

УДК 519.55

МАТЕМАТИКА

Н. Б. Енгибарян

Об интегральных уравнениях на полупрямой с разностными ядрами

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 13/XI 1971)

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода на полуосси ядрами, зависящими от разности аргументов, были предметом многочисленных исследований. Среди методов их решения особое место занимает метод Винера—Хопфа, наиболее полное и строгое изложение которого содержится в работе М. Г. Крейна ⁽¹⁾.

В связи с астрофизическими применениями, В. А. Амбарцумяном, В. В. Соболевым и др. ^(2, 3) был разработан метод решения класса уравнений, ядра которых зависят от модуля разности аргументов и представлены, как и свободные члены, в виде суперпозиции экспонент. Физической основой метода является принцип инвариантности В. А. Амбарцумяна. В применении к указанному классу уравнений этот метод имеет ряд преимуществ по сравнению с методом Винера—Хопфа.

В настоящей заметке метод Амбарцумяна обобщается на случай несимметричных разностных ядер. Некоторые выкладки сходны с соответствующими выкладками из ⁽³⁾.

Рассмотрим следующее уравнение

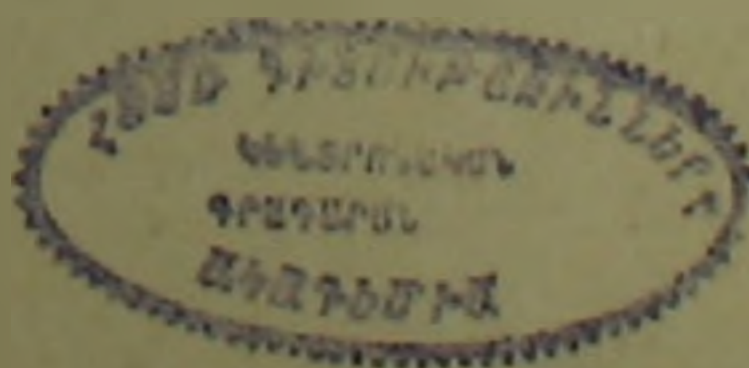
$$y(x, s) = e^{-xs} + \int_0^x K(x-t) y(t, s) dt, \quad (1)$$

ядро которого представлено в виде

$$K(x) = \int_a^b G(s) e^{-|x|s} ds \quad \text{при } x \geq 0 \quad (2)$$

$$0 \leq a < b \leq \infty$$

Относительно функций $G(s)$ предполагается, что $\forall \epsilon > 0 \ e^{-\epsilon s} G(s) \in L_1(a, b)$. На линии $x=t$ ядро $K(x-t)$ может иметь слабую особенность.



Сделанные предположения обеспечивают дифференцируемость функции $y(x, s)$ по x .

Дифференцируя (1) по x , после небольших выкладок получаем

$$\frac{\partial y(x, s)}{\partial x} = -se^{-xs} + \varphi^+(s)K'(x) + \int_0^x K(x-t) \frac{\partial y(t, s)}{\partial t} dt, \quad (3)$$

где

$$\varphi^+(s) = y(0, s); \quad (4)$$

Сравнивая уравнения (3) и (1) и учитывая (2) при $x > 0$, имеем

$$\frac{\partial y(x, s)}{\partial x} = -sy + \varphi^+(s)\Phi(x), \quad (5)$$

где

$$\Phi(x) = \int_a^b G^+(s') y(x, s') ds'. \quad (6)$$

Подставляя в (1) $x=0$ и учитывая (2), для $\varphi^+(s)$ имеем следующее выражение

$$\varphi^+(s) = 1 + \int_a^b G^-(s') \rho(s', s) ds', \quad (7)$$

где обозначено

$$\rho(s', s) = \int_0^x y(x, s) e^{-xs'} dx; \quad (8)$$

Применение к обеим частям уравнения (5) преобразования Лапласа дает:

$$p\rho(p, s) = -s\rho(p, s) + \varphi^+(s) \left[1 + \int_a^b G^+(s') \rho(p, s') ds' \right] \quad (9)$$

откуда

$$\rho(p, s) = \frac{\varphi^+(s)\varphi^-(p)}{s+p}, \quad (10)$$

где обозначено

$$\varphi^-(s) = 1 + \int_a^b G^+(s') \rho(s, s') ds'. \quad (11)$$

Подставляя в (7) и (11) вместо ρ его выражение из (7), для определения функций $\varphi^\pm(t)$ получаем следующую систему нелинейных функциональных уравнений, легко решаемую численно

$$\varphi^\pm(s) = 1 + \varphi^\pm(s) \int_a^b \frac{G^\mp(s') \varphi^\mp(s')}{s+s'} ds'. \quad (12)$$

В частном случае, когда $G^+(s) = G^-(s)$, функции φ^+ и φ^- совпадают и для их определения получается известное уравнение Ам-барцумяна

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s) \int_a^b \frac{\varphi(s') G(s')}{s + s'} ds'. \quad (13)$$

К системе (12) могут быть применены численные методы решения уравнения (13). Отметим, что функции

$$\bar{\varphi}^\pm(s) = G^\pm(s) \varphi^\pm(s) \quad (14)$$

удовлетворяют следующей системе

$$\bar{\varphi}^\pm(s) = G^\pm(s) + \bar{\varphi}^\pm(s) \int_a^b \frac{\bar{\varphi}^\pm(s')}{s + s'} ds'. \quad (15)$$

Следуя методу, предложенному В. В. Соболевым (3), систему (15) можно свести к отдельным линейным сингулярным уравнениям относительно $\bar{\varphi}^+$ и $\bar{\varphi}^-$. Умножая (15) на $\frac{1}{s - z}$ и интегрируя по s от a до b , получаем

$$\int_a^b \frac{\bar{\varphi}^\pm(s)}{s - z} ds = B^\pm(z) + \int_a^b \bar{\varphi}^\pm(s') ds' \int_a^b \frac{\bar{\varphi}^\pm(s)}{(s - z)(s + s')} ds, \quad (16)$$

где

$$B^\pm(z) = \int_a^b \frac{G^\pm(s)}{s - z} ds. \quad (17)$$

Интегралы понимаются в смысле главного значения Коши.

Принимая во внимание равенство

$$\int_a^b \frac{\bar{\varphi}^\pm(s')}{s + s'} dt' = 1 - \frac{G^\mp(s)}{\bar{\varphi}^\pm(s)},$$

вытекающее из (15), уравнение (16) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\bar{\varphi}^\pm(s)}{s - z} ds = B^\pm(z) + \left| 1 - \frac{G^\pm(z)}{\bar{\varphi}^\pm(z)} \right| \left| \int_a^b \frac{\bar{\varphi}^\pm(s)}{s - z} ds - 1 \right| + \\ + \int_a^b \frac{G^\mp(s)}{s' + z} ds', \end{aligned} \quad (18)$$

откуда получаем уравнение, решаемое в замкнутом виде (*)

$$A^{\pm}(z)\bar{\varphi}^{\pm}(z) = 1 - \int_a^b \frac{\bar{\varphi}^{\pm}(s)}{s-z} ds. \quad (19)$$

где

$$A^{\pm}(z) = \frac{1}{G^{\pm}(z)} \left[1 - \int_a^b \frac{G^{\pm}(s)}{s-z} ds - \int_a^b \frac{G^{\pm}(s)}{s+z} ds \right] \quad (20)$$

После определения функций $\varphi^{\pm}(s)$, функция $y(x, s)$, может быть определена следующими способами:

а) Обращением преобразования Лапласа. Функция $p(p, s)$, представляющая собой преобразование Лапласа по x от $y(x, s)$ (см. формулу (8)) по формуле (10) выражается через $\varphi^{+}(s)$ и $\varphi^{-}(s)$. Функции $\varphi^{\pm}(s)$, определенные в промежутке (a, b) , могут быть аналитически продолжены на правую полуплоскость комплексной плоскости s с помощью формулы

$$\varphi^{\pm}(s) = \left[1 - \int_a^b \frac{\bar{\varphi}^{\pm}(s')}{s+s'} ds' \right]^{-1}; \quad (21)$$

б) Решением уравнения Вольтерра. Из (5) получаем

$$y(x, s) = \varphi^{+}(s) \left[e^{-xs} + \int_0^x e^{-s(x-t)} \Phi(t) dt \right]. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (6), получаем уравнение в свертках относительно функции $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = L(x) + \int_0^x L(x-t) \Phi(t) dt, \quad (23)$$

где

$$L(x) = \int_a^b \bar{\varphi}^{+}(s) e^{-xs} ds. \quad (24)$$

Применение к уравнениям (22) и (23) преобразование Лапласа приводит к первому способу определения функции $y(x, s)$. Непосредственное же решение уравнения (23), позволяет ограничиться вещественными значениями аргументов, без выхода на комплексную плоскость.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Կիսաաուսնցի վրա տարբերական կորիզներով ինտեգրալ
հավասարումների մասին

Արգումենտների տարբերությունից կախված կորիզներով ինտեգրալ հա-
վասարումների լուծման՝ վ. 2. Համարաձույնանի կողմից մշակված մեթոդը
(2,3) տարածվում է ոչ սիմետրիկ կորիզներով հավասարումների վրա, Հավա-
սարման լուծումը բերվում է ֆունկցիոնալ հավասարումների որոնք իրենց
հերթին հանդում են սինդուլյար հավասարումների լուծմանը, Վերջիններս
լուծվում են փակ ածագով (4):

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն ՈՒ Ք Յ ՈՒ Ն

¹ М. Г. Крейн. УМН. XIII вып. 5 (83) (1958) ² В. А. Амбарцумян. Научные труды
т. I, Ереван, 1960. ³ В. В. Соболев. Курс теор. астрофизики. М., 1967. ⁴ Н. Н. Мусхели-
швили, СINGУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, М., 1968.