

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

А. Г. Маркосян

Об одном неравенстве теории графов

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 5/VIII 1971)

В различных областях науки очень большое применение имеет понятие внутренне устойчивого (независимого) множества и с ним связанное понятие числа внутренней устойчивости. Здесь мы не будем упоминать все эти применения, только отметим одно очень важное применение этих понятий в теории информации. К. Шеннон ⁽¹⁾ показал, что понятие пропускной способности канала при нулевой ошибке тесно связано с понятием числа внутренней устойчивости в декартовом произведении графов. Он выразил мнение, что эту задачу нужно решать комбинаторными методами, несмотря на то, что получил некоторые оценки для пропускной способности методами непрерывной математики.

Пусть имеем неориентированный граф $G=(X, \Gamma)$.

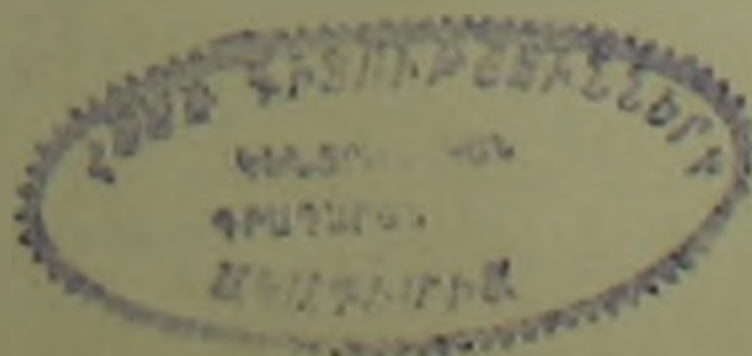
Здесь и в дальнейшем мы будем придерживаться терминологии и обозначений К. Бержа ⁽²⁾. Обозначим через $\alpha(G)$ —число внутренней устойчивости графа G , а через $G^n=G \times G \times \dots \times G$ — n -ое декартово произведение. Вообще, в теории графов имеет важное значение нахождение необходимого и достаточного условия для выполнения неравенства

$$\alpha(G^n) > \alpha^n(G) \quad (1)$$

Видимо, как предполагает О. Оре ⁽³⁾, это очень трудная задача. К. Шеннон определил некоторый класс графов, для которых $\alpha(G^n) = \alpha^n(G)$. Автор настоящей статьи нашел ⁽⁴⁾ одно достаточное условие для равенства $\alpha(G^n) = \alpha^n(G)$ и доказал, что для простых циклов нечетной длины

$$\alpha(G^n) > \alpha^n(G) + \alpha^{n-2}(G) \cdot \left\lfloor \frac{\alpha(G)}{2} \right\rfloor.$$

В настоящей статье рассмотрены некоторые вопросы, связанные с выполнением неравенства (1). В работе ⁽⁴⁾ доказана следующая теорема: если граф G не содержит циклов нечетной длины ≥ 5 , то $\alpha(G^n) = \alpha^n(G)$.



Однако можно усилить эту теорему, ничем не изменяя ее доказательства.

Теорема 1. Пусть S — некоторое внутренне устойчивое множество графа G , и $\alpha(G) = |S|$. Если $\alpha(G^n) > \alpha^n(G)$, то граф G содержит такой цикл нечетной длины $\gamma = |x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}|$, $k \geq 2$, что $x_{2i} \in S$ для $i = 1, \dots, k$; $x_{2i+1} \in \bar{S}$ для $i = 0, 1, \dots, k$.

На простых примерах легко убедиться, что обратная теорема неверна. Для формулировки следующей теоремы дадим одно определение. Пусть S — некоторое внутренне устойчивое множество графа G . Скажем, что подграф $H = (X_H, \Gamma_H)$ графа $G = (X, \Gamma)$ S — внешне разрезан, если $\Gamma X_H \cap (S \setminus S_H) = \emptyset$, где $S_H = S \cap X_H$.

Теорема 2. Если граф G содержит такой S — внешне разрезанный подграф, для которого $\alpha(H^2) > |S_H|^2$, то $\alpha(G^n) > \alpha^n(G)$, $n \geq 2$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\alpha(G^2) > \alpha^2(G)$, так как из неравенства $\alpha(G_1 \times G_2) \geq \alpha(G_1) \cdot \alpha(G_2)$ (*) и из $\alpha(G^2) > \alpha^2(G)$ получим $\alpha(G^n) > \alpha^n(G)$. Обозначим через $S_H \times H$ такое внутренне устойчивое множество графа $H \times H$, которое содержит наибольшее число элементов, т. е. $\alpha(H^2) = |S_H \times H| = |S_H|$. Ясно, что множество $\bar{S}_H \times S_H \cup S_H \times \bar{S}_H \cup \bar{S}_H \times \bar{S}_H$, где $\bar{S}_H = S \setminus S_H$, внутренне устойчиво в декартовом произведении $G^2 = G \times G$. Обозначим через

$$S_G = \bar{S}_H \times S_H \cup S_H \times \bar{S}_H \cup \bar{S}_H \times \bar{S}_H \cup S_H.$$

Покажем, что S_G — внутренне устойчивое множество в G^2 . Для этого нужно доказать, что элементы множества S_H не смежны с элементами множества $\bar{S}_H \times S_H \cup S_H \times \bar{S}_H \cup \bar{S}_H \times \bar{S}_H$. Пусть $x_1 y_1 \in S_H$, а $x_2 y_2 \in \bar{S}_H \times S_H \cup S_H \times \bar{S}_H \cup \bar{S}_H \times \bar{S}_H$.

а) $x_2 y_2 \in \bar{S}_H \times S_H$, тогда вершины $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$ в G^2 не смежны, так как x_1 и x_2 не смежны в графе G в силу того, что подграф H S — внешне разрезан.

б) $x_2 y_2 \in S_H \times \bar{S}_H$, в силу несмежности y_1 и y_2 в G , $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$ не смежны в графе G^2 .

в) $x_2 y_2 \in \bar{S}_H \times \bar{S}_H$ здесь не смежны x_1 и x_2 , y_1 и y_2 в графе G . Вычислим число элементов внутренне устойчивого множества S_G ,

$$\begin{aligned} |S_G| &= |\bar{S}_H \times S_H| + |S_H \times \bar{S}_H| + |\bar{S}_H \times \bar{S}_H| + |S_H| = \\ &= |\bar{S}_H| \cdot |S_H| + |S_H| \cdot |\bar{S}_H| + |\bar{S}_H|^2 + |S_H| = \\ &= 2(|S| - |S_H|) \cdot |S_H| + |S_H| + (|S| - |S_H|)^2 = \\ &= 2|S| \cdot |S_H| - 2|S_H|^2 + |S_H| + |S|^2 - 2|S| \cdot |S_H| + |S_H|^2 = \\ &= |S|^2 + |S_H| - |S_H|^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Но в силу условия теоремы $|S_H| - |S_H|^2 > 0$, так как $|S_H| = \alpha(H^2) > |S_H|^2$ и мы получим, что $|S_G| > |S|^2$. Отсюда непосредственно следует, что $\alpha(G^2) > \alpha^2(G)$. Теорема доказана.

Приведем один простой пример (рис. 1), для которого условие Шеннона о существовании сохранного отображения ⁽²⁾ не выполнено и ничего нельзя утверждать о неравенстве (1) для данного графа, так как о справедливости обратной теоремы Шеннона ⁽²⁾ ничего неизвестно. Но с помощью теоремы 2 можно показать, что для данного примера $\alpha(G^2) > \alpha^2(G)$. Пусть за H взять подграф, порожденный множеством $X_H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а за $S = \{2, 5, 7\}$. Тогда $S_H = \{2, 5\}$, $\bar{S}_H = \{7\}$. Для подграфа H $\alpha(H^2) > \alpha^2(H)$ в силу теоремы о нечетных циклах ⁽⁴⁾. Действительно, за S_H можно взять множество $\{11, 23, 35, 42, 54\}$, легко проверить, что оно внутренне устойчиво и все условия теоремы 4 выполнены. Значит

$$\begin{aligned} S_G &= \bar{S}_H \times S_H \cup S_H \times \bar{S}_H \cup S_H \times \bar{S}_H \cup S_H \times \bar{S}_H = \\ &= \{72, 75\} \cup \{27, 57\} \cup \{77\} \cup \{11, 23, 35, 42, 54\}. \\ \alpha(G^2) &\geq |S_G| = 10 > 9 = |S|^2 = \alpha^2(G). \end{aligned}$$

Здесь уместно отметить, что очень важной и нерешенной задачей является обратное утверждение Шеннона, которое состоит в следующем: класс графов, для которых $\alpha(G^n) = \alpha^n(G)$, полностью исчерпы-

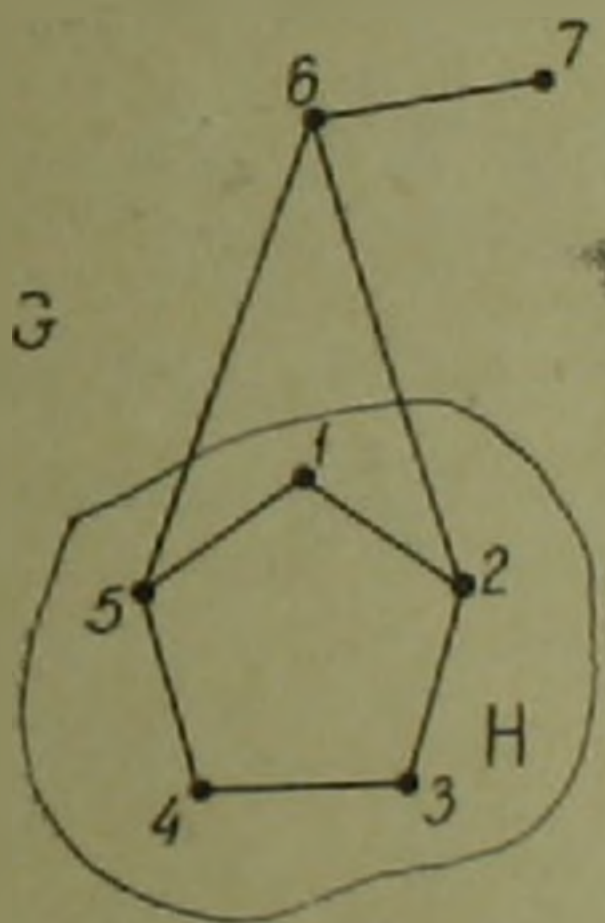


Рис. 1

вается графами, имеющими сохранное отображение. Ясно, что положительное решение этой задачи даст необходимое и достаточное условие для выполнения неравенства (1).

Докажем еще одну теорему, которая даст достаточное условие для выполнения неравенства (1). Дадим следующее определение.

Пусть дан граф $G = (X, \Gamma)$ и при внутренне устойчивых множествах этого графа:

$$S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k, t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{n(a)}\};$$

$$S_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_k, t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{n(a)}\};$$

$$S_3 = \{z_1, z_2, \dots, z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_m, t_{m+1}, \dots, t_{\alpha(G)}\};$$

где $k \geq 1, m \geq k$.

Систему множеств S_1, S_2, S_3 назовем (k, m) -системой внутренние устойчивых множеств или просто (k, m) -системой.

Обозначим через

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}; \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\};$$

$$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}; \quad T_{k, \alpha} = \{t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{\alpha(G)}\};$$

$$T_{k, m} = \{t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_m\}; \quad T_{m, \alpha} = \{t_{m+1}, t_{m+2}, \dots, t_{\alpha(G)}\};$$

Тогда

$$S_1 = \{X, T_{k, \alpha}\}, \quad S_2 = \{Y, T_{k, \alpha}\}; \quad S_3 = \{Z, T_{m, \alpha}\}.$$

Теорема 3. Если граф G содержит такую (k, m) -систему, что для любых $x_i \in X$ и $y_j \in Y$, $\Gamma_Z x_i \cap \Gamma_Z y_j = \emptyset$, если $y_j \in \Gamma x_i$ и $\Gamma_Z x = \Gamma x \cap Z$, то

$$\alpha(G^n) \geq \alpha^n(G) + k^2 \alpha^{n-2}(G). \quad (3)$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\alpha(G^2) > \alpha^2(G) + k^2$, отсюда получится требуемое неравенство (3).

В двойном декартовом произведении графа G возьмем следующие подмножества:

$$S' = T_{k, \alpha} \times T_{k, \alpha} \cup T_{m, \alpha} \times X \cup X \times T_{m, \alpha};$$

$$S_X = X \times Z_X \cup \bar{Z}_X \times X;$$

$$S_Y = Y \times \bar{Z}_X \cup Z_X \times Y;$$

где $Z_X = \Gamma X \cap Z$, а $\bar{Z}_X = Z \setminus Z_X$. Очевидно, из условий теоремы следует, что $Z_X \neq \emptyset$; $\bar{Z}_X \neq \emptyset$.

Покажем, что множество

$$S_{G^2} = S' \cup S_X \cup S_Y$$

внутренне устойчиво в графе G^2 .

Во-первых каждое из множеств S' , S_X и S_Y внутренне устойчиво, так как множества $T_{k, \alpha}$, $T_{m, \alpha}$ и X принадлежат внутренне устойчивому множеству S_1 графа G и не пересекаются друг с другом. S_X и S_Y — внутренне устойчивы, так как $\Gamma X \cap \bar{Z}_X = \emptyset$ и $\Gamma Y \cap Z_X = \emptyset$.

Сейчас покажем, что внутренне устойчиво S_{G^2} .

Множество $X \times Z_X$ не имеет смежных вершин из множества S' в графе G^2 , потому что в графе G , $X \cup T_{k, \alpha}$ и $Z_X \cup T_{m, \alpha}$ внутренне устойчивые множества. Множество $\bar{Z}_X \times X$ также не имеет смежных вершин из множества S' в графе G^2 , так как $X \cup T_{k, \alpha}$, $\bar{Z}_X \cup T_{m, \alpha}$ внутренне устойчивы в графе G . Следовательно, $S' \cup S_X$ внутренне устойчиво. Аналогичным образом можно показать, что $S' \cup S_Y$ также внутренне устойчивое множество, так как $Z_X \cup \bar{Z}_X = Z$, $X \cup Z_X$ и $Y \cup Z_X$ —

внутренне устойчивые множества в графе G . Итак, $S_{G^2} = S' \cup S_X \cup S_Y$ — внутренне устойчивое множество в G^2 .

Вычислим число элементов S_{G^2} .

$$|S_{G^2}| = |S'| + |S_X| + |S_Y|, \text{ где } |S'| = (\alpha(G) - k)^2 + k(\alpha(G) - m) + \\ + k(\alpha(G) - m) = (\alpha(G) - k)^2 + 2k(\alpha(G) - m); \\ |S_X| + |S_Y| = 2km.$$

Получим

$$|S_{G^2}| = (\alpha(G) - k)^2 + 2k(\alpha(G) - m) + 2km = \alpha^2(G) + k^2.$$

Отсюда

$$\alpha(G^2) \geq |S_{G^2}| = \alpha^2(G) + k^2,$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Приведем одно простое применение этой теоремы.

Следствие. Для простого цикла нечетной длины ≥ 5

$$\alpha(G^n) > \alpha^n(G).$$

Пусть цикл

$$v = [v_1, v_2, \dots, v_{2p}, v_{2p+1}], \quad \alpha(G) = p.$$

Тогда возьмем

$$S_1 = \{x_1 = v_1, \quad t_2 = v_4, \quad t_3 = v_6, \dots, t_{\alpha(G)} = v_{2p}\};$$

$$S_2 = \{y_1 = v_2, \quad t_2 = v_4, \quad t_3 = v_6, \dots, t_{\alpha(G)} = v_{2p}\};$$

$$S_3 = \{z_1 = v_3, \quad t_2 = v_5, \quad z_3 = v_7, \dots, z_{\alpha(G)} = v_{2p+1}\}.$$

Здесь

$$k=1, \quad m=\alpha(G), \quad X=\{v_1\}, \quad Y=\{v_2\},$$

Множества S_1, S_2, S_3 составляют $(k, m) = (1, \alpha(G))$ систему. В силу теоремы 3 получим, что $\alpha(G^2) \geq p^2 + 1$. На примере, с помощью теоре-

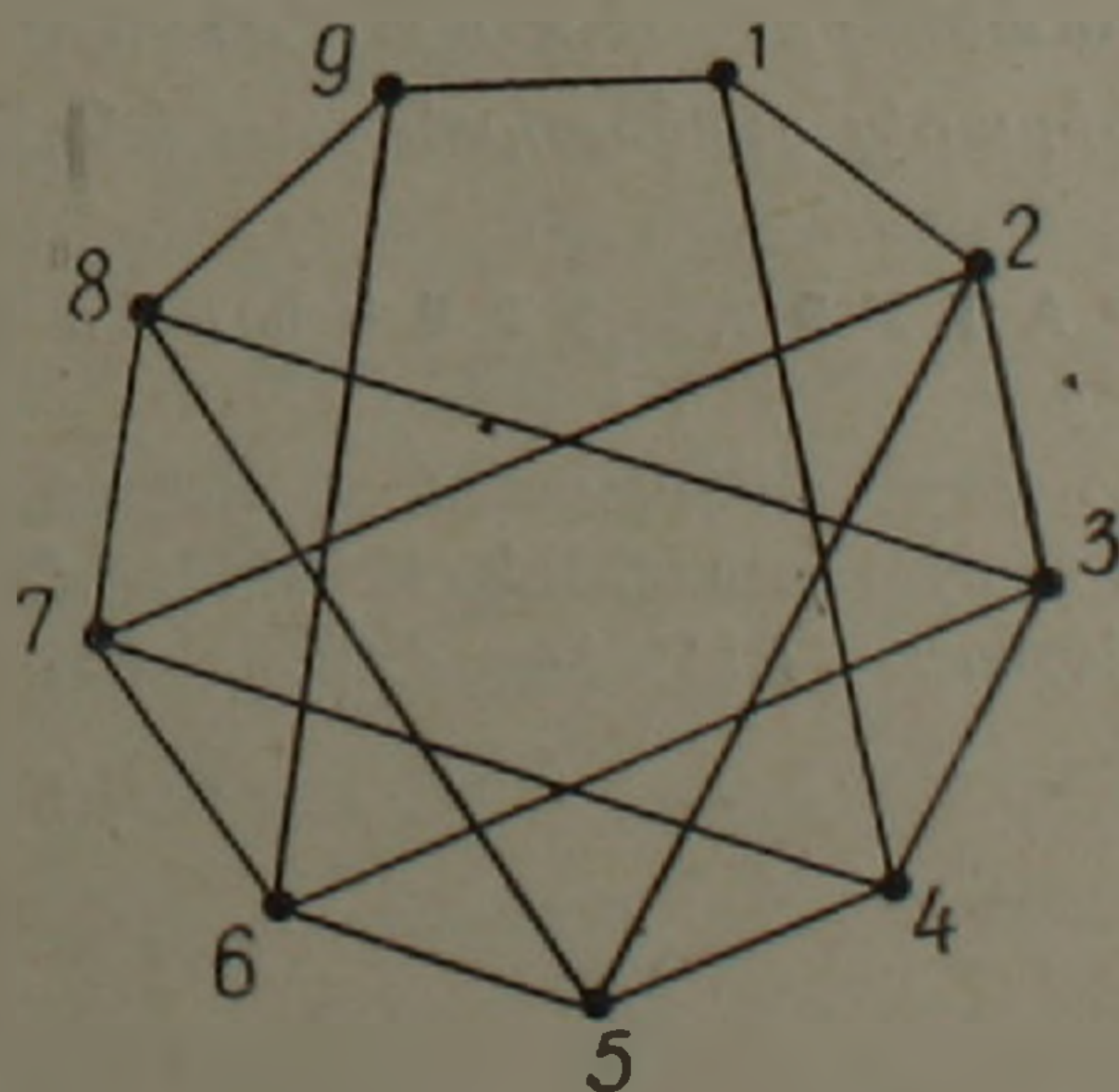


Рис. 2

мы 3 покажем, что выполнено неравенство (1). На рис. 2 изображен граф G . Для этого графа $\alpha(G)=4$, покажем, что $\alpha(G^2) > \alpha^2(G)=16$. Для этого достаточно взять

$$S_1 = \{1, 3, 5, 7\};$$

$$S_2 = \{9, 3, 5, 7\};$$

$$S_3 = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Здесь множества S_1, S_2, S_3 составляют $(1, \alpha(G))$ -систему, поэтому $\alpha(G^2) > \alpha^2(G)$. Интересно заметить, что если добавить в графе G еще одно произвольное ребро, то получится граф, который уже имеет сохранное отображение и $\alpha(G^2) = \alpha^2(G)$. В этом смысле данный граф является критическим.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ա. Գ. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Գրաֆների տեսության մի անհավասարության մասին

Ինչպես հայտնի է Շենոնի աշխատություններից, գրաֆների դեկարտյան արտադրյալի ներքին կայունության թիվը և ներքին կայունության բազմությունը ունեն շատ վարկեր մշանակություն ինֆորմացիայի տեսության մեջ: Գոյություն ունեն մի քանի արդյունքներ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալի ներքին կայունության թվի վերաբերյալ՝ կախված սկզբնական գրաֆների ներքին կայունության թվից: Սակայն մինչև այժմ դեռ չի գտնված անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ արտադրյալ գրաֆի և սկզբնական գրաֆների ներքին կայունության թվերի արտադրյալի հավասարության մասին: Այս հոդվածում ապացուցված են մի քանի թեորեմներ, որոնցում գտնված են բավարար պայմաններ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալի ներքին կայունության թիվը սկզբնական գրաֆների ներքին կայունության թվերի արտադրյալից մեծ լինելու համար: Մասնավորապես, գտնված են մի քանի դասեր, որոնց համար կատարված են այդ պայմանները: Այդ պայմանների ստուգումը բավական հեշտ է և կարելի է այն կիրառել գործնական շատ խնդիրներ լուծելու համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ К. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике, изд. ИЛ, М., 1963.
- ² К. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962. ³ О. Оре, Теория графов, изд. Наука, М., 1968. ⁴ А. Г. Маркосян, ДАН Арм. ССР, т. LII, № 1, (1971).