ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIV 1972 2

УДК 523.035.2

АСТРОФИЗИКА

Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян

Диффузное отражение резонансного излучения от полубесконечной среды

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 29/VII 1971)

К настоящему времени мы располагаем рядом работ, где выводятся и детально изучаются законы перераспределения резонансного излучения по частотам при различных механизмах уширения линии ([1, 2]). Однако задачи переноса излучения в частотах спектральной линии, ввиду их сложности, рассматривались обычно при упрощающем предположении о полном перераспределении по частотам. В этом предположении не учитывается зависимость функции перераспределения от угла рассеяния, с одной стороны, и наличие корреляции между частотами поглощенного и переизлученного квантов—с другой. Работами авторов ([3, 4]) было положено начало строгого рассмотрения задач некогерентного рассеяния, как с учетом, так и без учета зависимости функции перераспределения от угла рассеяния.

В настоящей работе мы рассмотрим задачу диффузного отражения света от однородной полубесконечной среды с учетом некогерентности и неизотропности элементарного акта рассеяния. Для решения задачи применяем принцип инвариантности В. А. Амбарцумяна, позволяющий свести решение задачи к некоторым функциональным уравнениям, являющимся обобщением уравнений для φ_l^m—функций, хорошо известных из теории неизотропного рассеяния ([5]).

Введем функцию $r(x', x, \gamma)$, представляющую собой функцию перераспределения по частотам при заданном угле рассеяния γ, где x' и x—безразмерные частоты, соответственно, поглощенного и переизлученного квантов. Для дальнейшего удобно ввести обозначение

$$\bar{r}(x', x, \gamma) = r(x', x, \gamma)\, p(\gamma),$$

где $p(\gamma)$—индикатриса рассеяния. Так же, как и в работе авторов ([4]), функцию $\bar{r}(x', x, \gamma)$ аппроксимируем суммой вида:

$$\bar{r}(x', x, \gamma) \approx \sum_{l=0}^{n} r_l(x', x)\, P_l(\cos\gamma) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} P_l(\cos\gamma) \sum_{k=1}^{N} \alpha_{lk}(x')\, \alpha_{lk}(x); \qquad (1)$$

В указанной работе построены функции $a_{ik}(x)$ в случае доплеровского уширения линии.

Для решения задач диффузного отражения света от полубесконечной среды достаточно определить функцию $\rho_1(x', x, \eta, \zeta, \varphi-\varphi_0)$, имеющую следующий вероятностный смысл: $\rho_1 dx d\eta d\varphi$ представляет собой вероятность того, что подающий на среду в направлении (ζ, φ_0) квант частоты x', после ряда рассеяний выйдет из среды в виде кванта с частотой, лежащей в интервале $x, x+dx$, и имеющего направление, заключенное в телесном угле $(\eta, \eta+d\eta; \varphi, \varphi+d\varphi)$.

Применением принципа инвариантности для функции $\rho(x', x, \eta, \zeta, \varphi-\varphi_0) = \frac{1}{\eta}\rho_1(x', x, \eta, \zeta, \varphi-\varphi_0)$ получаем уравнение

$$
\left[\frac{\alpha(x)}{\eta}+\frac{\alpha(x')}{\zeta}\right]\rho(x', x, \eta, \zeta, \varphi-\varphi_0) = \frac{\lambda}{4\pi\eta\zeta}\bar{r}(x', x, -\eta, \zeta, \varphi-\varphi_0)+
$$

$$
+\frac{\lambda}{4\pi\zeta}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^1 d\eta'\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x'', x, \eta, \eta', \varphi-\varphi')\bar{r}(x', x'', \eta', \zeta, \varphi'-\varphi_0)dx''+
$$

$$
+\frac{\lambda}{4\pi\eta}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^1 d\eta'\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x', x'', \eta', \zeta, \varphi'-\varphi_0)\bar{r}(x'', x, \eta, \eta', \varphi-\varphi')dx''+ \tag{2}
$$

$$
+\frac{\lambda}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^1 d\eta'\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x', x'', \eta', \zeta, \varphi'-\varphi_0)dx''\times
$$

$$
\times\int_0^{2\pi}d\varphi''\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x, x''', \eta, \eta'', \varphi-\varphi'')\bar{r}(x'', x''', -\eta'', \eta', \varphi''-\varphi')dx''',
$$

где $\alpha(x)$—контур коэффициента поглощения, а

$$
\bar{r}(x', x, \eta, \zeta, \varphi-\varphi_0)=\bar{r}(x', x, \gamma),
$$

причем

$$
\cos\gamma = \eta\zeta+\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\zeta^2}\cos(\varphi-\varphi_0);
$$

Из (1) имеем (⁶):

$$
\bar{r}(x', x, \eta, \zeta, \varphi-\varphi_0) = \sum_{m=0}^{n}(2-\delta_{0m})\times
$$

$$
\times\left\{\sum_{l=m}^{n}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\eta)P_l^m(\zeta)\sum_{k=1}^{N}a_{lk}(x')a_{lk}(x)\right\}\cos m(\varphi-\varphi_0). \tag{3}
$$

Функция ρ также представляется в виде суммы

$$
\rho(x', x, \eta, \zeta, \varphi-\varphi_0) = \sum_{m=0}^{n}(2-\delta_{0m})f_m(x', x, \eta, \zeta)\cos m(\varphi-\varphi_0). \tag{4}
$$

причем коэффициенты f_m определяются из следующих уравнений

$$f_m(x', x, \eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4}\left|\frac{\eta}{\alpha(x)} + \frac{\zeta}{\alpha(x')}\right|^{-1} \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=m}^{n} (-1)^{q+m} \times$$

$$\times \frac{(q-m)!}{(q+m)!}\, \omega_p^{mq}(\eta, x)\, \omega_p^{mq}(\zeta, x'), \tag{5}$$

$$\omega_k^{ml}(\eta, x) = \frac{\alpha_{lk}(x)}{\alpha(x)} P_l^m(\eta) + 2(-1)^{l+m} \frac{\eta}{\alpha(x)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{lk}(x')\, dx' \int_0^1 f_m(x', x, \eta, \eta') P_l^m(\eta')\, d\eta'. \tag{6}$$

Исключая из (5) и (6) функции f_m, для определения функций $\tilde{\omega}_k^{ml}(s, x)$:

$$\omega_k^{ml}(\eta, x) = \tilde{\omega}_k^{ml}\left(\frac{\eta}{\alpha(x)}, x\right) \tag{7}$$

получаем следующую систему функциональных уравнений:

$$\tilde{\omega}_k^{ml}(s, x) = \frac{\alpha_{lk}(x)}{\alpha(x)} P_l^m\, |s\alpha(x)| + \frac{\lambda}{2} s \sum_{q=m}^{n} (-1)^{l+q} \frac{(q-m)!}{(q+m)!} \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{N} \tilde{\omega}_p^{mq}(s, x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{lk}(x')\, \alpha(x')\, dx' \times$$

$$\times \int_0^{\frac{1}{\alpha(x')}} \frac{\tilde{\omega}_p^{mq}(s', x')\, P_l^m\, [s'\alpha(x')]}{s+s'}\, ds'. \tag{8}$$

Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$\tilde{\omega}_k^{ml}(s, x) = \frac{\alpha_{lk}(x)}{\alpha(x)} P_l^m\, [s\alpha(x)] + \frac{\lambda}{2} s \sum_{q=m}^{n} (-1)^{l+q} \frac{(q-m)!}{(q+m)!} \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{N} \tilde{\omega}_p^{mq}(s, x) \int_0^{\infty} \frac{\varphi_{pk}^{mql}(s')}{s+s'}\, ds', \tag{9}$$

где

$$\varphi_{kl}^{mlj}(s) = \int_{E(s)} \alpha_{jl}(x)\, \alpha(x)\, P_j^m\, |s\alpha(x)|\, \tilde{\omega}_k^{ml}(s, x)\, dx, \tag{10}$$

а множество $E(s)$ определяется следующим образом:

$$E(s) = \left\{x;\ \alpha(x) \geq \frac{1}{s}\right\}.$$

Теперь из (9) и (10) нетрудно получить систему функциональных уравнений для определения функций $\{\varphi_{kl}^{mij}\}$:

$$\varphi_{kl}^{mij}(s) = G_{kl}^{mij}(s) + \frac{\lambda}{2} s \sum_{q=m}^{n} (-1)^{j+q} \frac{(q-m)!}{(q+m)!} \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{N} \varphi_{pl}^{mqj}(s) \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi_{pk}^{mqi}(s')}{s+s'} ds', \tag{11}$$

(m — здесь параметр)
где

$$G_{kl}^{mij}(s) = \int_{E(s)} a_{jl}(x)\, a_{ik}(x)\, P_j^m |s\alpha(x)|\, P_i^m |s\alpha(x)|\, dx \tag{12}$$

Определение фукций $\{\varphi_{kl}^{mij}\}$ из системы (11) решает поставленную нами задачу о нахождении функции $\rho_1(x', x, \eta, \zeta, \varphi - \varphi_0)$. Для определения внутреннего светового режима нужно дополнительно решить некоторую систему линейных интегральных уравнений Вольтерра.

Заслуживает внимания рассмотрение того частного случая, когда функция $\alpha(x)$ четная, и четность функций $a_{ik}(x)$ совпадает с четностью i. Так обстоит дело, например, в случае доплеровского уширения линии и релеевской индикатрисы рассеяния ([4]). В этом случае функции G_{kl}^{mij} обращаются в нуль, если только $i+j$ — нечетно. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при нечетном $i+j$ функции φ_{kl}^{mij} также обращаются в нуль.

В том частном случае, когда функция $\bar{r}(x', x, \gamma)$ не зависит от γ (т. е., когда имеет место изотропное рассеяние, и функция перераспределения не зависит от угла рассеяния), система (11) принимает вид:

$$\varphi_{kl}(s) = G_{kl}(s) + \frac{\lambda}{2} s \sum_{p=1}^{N} \varphi_{pl}(s) \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi_{pk}(s')}{s+s'} ds', \tag{13}$$

где

$$G_{kl}(s) = \int_{E(s)} a_k(x)\, a_l(x)\, dx. \tag{14}$$

Система (13) является обобщением уравнения для H — функции теории полностью некогерентного рассеяния ([3]). Численные методы решения уравнения для H — функции могут быть перенесены к решению систем (11) и (13).

Сопоставление результатов данной работы и работы авторов ([3]) указывает на возможность применения принципа инвариантности Амбарцумяна к разработке метода эффективного решения систем Винера-Хопфа достаточно общей конструкции, когда элементы матрицы-ядра представлены в виде суперпозиции экспонент.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР
Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Ն. Բ. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ, Ա. Գ. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ

Ճառագայթման դիֆուզ անդրադարձումը անընդհատային գծում կիսաանվերջ միջավայրից

Դիտարկվում է անընդհատային գծում, կիսաանվերջ միջավայրից ճառագայթման դիֆուզ անդրադարձման խնդիրը՝ ցրման ատոմական ակտի ոչ կոհերենտության և ոչ իզոտրոպության հաշվառումով։ Համբարձումյանի ինվարիանտության սկզբունքի կիրառմամբ խնդիրը բերվում է որոշ ֆունկցիոնալ հավասարումների, որոնք հանդիսանում են հայտնի φ ֆունկցիաների նկատմամբ հավասարումների ընդհանրացումը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *D. G. Hummer*, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 125, 21 (1962). [2] *E. H. Avrett, D. G. Hummer*, Month. Not. Roy. Astron. Soc. 130, 295 (1965). [3] *Н. Б. Енгибарян*, «Астрофизика», т. 7, вып. 4 (1971). [4] *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, «Астрофизика», т. 8, вып. 1 (1972). [5] *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. I, Ереван, 1960. [6] *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956. [7] *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, «Наука», М., 1969.