

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. С. Заргарян, Р. Л. Эфнаджян

Плоская задача теории упругости для круга с радиальным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапоиджяном 9/XI 1971)

В настоящей работе исследуется плоская задача теории упругости для круга с внутренним радиальным разрезом. Предполагается, что по внешнему контуру действует произвольная непрерывная нагрузка, главный вектор и главный момент которой равны нулю, а кромки разреза свободны от напряжений. Вопросам исследований напряженного состояния в телах с разрезами посвящены работы (1-6) и др.

В данной работе доказана квази-вполне регулярность бесконечной системы, к которой сводится решение поставленной задачи. Получены коэффициенты концентраций напряжений у концов разреза.

1. Решение плоской задачи теории упругости для двусвязной области (рис. 1), ограниченной извне окружностью L_1 , а изнутри радиальным разрезом L_2 , когда по внешнему контуру действует непрерывная произвольная нагрузка, а внутренний контур свободен от напряжений, сводится к определению голоморфных в рассматриваемой области функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ из граничных условий (').

$$\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1(t)} + \overline{\psi_1(t)} = f(t) + C, \quad \text{на } L_1 \quad (1.1)$$

$$\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1(t)} + \overline{\psi_1(t)} = 0, \quad \text{на } L_2 \quad (1.2)$$

где

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \left(\frac{t}{R} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^* \left(\frac{\bar{t}}{R} \right)^k,$$

а постоянная C подлежит определению.

Из непрерывности внешней нагрузки следует, что

$$|a_k^*| \leq \frac{C_1}{k}, \quad |b_k^*| \leq \frac{C_2}{k^2},$$

где C_1 и C_2 некоторые постоянные, кроме того коэффициенты a_k^* и b_k^* удовлетворяют условиям уравновешенности внешней нагрузки ('). За-

дача решается методом Д. И. Шермана ⁽⁸⁾. На круговом контуре L_1 введем вспомогательную неизвестную функцию $\omega(t)$ по условию

$$\varphi_1(t) - t \overline{\varphi_1(t)} - \overline{\varphi_1(t)} = 2\omega(t). \quad (1.3)$$

Из (1.1) и (1.3) получаем

$$\varphi_1(t) = \omega(t) + \frac{f(t) + c}{2}. \quad (1.4)$$

$$\varphi_1(t) = -\overline{\omega(t)} - \overline{t} \omega'(t) + \frac{\overline{f(t)} + \overline{c}}{2} - \overline{t} \frac{f'(t)}{2}. \quad (1.5)$$

Введем функцию $\varphi(z)$ голоморфную во внешности L_2 по условию

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{\omega(t) + \frac{f(t)}{2}}{t-z} \right] dt - \frac{C}{2} & \text{внутри } L_1 \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{\omega(t) + \frac{f(t)}{2}}{t-z} \right] dt & \text{вне } L_1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Аналогично

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{\overline{\omega(t)} - \frac{\overline{f(t)}}{2}}{t-z} \right] dt + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{\overline{t} \omega'(t) + \overline{t} \frac{f'(t)}{2}}{t-z} \right] dt - \frac{\overline{c}}{2} & \text{внутри } L_1 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{\overline{\omega(t)} - \frac{\overline{f(t)}}{2}}{t-z} \right] dt + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{\overline{t} \omega'(t) + \overline{t} \frac{f'(t)}{2}}{t-z} \right] dt & \text{вне } L_1 \end{cases} \quad (1.7)$$

С целью получения более рациональной для решения бесконечной системы, к которой будет сведено решение поставленной задачи функцию $\omega(t)$ на окружности L_1 представим в виде

$$\omega(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{t}\right)^k - \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^* \left(\frac{R}{t}\right)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} a_k^* \left(\frac{t}{R}\right)^k, \quad (1.8)$$

где a_k и b_k — искомые коэффициенты, a_k^* и b_k^* — коэффициенты разложения в ряд внешней нагрузки.

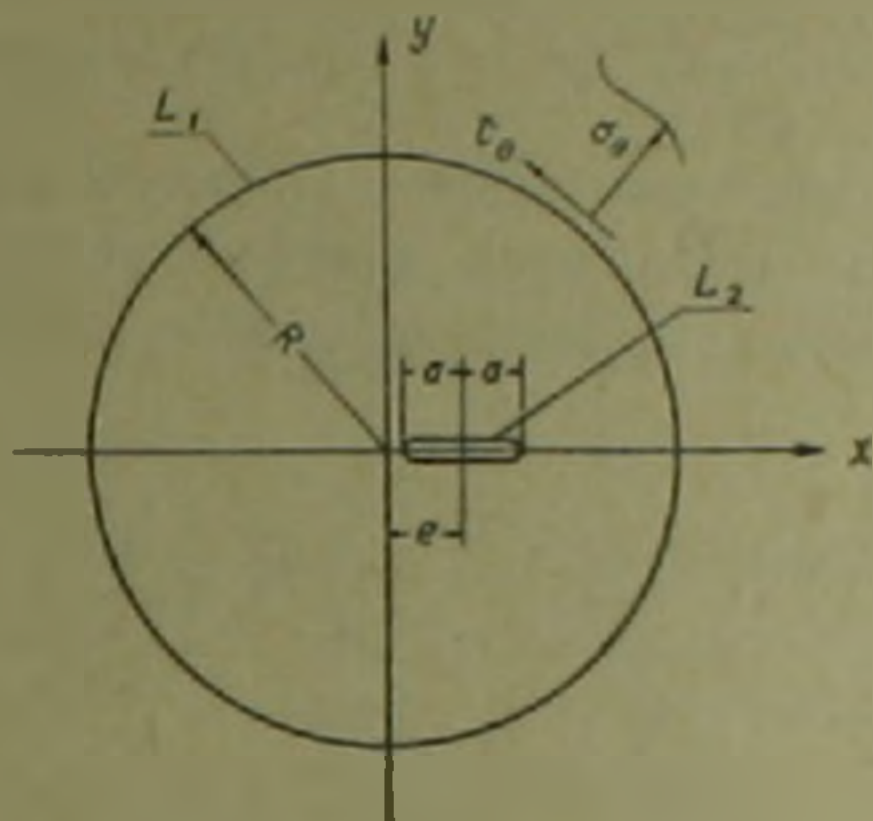


Рис. 1

Из (1.6) и (1.7), с учетом (1.8), имеем:

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R}\right)^k + \frac{a_1^* z}{2R} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k^* \left(\frac{z}{R}\right)^k + \frac{C}{2} \quad (1.9)$$

$$\psi_1(z) = \psi(z) - \bar{a}_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k \left(\frac{\bar{z}}{R}\right)^k - \sum_{k=2}^{\infty} k a_k \left(\frac{z}{R}\right)^{k-2} + \\ + \frac{\bar{C}}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} k a_k^* \left(\frac{z}{R}\right)^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k^* \left(\frac{\bar{z}}{R}\right)^k. \quad (1.10)$$

Примем коэффициент $a_0 = 0$, так как он не влияет на граничные условия (1.1) и (1.2). Подставляя значения функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ из (1.9) и (1.10) в граничное условие (1.2), получаем:

$$\varphi(t) + \overline{t \varphi'(t)} + \overline{\varphi(t)} = -C - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^* + a_k) \left(\frac{t}{R}\right)^k + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_k^*) \left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^k - t \sum_{k=2}^{\infty} k(\bar{a}_k + \bar{a}_k^*) \frac{\bar{t}^{k-1}}{R^k} - \frac{\bar{a}_1 t}{R} + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} a(\bar{a}_k + \bar{a}_k^*) \left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^{k-2}. \quad (1.11)$$

Таким образом определение функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ сводится к граничной задаче для односвязной области, представляющей внешность контура L_2 . Для решения этой вспомогательной задачи будем рассматривать разрез как предельный случай эллипса. Отобразим внешность эллипса на внешность единичной окружности посредством известной функции

$$z = A \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right) + e, \quad (1.12)$$

где $A = \frac{a+b}{2}$, $m = \frac{a-b}{a+b}$ (a и b полуоси эллипса) при $m=1$ эллипс обращается в радиальный разрез. Пользуясь методом Н. И. Мусхелишвили, получаем выражения для функций $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и постоянной C . Можно доказать, что эти выражения справедливы при $m=1$ и равны

$$\varphi(\zeta) = \sum_{v=1}^{\infty} (A_v + B_v) \left(\frac{1}{\zeta} \right)^v; \quad (1.13)$$

$$\varphi(\zeta) = - \frac{A \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + e}{A \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)} \varphi'(\zeta) + \bar{\varphi}(\zeta), \quad (1.14)$$

где

$$A_v = \sum_{k=v}^{\infty} b_k \alpha_{v,k}^1 + \sum_{k=v}^{\infty} a_k \alpha_{v,k}^2 + \sum_{k=v+2}^{\infty} \bar{a}_k \alpha_{v,k}^3 + \\ + \sum_{k=v+1}^{\infty} \bar{a}_k \alpha_{v,k}^4 + \sum_{k=v}^{\infty} \bar{a}_k \alpha_{v,k}^5 + \sum_{k=v+2}^{\infty} \bar{a}_k \alpha_{v,k}^6 \quad (1.15)$$

$$B_v = - \sum_{k=v}^{\infty} b_k^* \alpha_{v,k}^1 + \sum_{k=v}^{\infty} a_k^* \alpha_{v,k}^2 - \sum_{k=v+2}^{\infty} \bar{a}_k^* \alpha_{v,k}^3 + \\ + \sum_{k=v+1}^{\infty} \bar{a}_k^* \alpha_{v,k}^4 + \sum_{k=v+1}^{\infty} a_k^* \alpha_{v,k}^5 + \sum_{k=v+2}^{\infty} \bar{a}_k^* \alpha_{v,k}^6; \quad (1.16)$$

$$\alpha_{v,k}^1 = \left(\frac{A}{e} \right)^v \frac{e^k k!}{R^k} \sum_{i=0}^{\frac{k-v}{2} - \frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{(k-2i-v)! i! (i+v)!}; \quad (1.17)$$

$$\alpha_{v,k}^2 = - \left(\frac{A}{e} \right)^v \frac{e^k k!}{R^k} \sum_{i=0}^{\frac{k-v}{2} - \frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{(k-2i-v)! i! (i+v)!}; \quad (1.18)$$

$$\alpha_{\nu, k}^3 = \left(\frac{A}{e}\right)^{\nu} \frac{k!}{k-1} \left(\frac{e}{R}\right)^{k-2} \sum_{l=0}^{\frac{k-\nu-2}{2} - \frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^l}{(k-2-2l-\nu)! l! (l+\nu)!}; \quad (1.19)$$

$$\alpha_{\nu, k}^4 = - \left(\frac{A}{e}\right)^{\nu} \frac{k! e^k}{R^k} \sum_{l=0}^{\frac{k-\nu-1}{2} - \frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^l}{(k-1-2l-\nu)! l! (l+\nu)!}; \quad (1.20)$$

$$\alpha_{\nu, k}^5 = - \left(\frac{A}{e}\right)^{\nu} \frac{k! e^k}{R^k} \sum_{l=0}^{\frac{k-\nu}{2} - \frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^l}{(k-2l-\nu)! l! (l+\nu-1)!}; \quad (1.21)$$

$$\alpha_{\nu, k}^6 = - A \left(\frac{A}{e}\right)^{\nu+1} \frac{k! e^{k-1}}{R^k} \sum_{l=0}^{\frac{k-\nu-2}{2} - \frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^l}{(k-2l-\nu-2)! l! (l+\nu+1)!}; \quad (1.22)$$

$$\alpha_{\nu, k}^7 = - \left(\frac{A}{e}\right)^{\nu} \frac{k! e^k}{R^k} \sum_{l=0}^{\frac{k-\nu}{2} - \frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^l}{(k-2l-\nu)! l! (l+\nu-1)!}; \quad (1.23)$$

В значениях верхних пределов сумм (1.17), (1.18), (1.19), (1.21), (1.22) и (1.23) при k и ν одинаковой четности $\frac{1}{2}$ не учитываются.

2. Для определения неизвестных коэффициентов a_k и b_k обратимся к выражениям (1.4), (1.5), (1.9), (1.10), из которых, с учетом (1.8), получаем следующие соотношения на контуре:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{t}\right)^k; \quad (2.1)$$

$$\varphi(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k \left(\frac{R}{t}\right)^k - \frac{a_1 R}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \left(\frac{R}{t}\right)^{k+2}. \quad (2.2)$$

В выражении (1.14) заменим ζ на z с учетом равенства

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi'(\zeta)}{A \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)}$$

получим

$$\psi(z) = \bar{\varphi}(z) - z \varphi'(z). \quad (2.3)$$

Заменяя в (1.13) ζ на z , согласно (1.12), по формуле

$$\zeta = \frac{z-e}{2A} + \sqrt{\left(\frac{z-e}{2A}\right)^2 - 1}$$

получаем

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{z}\right)^k \sum_{v=1}^k (A_v + B_v) a_{v,k}^{(n)}, \quad (2.4)$$

для $|z| > e + a$

где

$$a_{v,k}^{(n)} = \left(\frac{a}{R}\right)^v \sum_{m=0}^{\frac{k-v}{2} - \frac{1}{2}} K_v^m \frac{e^{k-v-2m} a^{2m}}{R^{k-v}} C_{k-1}^{v+2m-1}; \quad (2.5)$$

$$K_v^m = \frac{1}{(v+m)! 2^{m+v}} \sum_{n=1}^v (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_v^n n!! \left[\left(v+m - \frac{n+1}{2} \right) 2 - 1 \right] !! \quad (2.6)$$

В значении верхнего предела суммы (2.5) при k и v одинаковой четности $\frac{1}{2}$ не учитывается. Звездочка у символа суммы (2.6) указывает, что индекс n при переходе к смежному значению увеличивается на 2.

Приравнивая правые части (2.2) и (2.3), с учетом (2.1), на контуре L_1 получаем функциональное уравнение, из которого получаем:

$$\begin{aligned} \bar{a} + a_1 &= -\bar{b}_1 - b_1; \\ a_2 &= -\bar{b}_2 - 2b_2; \\ \bar{a}_k &= (k-2)b_{k-2} - kb_k - \bar{b}_k, \quad \text{при } k \geq 3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Приравнивая правые части (2.1) и (2.4) на контуре L_1 , получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$b_k = \sum_{v=1}^k (A_v + B_v) a_{v,k}^{(n)} \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Подставляя (2.7) в (1.15), с учетом (1.17—1.22), получаем

$$A_v = \sum_{k=v}^{\infty} (b_k C_{k,v}^1 + \bar{b}_k C_{k,v}^2). \quad (2.9)$$

Можно доказать, что

$$\sum_{k=v}^{\infty} (|C_{k,v}^1| + |C_{k,v}^2|) < \left(\frac{a}{R-e}\right)^v D^*, \quad (2.10)$$

где $C_{k,v}^1$ и $C_{k,v}^2$ представляют линейные комбинации от $a_{k,l}^{(n)}$ ($l=1, 2, \dots, 6$),

а величина D^* ограничена сверху при $\frac{a}{R-e} < 1$. Из неравенства (2.10) следует, что ее правая часть стремится к нулю при возрастании n .

Принимая параметр $\xi > \frac{a}{R}$ и $\xi > \frac{e}{R}$, из (2.8), с учетом (2.5) и (2.6), после некоторых преобразований получаем

$$\sum_{v=1}^k |a_{v,k}^s| < \xi^k \frac{(k+2)!}{\left(\frac{k-1}{2}\right)! \left(\frac{k+1}{2}\right)!} d^s, \quad \text{при } k \text{ нечетных} \quad (2.11)$$

$$\sum_{v=1}^k |a_{v,k}^s| < \xi^k \frac{(k+2)!}{\frac{k}{2}! \frac{k}{2}!} d^s, \quad \text{при } k \text{ четных}$$

При $\xi < \frac{1}{2}$ правая часть (2.11) стремится к нулю при возрастании k . Аналогично можно оценить свободный член системы (2.8). Из вышесказанного следует, что системы (2.8) и (2.9) квази-вполне регулярны при $\frac{a}{R} < \frac{1}{2}$ и $\frac{e}{R} < \frac{1}{2}$.

3. Напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} в окрестности концов разреза в зависимости от величины $s = |x - (e \pm a)|$ (s —расстояние рассматриваемой точки до концов разреза по оси x) могут быть представлены так:

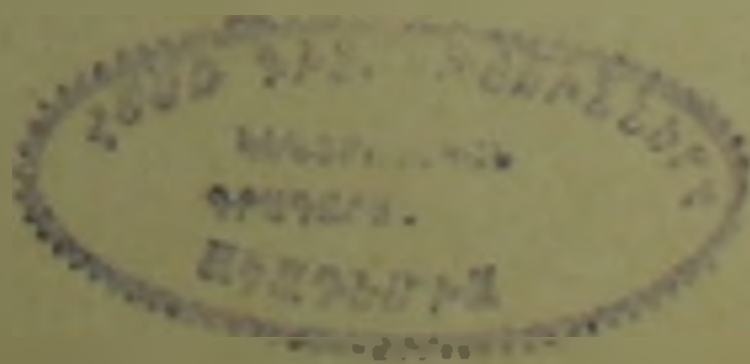
$$\sigma_x = \frac{N}{\sqrt{s}} + G_1(0); \quad \sigma_y = \frac{N}{\sqrt{s}} + G_2(0); \quad \tau_{xy} = \frac{N_1}{\sqrt{s}} + G_3(0).$$

Выражение коэффициентов концентраций напряжений N и N_1 имеют вид:

$$N = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{v=1}^{\infty} v \operatorname{Re}(A_v + B_v) & \text{при } x = e + a \\ -\frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v v \operatorname{Re}(A_v + B_v) & \text{при } x = e - a \end{cases}$$

$$N_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{v=1}^{\infty} v \operatorname{Im}(A_v + B_v) & \text{при } x = e + a \\ \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v v \operatorname{Im}(A_v + B_v) & \text{при } x = e - a \end{cases}$$

$G_1(0)$, $G_2(0)$ и $G_3(0)$ —ограниченные величины в окрестности концов разреза.



Հառավդային հաճով կլոր սալի հաբ խնդիր

Դիտարկվում է առանձգականության տեսության հարթ խնդիր շառավղային ճաբով կլոր սալի համար:

Ծնթադրվում է, որ արտաքին եզրով ազդում է կամայական անընդհատ բոն. իսկ ճաբի եզրերն ազատ են արտաքին լարումներից: Խնդրի լուծումը բերվում է հանրահաշվական գծային հավասարումների անվերջ սխտեմաների:

Ապացուցվում է այդ անվերջ սխտեմանների կվադրի լիովին ռեզոնայանքայինությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Ր Յ ՈՒ Ն

- ¹ Г. И. Баренблат, «Прикладная математика и механика», т. XXIII, № 4 (1959)
- ² G. R. Irwin, J. Appl. Mech., v. 24 (1957)
- ³ Г. И. Баренблат, Г. П. Черепанов, «Известия АН СССР», ОТН Механика и машиностроение, № 3, 1960
- ⁴ В. В. Панасюк, Прелюдное равновесие хрупких тел с трещинами, «Наукова думка», Киев, 1968
- ⁵ А. А. Баблюк, Н. О. Гулякян, «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. XXII, № 3 (1969)
- ⁶ Р. В. Гольдштейн, И. Н. Рысков, Р. Л. Солганик, «Механика твердого тела», № 4, 1969.
- ⁷ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1966.
- ⁸ Д. И. Шерман, «Прикладная математика и механика», т. XV, вып. 3, стр. 297—316 (1951)