

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

К. М. Мосесян

О сильно базлируемых графах

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/XI 1971)

В настоящей статье мы придерживаемся терминологии, принятой в ⁽¹⁾. Под словом „граф“ всюду будем понимать обыкновенный граф.

В монографии ⁽²⁾ (гл. 9, п. 1) поставлена следующая задача: в каких случаях можно приписать рёбрам неориентированного графа такую ориентацию, чтобы он стал базисным графом частичного упорядочения? Графы, которые можно так ориентировать, назовем сильно базлируемыми, а соответствующие ориентации — сильно базлирующими.

В настоящей статье получены некоторые необходимые и достаточные условия для сильной базлируемости графа.

Дадим некоторые определения.

Будем говорить, что в орграфе $L = (X, U)$ вершина b достижима из вершины a , если в нем существует путь из вершины a в вершину b . Множество вершин орграфа $\bar{L} = (X, \bar{U})$, достижимых из вершины a обозначим через $D(a)$.

Будем говорить, что в орграфе $\bar{L} = (X, \bar{U})$ вершина b слабо достижима из вершины a , если существует дуга $\bar{u} = (\bar{c}\bar{d}) (\bar{u} \in \bar{U})$, после переориентации которой найдется простой путь, идущий из a в b и проходящей через $(\bar{d}\bar{c})$. Множество вершин орграфа $\bar{L} = (X, \bar{U})$, слабо достижимых из вершины a , обозначим через $\bar{D}(a)$.

Через $\varphi_a^+(L) (\varphi_a^-(L))$ обозначим одну из таких сильно базлирующих ориентаций графа $L = (X, U)$, при которой все дуги, инцидентные вершине a , исходят из нее (заходят в нее), а через $\varphi_{a(bc)}^+(L) (\varphi_{a(bc)}^-(L))$ — одну из таких ориентаций $\varphi_a^+(L) (\varphi_a^-(L))$, при которой ребро (bc) ориентировано от b к c .

Через $o(L)$ обозначим длину наименьшего цикла графа $L(X, U)$, а через $p(L)$ — наименьшее количество ребер, после удаления которых граф становится плоским.

Через $L[a]$ обозначим множество вершин графа $L = (X, U)$, смежных с $a \in X$ ($a \in L[a]$).

Будем говорить, что вершина a графа $L = (X, U)$ поглощает вершину $b \in X$ (или вершина b поглощается вершиной a), если $L[b] \subseteq L[a]$.

Множеством правильного сочленения графа $L = (X, U)$ назовем такое множество вершин $Y \subseteq X$, удаление которого приводит к увеличению числа непустых компонент связности.

k -частью графа $L = (X, U)$ назовем всякую его максимальную 3-связную часть $H = (Y, V)$ такую, что она не имеет поглощаемых вершин, и для любой $a \in Y$ множество $H[a]$ не является множеством правильного сочленения части $H = (Y, V)$.

Связный граф $L = (X, U)$ назовем критическим не сильно базиремым, если он не является сильно базиремым, но становится таковым после удаления любого ребра. Через K_n обозначим класс n -вершинных критических не сильно базиремых графов, а через Λ — класс обыкновенных графов, не содержащих треугольников. Можно показать, что имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. Для сильной базиремости графа $L = (X, U)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall a, b, c \in X [a \neq c \implies \exists \varphi_{a(bc)}^+(L)].$$

Следствие. Если граф $L' = (X', U')$, полученный из $L = (X, U)$ удалением какой-нибудь поглощаемой вершины, — сильно базиремый, то сильно базиремым будет и граф $L = (X, U)$.

Лемма 1. $\forall L \in \Lambda [r(L) \leq 0(L) - 3 \implies L \text{ — сильно базиремый}]$.

Следствие. Для сильной базиремости плоского графа $L = (X, U)$ необходимо и достаточно, чтобы $L \in \Lambda$.

Лемма 2. Если граф $L' = (X', U')$, полученный из $L = (X, U) \in \Lambda$ удалением какой-нибудь вершины a степени $r(a) \leq 2$, является сильно базиремым, то сильно базиремым будет и граф $L = (X, U)$.

Для доказательства леммы 2 достаточно рассмотреть случай, когда граф $L = (X, U)$ имеет вид $L = (X' \cup a; U' \cup (ab) \cup (ac))$. Придадим графу $L' = (X', U')$ какую-нибудь сильно базирующую ориентацию. Если при этой ориентации ни одна из вершин b и c не достижима из другой, то ориентируем ребра (ab) и (ac) в сторону вершины a , а если, допустим, вершина b достижима из вершины c , то ребрам (ab) и (ac) придадим ориентации: (ca) , (ab) . В результате получим сильно базирующую ориентацию для графа $L = (X' \cup a; U' \cup (ab) \cup (ac))$.

Из этой леммы и теоремы 1 непосредственно следует.

Лемма 3. Для любой пары несмежных вершин a и b сильно базиремого графа $L = (X, U)$ существуют ориентация $\varphi_a^+(L)$ ($\varphi_a^-(L)$), при которой ни одна из этих вершин не достижима из другой, и ориентация $\varphi_a^-(L)$, при которой вершина b не достижима, а также слабо не достижима из вершины a .

Лемма 4. Пусть все графы $L = L_0, L_1, \dots, L_q$ ($q \geq 1$), где L_k ($1 \leq k \leq q$), получается из L_{k-1} путем склеивания какой-нибудь пары вершин (если при этом появляются параллельные ребра, то они заменяются одним), принадлежат Λ . Если граф L_q сильно баззируемый, то и L является таковым.

Для доказательства леммы 4 достаточно рассмотреть случай, когда $q=1$. Ориентация $\varphi_{[ab]}^+(L_1)$ ($[ab]$ — вершина графа L_1 , полученная склеиванием вершин a и b графа L), существование которой следует из теоремы 1, будет сильно баззирующей и для графа $L=(X, U)$ (если в $L=(X, U)$ есть ребро (ab) , то его можно ориентировать произвольным образом).

Обратное же утверждение леммы 4 неверно. Можно привести пример сильно баззируемого графа, после склеивания любой пары вершин которого получается не сильно баззируемый граф.

Теорема 2. Для того, чтобы граф $L=(X, U)$ был сильно баззируемым, необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал Λ и каждая его k -часть была сильно баззируемой.

Доказательство. Необходимость теоремы очевидна.

Достаточность. Проведем индукцию по числу ребер. Для однореберных графов достаточность очевидна. Допустим, что она верна для всех графов, имеющих не более $m-1$ ребер, и рассмотрим m -реберный граф $L=(X, U) \in \Lambda$, каждая k -часть которого сильно баззируема.

Допустим, что граф $L=(X, U)$ имеет только одну непустую компоненту связности и не является k -частью (в противном случае достаточность теоремы была бы очевидной).

а) Граф $L=(X, U)$ не является 3-связным.

Следовательно, существуют подграфы $L_1=(X_1, U_1)$ и $L_2=(X_2, U_2)$ такие, что граф $L=(X, U)$ получается из них с помощью одной из следующих трех операций (рис. 1):

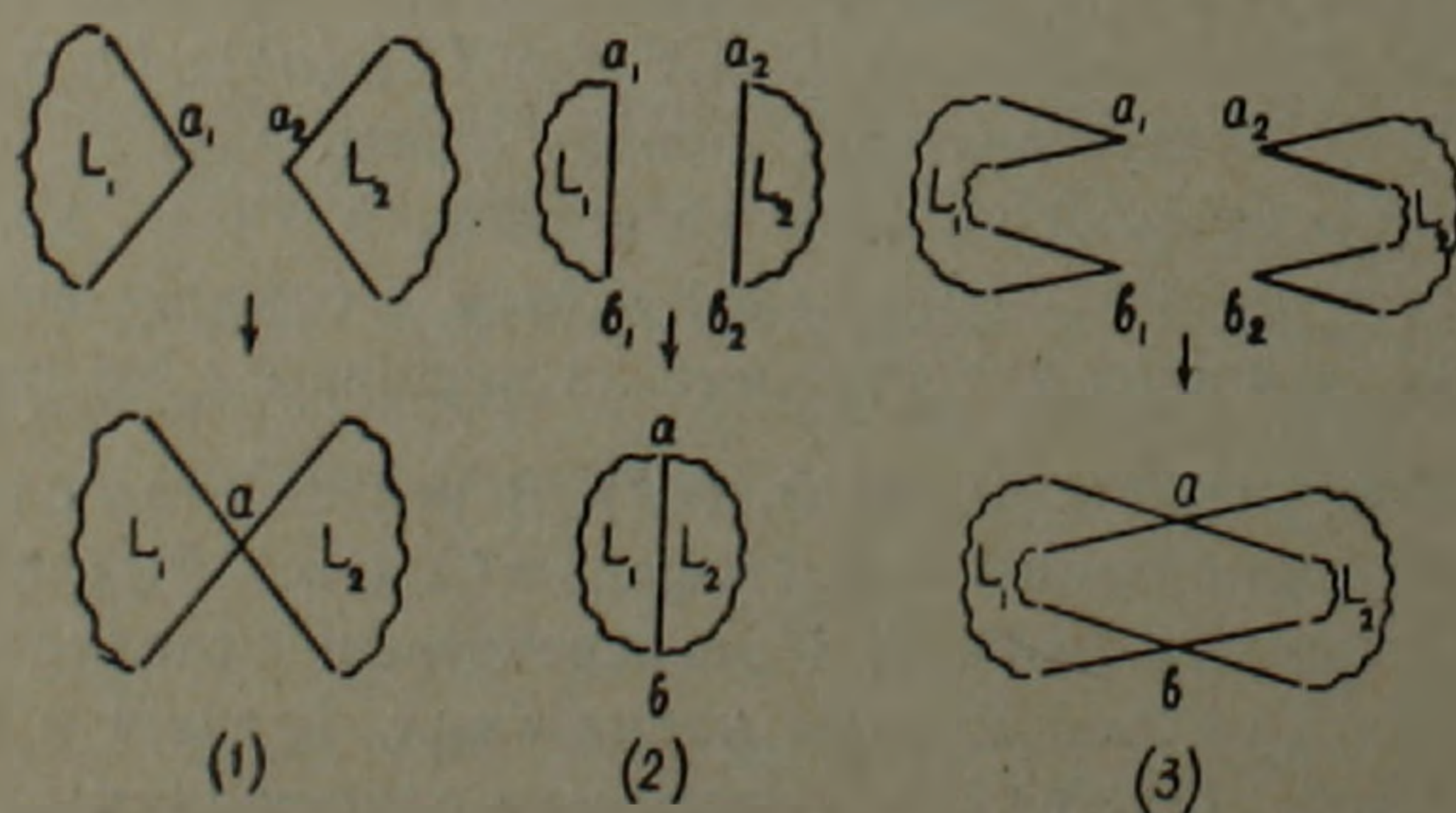


Рис. 1

По предположению индукции графы $L_1=(X_1, U_1)$ и $L_2=(X_2, U_2)$ сильно баззируемы. Если граф $L=(X, U)$ получается при помощи опе-

раций (1) или (2), то, придавая графам $L_i = (X_i, U_i) (i = 1, 2)$ ориентацию $\varphi_{a_i}^+(L_i)$ получим сильно базирующую ориентацию для графа $L = (X, U)$. Если же граф $L = (X, U)$ получается из графов $L_1 = (X_1, U_1)$ и $L_2 = (X_2, U_2)$ при помощи операции (3), то, придавая графам $L_i = (X_i, U_i) (i = 1, 2)$ такие сильно базирующие ориентации, при которых ни одна из вершин a_i и b_i не достижима из другой, получим сильно базирующую ориентацию для графа $L = (X, U)$.

б) Граф $L = (X, U)$ содержит поглощаемую вершину. В этом случае достаточность следует из теоремы 1.

в) В графе $L = (X, U)$ существует такая вершина a , что $L[a]$ является его множеством правильного сочленения.

Обозначим через $L_i = (X_i, U_i), 2 \leq i \leq p$, связные компоненты графа $L' = L(X \setminus L[a])$. По предположению подграфы $L'_i = (X_i \cup a \cup L[a]; U'_i) (2 \leq i \leq p)$ графа $L = (X, U)$ являются сильно базируемыми. Придавая этим графам ориентации $\varphi_{a_i}^+(L'_i) (2 \leq i \leq p)$ получим сильно базирующую ориентацию для графа $L = (X, U)$.

Следствие. Если граф $L = (X, U) \in \Lambda$ не имеет k -частей, то он является сильно базируемым.

Справедлива

Теорема 3. 1) $K_1 = K_2 = K_4 = \dots = K_{10} = \emptyset$;

2) $K_3 = \{F_3\}$; 3) $\forall n \geq 11 K_n \neq \emptyset$.

1) и 2) доказываются с помощью теоремы 4 из (3), 3) доказывается с помощью конструкции, которая будет опубликована в более общем виде.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Կ. Մ. ՄՈՍԵՍՅԱՆ

Ուժեղ բազիսացվող գրաֆների մասին

Օրենի մենագրությունում դրված է հետևյալ խնդիրը ((2), գլ. 9, § 1) ինչ-սլիսի՝ն պետք է լինի ոչ կողմնորոշված գրաֆը, որպեսզի հնարավոր լինի կողմնորոշման միջոցով այն դարձնել ինչ-որ մասնակի կարգավորման բազիսային գրաֆ: Այսպիսի գրաֆները կանվանենք ուժեղ բազիսացվող:

Աշխատանքում ստացված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ գրաֆի բազիսացման համար:

Գրաֆը կոչվում է կրիտիկական ոչ ուժեղ բազիսացվող, եթե այն ուժեղ բազիսացվող չէ, բայց դառնում է այդպիսին, ցանկացած կողմնորոշման հետո: K_n -ով նշանակվում է n գագաթ ունեցող կրիտիկական ոչ ուժեղ բազիսացվող գրաֆների դասը:

Օրէի խնդիրներէն մէկը (⁽²⁾, գլ. 9, խնդ. 3') ընդհանրացման լուծումը
ստանալու համար անհրաժեշտ էր իմանալ, թե ինչպիսի՞նք n -երի համար $K_n \neq \emptyset$:
Հետեւի թեորեմը տալիս է այդ հարցի պատասխանը.

- Թեորեմ՝ 1. $K_1 = K_2 = K_3 = \dots = K_{10} = \emptyset$.
2. $K_2 = |F_2|$; 3. $\forall n > 11 \quad K_n \neq \emptyset$.

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Շ Ո Ւ Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

1. А. А. Зыков, Теория конечных графов, 1. изд. «Наука», Новосибирск, 1969.
2. О. Оре, Теория графов, изд. «Наука», М., 1968 3 К. М. Мосесян, ДАН Арм ССР,
т. LIV, № 1 (1972).