists A (A \in R_n \& A_j \prec A \prec A_{j+1})).$$

Δ_n -набор $B = \{b_1, \dots, b_{k_2}\}$ назовем k_2 -расширением Δ_n -набора $A = \{a_1, \dots, a_{k_1}\}$, если $k_2 \geq k_1$ и при любом i от 1 до k_1 будет $a_i = b_i$.

Расположенную в лексикографическом порядке последовательность $\Delta_n^{k_2}$ -наборов, составленную из всех различных расширений всех наборов какого-либо множества $\Delta_n^{k_1}$ -наборов назовем k_2 -продолжением множества S . Будем обозначать i -ую компоненту произвольного набора A через $(A)_i$ где $1 \leq i \leq \mu(A)^*$.

Таким образом $A = \{(A)_1, (A)_2, \dots, (A)_{\mu(A)}\}$.

Заметим также, что число k -расширений пустого набора определяется параметром n . Поэтому мы будем пользоваться терминами "пустой Δ_n -набор" или " Δ_n^0 -набор".

3. Пусть A —произвольный Δ_n -набор, p_A —множество всех расширений A .

* $\mu(A)$ —мощность набора A .

Δ_a -графом с корнем A мы назовем граф G , определяемый следующим образом.

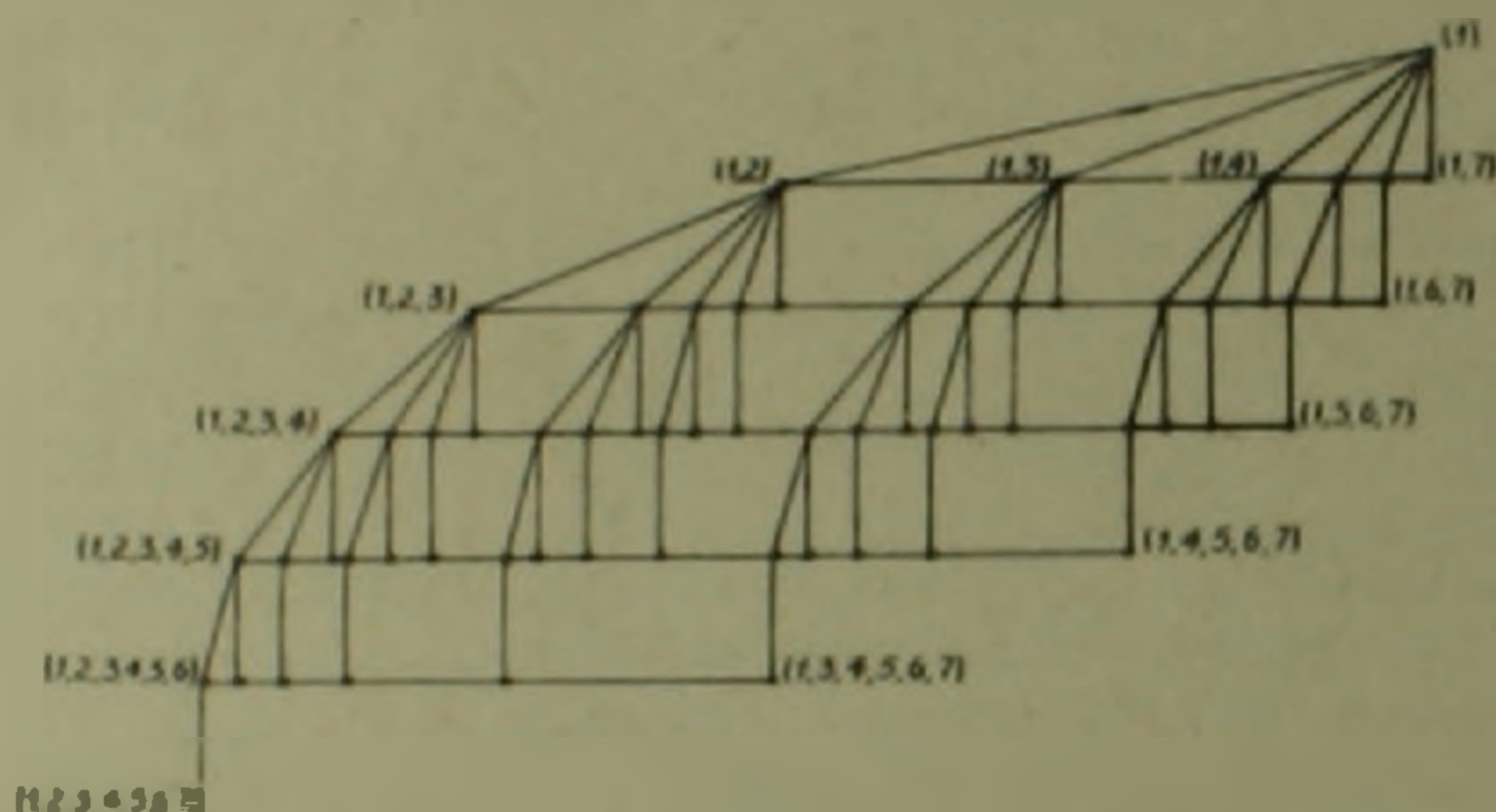
1. Каждый Δ_a -набор B , принадлежащий множеству P_A , является вершиной B графа G .

2. Вершины B и C графа G соединены ребром в том и только в том случае, если выполнено одно из условий:

а) $\mu(B) = \mu(C)$ и B, C либо $C, B - , +$ уплотненные последовательности Δ_a -наборов;

б) C является $\mu(C)$ -расширением B и $\mu(C) = \mu(B) + 1$, либо B является $\mu(B)$ -расширением C и $\mu(B) = \mu(C) + 1$. На рис. 1 изображен один из таких графов

Δ_7 -граф с корнем $\{1\}$.



Δ_7 -граф с корнем $\{1\}$

Рис. 1

Пусть G — Δ_a -граф с корнем A , где A —произвольный Δ_a -набор, $(A) \mu(A) = a$. Тогда подграф G_p графа G такой, что $G_p = G / \bigcup_{i=1}^p G_i$, где G_i — Δ_a -граф с корнем $A \cup \{a+i\}$, $i=1, \dots, p$, $0 \leq p \leq n-a$. Будем называть $\delta\Delta^p$ -графом с корнем A .

Заметим, что $\delta\Delta^0$ -граф с корнем A совпадает с Δ_a -графом с корнем A , а $\delta\Delta^{n-a}$ -граф с корнем A —с графом, имеющим единственную вершину A .

На рис. 1. толстыми линиями выделен $\delta\Delta^2$ -граф с корнем $\{1\}$

4. Теорема 1. Для произвольного Δ_a -набора A , если G —некоторый $\delta\Delta^p$ -граф с корнем A и a есть $(A) \mu(A)$, то граф G изоморфен Δ_{n-a-p} -графу, корнем которого является пустой Δ_{n-a-p} -набор.

Пусть $0 \leq a \leq n$. Через P_a обозначим множество всех Δ_a -наборов A таких, что $(A) \mu(A) = a$. Через $E(a)$ обозначим множество всех

Δ_a -графов, корни которых принадлежат P_a .

Произвольный элемент множества $\bar{E}_{(a)}$, $0 \leq a \leq n$, будем называть Δ_a^0 -графом.

Элементы множеств $\bar{E}_a = \bigcup_{\alpha \in \{0, 1, \dots, a\}} \bar{E}_{(a)}$ и $\bar{E} = \bigcup_{a=0}^n \bar{E}_a$ назовем, соответственно, Δ_a -графами и Δ -графами.

Пусть также $\bar{H}_{a,p}$ — множество всех возможных $\delta\Delta_a^p$ -графов, корни которых принадлежат P_a . $\bar{H}_{(a)} = \bigcup_{p=0}^{n-a} \bar{H}_{a,p}$, $\bar{H}_a = \bigcup_{\alpha \in \{0, 1, \dots, a\}} \bar{H}_{a,\alpha}$, $\bar{H} = \bigcup_{a=0}^n \bar{H}_a$.

Элементы множеств $\bar{H}_{a,p}$, $\bar{H}_{(a)}$, $\bar{H}_a$, $\bar{H}$ будем называть, соответственно, $\delta\Delta_a^{a,p}$ -, $\delta\Delta_a^a$ -, $\delta\Delta_a$ -, $\delta\Delta$ -графами.

Следствие 1.1. Множество всех $\delta\Delta$ -графов $\bar{H}$ относительно изоморфизма между графами разбивается на классы эквивалентности H , такие, что классу H , принадлежит те и только те $\delta\Delta_a^{a,p}$ -графы, для которых $n-a-p=c$, где

$$p \in \{0, 1, \dots, n-a\}, a \in \{0, 1, \dots, n\}, n=0, 1, 2, \dots, c=0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что при исследовании свойств графов из класса H , где $c=n-a-p$, достаточно рассмотреть свойства Δ_{a-p}^a -графа из этого же класса.

Для произвольного $\delta\Delta$ -графа G введем следующие понятия.

Пусть $G = \delta\Delta_a^p$ -граф с корнем A и $\bar{a} = (A)_{(a)}$. Тогда:

1. Δ_a -граф с корнем $A \cup \{a+p+1\}$ будем называть левым подграфом G , а $\delta\Delta_{a-p}^{a-p}$ -граф с корнем A — правым подграфом G .

2. вершины левого и правого подграфов Δ_a -графа G будем называть, соответственно, левыми и правыми вершинами G ;

3. множество всех $(a+r)$ -расширений Δ_a -набора A , принадлежащих G , где $0 \leq r \leq n-a$, будем называть r -ярусом G .

В произвольном $\delta\Delta$ -графе G , имеющем только одну вершину, левый и правый подграфы G полагаем равными G .

В произвольном графе F , изоморфном $\delta\Delta$ -графу G , назовем левым, правым подграфом, левой, правой вершиной, r -ярусом те части F , которые находятся во взаимнооднозначном соответствии с соответствующими частями G , имеющими такое же название.

Следствие 2.1. В произвольном Δ -графе G левый подграф G изоморфен правому подграфу G .

Из следствия 2.1 и теоремы 1 получаем, что в произвольном $\delta\Delta_a^{a,p}$ -графе G можно выделить $2^{n-a-p-1}$ $\delta\Delta$ -графов, изоморфных Δ_l^0 -графу, где $l=0, 1, \dots, n-a-p$.

5. Нижеследующие теоремы дают возможность подсчитать или сравнить число путей, соединяющих определенные множества вершин Δ -графов, расположенных в различных ярусах.

Обозначим через $\psi_k(S)$ число всех Δ_n^k -наборов в k -продолжении множества Δ_n -наборов S .

Через $|T|$ обозначим множество Δ_n -наборов последовательности Δ_n -наборов T .

Теорема 2. Для произвольного множества Δ_n^k -наборов $S = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$,

$$\psi_k(S) = \sum_{j=1}^m C_{n-(A_j)_k}^{k-k_j},$$

где $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$.

Если множество S составлено из наборов „+“-уплотненной последовательности, то подсчет числа $\psi_k(S)$ существенно упрощается.

Теорема 3. Для произвольной „+“-уплотненной последовательности Δ_n^k -наборов $T = \Gamma_n^{k_1}(m_1), \Gamma_n^{k_1}(m_1+1), \dots, \Gamma_n^{k_2}(m_2)$, где $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$, $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq C_n^{k_1}$,

выполняется:

$$\psi_{k_1}(|T|) = \sum_{j=0}^{k_1-1} (C_{n-a_j}^{k_1-j} - C_{n-b_j}^{k_1-j}),$$

где

$$a_j = (\Gamma_n^{k_1}(m_1-1))_j, \quad b_j = (\Gamma_n^{k_1}(m_2))_j, \quad \text{при } j=1, \dots, k_1,$$

и

$$(\Gamma_n^{k_1}(0))_j = \begin{cases} j & \text{при } 1 \leq j \leq k_1-1, \\ k_1-1 & \text{при } j=k_1. \end{cases}$$

Теорема 4. Для произвольных k_1, k_2, m, r , где $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$, $1 \leq m \leq C_n^{k_1}$, $1 \leq r \leq C_n^{k_1} - m + 1$, если $T = \Gamma_n^{k_1}(r), \dots, \Gamma_n^{k_1}(r+m-1)$, $T^* = \Gamma_n^{k_1}(1), \dots, \Gamma_n^{k_1}(m)$, $T^{**} = \Gamma_n^{k_1}(C_n^{k_1} - m + 1), \dots, \Gamma_n^{k_1}(C_n^{k_1})$, то $\psi_{k_1}(|T^*|) \geq \psi_{k_1}(|T|) \geq \psi_{k_1}(|T^{**}|)$.

В заключение автор благодарит И. Д. Заславского за ряд полезных советов и замечаний по работе.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР

Է. Մ. ԳՈՂՈՍՅԱՆ

Δ-գրաֆները և նրանց որոշ հատկությունները

Հոդվածում դիտարկվում են վերջավոր բազմությունների կարգավորված ենթաբազմությունների սիստեմների ներկայացման հետ կապված հատուկ տիպի գրաֆների Δ-գրաֆների հատկությունները:

Δ-գրաֆների վրա հիմնված կոմբինատոր ապարատն օգտագործվել է փոքրագույն թվով ենթաբազմություններ ունեցող բազմությունների սիստեմների մասին խնդրի վերջնական լուծումը ստանալու համար:

Համախմբում տրվում են Δ -գրաֆների մի շարք օրինակական բնութագրեր
և թերեւս Δ -գրաֆների իզոմորֆիզմի մասին:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Շ Ե Ն Ո Ւ Ր Ե Ր Ն

1 Э. М. Погосян, ДАН Арм. ССР, том I, № 2 (1970). 2 Э. М. Погосян, Канди-
датская диссертация, М., 1970.