

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Э. В. Белубекян

Изгиб защемленной по контуру прямоугольной пластинки с внутренним симметричным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапожижовым 26/XI 1971)

В настоящей работе решается задача об изгибе жестко заделанной по наружному контуру прямоугольной пластинки, ослабленной внутренним симметричным разрезом, под действием сплошной поперечной нагрузки.

Аналогичная задача, когда наружный контур пластинки свободно оперт, исследовалась в работе (1).

Решение задачи, с использованием метода „парных“ рядов-уравнений, сводится к совокупности трех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что полученные бесконечные системы квазивполне регулярны, а их свободные члены стремятся к нулю с возрастанием индекса.

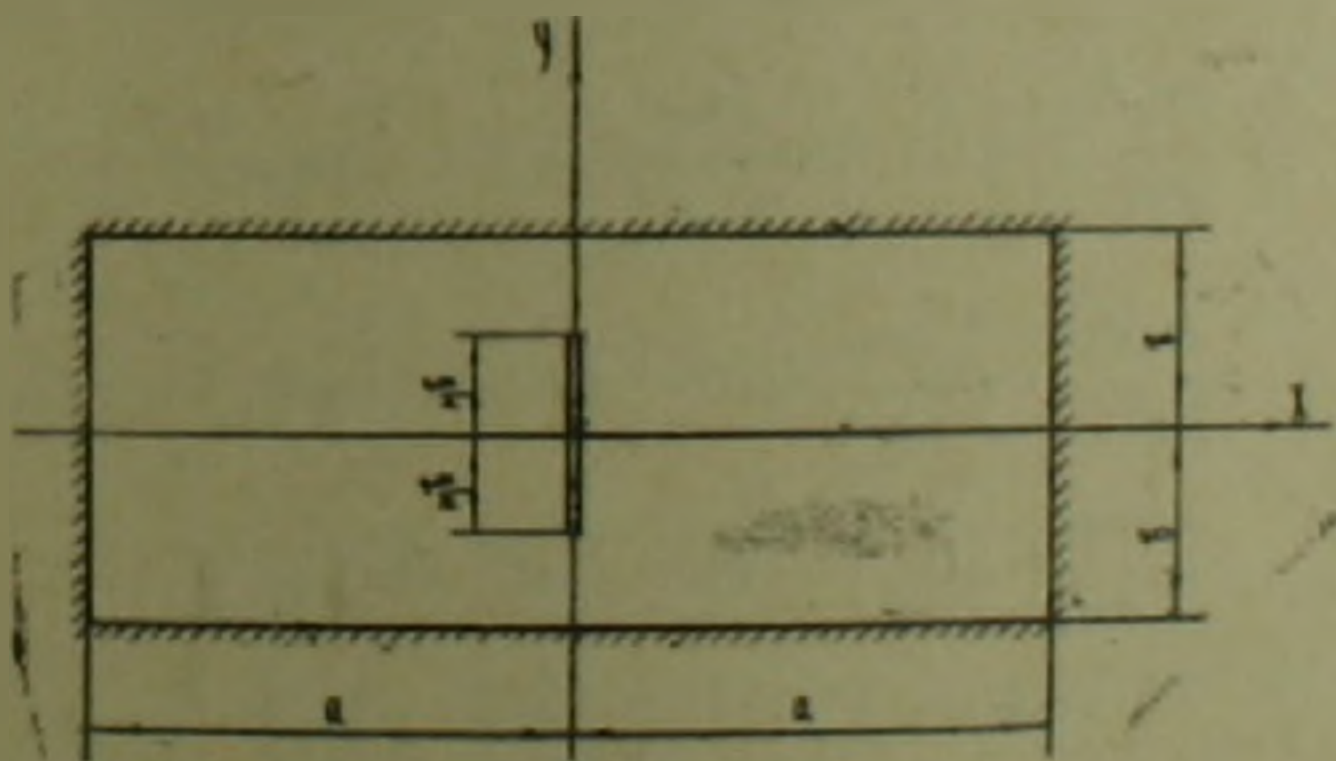


Рис. 1

1. Рассматривается защемленная по контуру прямоугольная пластинка размерами $2a \times 2b$, ослабленная симметричным (относительно осей симметрии x и y прямоугольника) разрезом длины $2b'(0 < b' < b)$, под действием симметрично относительно осей x и y непрерывно распределенной нагрузки p (рис. 1).

Ввиду симметрии задачи относительно осей x и y , решение ее, удовлетворяющее дифференциальному уравнению упругой поверхности пластинки

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{D} \quad (1.1)$$

будем искать для области, занимающей четверть пластинки. При этом заделку на контуре заменим свободным опиранием с приложением распределенных по контуру изгибающих моментов M_1 и M_2 , значения которых подберем так, чтобы удовлетворялись условия

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=a; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y=b \quad (1.2)$$

Представив функции, выражающие распределение изгибающих моментов M_1 и M_2 , в виде рядов

$$M_1 = \sum_0^{\infty} H_k \cos \beta_k x, \quad M_2 = \sum_0^{\infty} M_k \cos \alpha_k y \quad (1.3)$$

где

$$\alpha_k = \frac{\pi(2k+1)}{2b}, \quad \beta_k = \frac{\pi(2k+1)}{2a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

граничные условия задачи можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} w &= 0, \quad M_1 = \sum_0^{\infty} H_k \cos \beta_k x \quad \text{при } y=b \\ w &= 0, \quad M_2 = \sum_0^{\infty} M_k \cos \alpha_k y \quad \text{при } x=a \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} &= 0 \quad \text{при } x=0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{при } x=0, 0 < y < \mu b \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x=0, \mu b < y < b \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x^2} = 0 \quad \text{при } y=0 \quad (1.6)$$

Функция прогибов w , удовлетворяющая уравнению (1.1) и условиям (1.6), принимается в виде

$$w = f(y) + \frac{1}{D} \sum_0^{\infty} [A_k \operatorname{ch} \alpha_k x + B_k \operatorname{sh} \alpha_k x + C_k x \operatorname{ch} \alpha_k x +$$

$$+ D_k x \operatorname{sh} \alpha_k x] \cos \alpha_k y + \frac{1}{D} \sum_0^{\infty} [E_k \operatorname{ch} \beta_k y + G_k y \operatorname{sh} \beta_k y] \cos \beta_k x. \quad (1.7)$$

где $f(y)$ — частное решение уравнения (1.1)

$$f(y) = \frac{1}{D} \sum_0^{\infty} \frac{a_k}{\alpha_k^4} \cos \alpha_k y \quad (1.8)$$

a_k — коэффициенты разложения функции нагрузки p в ряд Фурье

$$p = \sum_0^{\infty} a_k \cos \alpha_k y, \quad a_k = \frac{2}{b} \int_0^b p \cos \alpha_k y dy. \quad (1.9)$$

Здесь, для простоты, принято, что нагрузка p изменяется только в направлении оси y .

Удовлетворение граничных условий (1.5) приводит к следующим «парным» рядам-уравнениям для определения коэффициентов C_k

$$\sum_0^{\infty} C_k \left(k + \frac{1}{2} \right) (1 - N_k) \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi = g(\varphi) \quad (0 < \varphi < \beta) \quad (1.10)$$

$$\sum_0^{\infty} C_k \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi = 0 \quad (\beta < \varphi < \pi),$$

где приняты обозначения

$$N_k = \frac{1 + e^{-2\alpha_k a} - 2\gamma \alpha_k a}{2 \operatorname{ch}^2 \alpha_k a}, \quad \gamma = \frac{1 - \nu}{3 + \nu} \quad (1.11)$$

$$g(\varphi) = \frac{b}{\pi(3 + \nu)} \left[\sum_0^{\infty} \frac{M_k}{\operatorname{ch} \alpha_k a} \left[(1 - \nu) \frac{\alpha_k a}{2} \operatorname{th} \alpha_k a - 1 \right] \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi - \right. \\ \left. - \sum_0^{\infty} \frac{H_k}{\operatorname{ch} \beta_k b} \left[\left(\nu + \frac{1 - \nu}{2} \beta_k b \operatorname{th} \beta_k b \right) \operatorname{ch} p_k \varphi - \frac{b}{\pi} \frac{\beta_k (1 - \nu)}{2} \varphi \operatorname{sh} p_k \varphi \right] - \right. \\ \left. - \sum_0^{\infty} \frac{a_k}{\alpha_k^2} \left[\nu + \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_k a} \left(\frac{1 - \nu}{2} \alpha_k a \operatorname{th} \alpha_k a - \nu \right) \right] \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi \right] \quad (1.12)$$

$$\varphi = \frac{\pi y}{b}, \quad \beta = \pi \pi, \quad p_k = \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{b}{a}. \quad (1.13)$$

Пользуясь методом, разработанным в работе (2), и принимая обозначения

$$X_k = \frac{2\pi \alpha_k}{1 - \nu} C_k, \quad Y_k = M_k + X_k \frac{(1 - \nu) \alpha_k a}{\pi \operatorname{ch} \alpha_k a} \frac{n_k}{m_k}, \quad Z_k = \frac{a}{b} H_k \quad (1.14)$$

где

$$n_k = \operatorname{th} \alpha_k a - \frac{2}{\alpha_k a (1 - \nu)}, \quad m_k = \operatorname{th} \alpha_k a + \frac{\alpha_k a}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k a} \quad (1.15)$$

„парные“ ряды (1.10) можно привести к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$X_n = \sum_0^{\infty} X_k a_{kn}^{(1)} + \sum_0^{\infty} Y_k b_{kn}^{(1)} + \sum_0^{\infty} Z_k d_{kn}^{(1)} + c_n^{(1)}, \quad (1.16)$$

где

$$a_{kn}^{(1)} = \left(n + \frac{1}{2} \right) N_k^* J_{kn}; \quad (1.17)$$

$$b_{kn}^{(1)} = \left(n + \frac{1}{2} \right) Q_k J_{kn}; \quad (1.18)$$

$$d_{kn}^{(1)} = - \frac{\pi (2n+1) b}{a (1-\nu)(3+\nu) \operatorname{ch} \beta_k b} \left[\left(\nu + \frac{1-\nu}{2} \beta_k b \operatorname{th} \beta_k b \right) I_{kn}^{(1)} - \right. \\ \left. - \frac{1-\nu}{2\pi} \beta_k b I_{kn}^{(2)} \right]; \quad (1.19)$$

$$c_n^{(1)} = - \frac{\pi (2n+1)}{(1-\nu)(3+\nu)} \sum_0^{\infty} \frac{a_k}{a_k^2} \left[\nu + \frac{1}{\operatorname{ch} a_k a} \left(\frac{1-\nu}{2} a_k a \operatorname{th} a_k a - \nu \right) \right] J_{kn};$$

$$N_k^* = N_k - \frac{2}{3+\nu} \cdot \frac{a_k a}{\operatorname{ch}^2 a_k a} \cdot \frac{n_k}{m_k}; \quad (1.21)$$

$$Q_k = \frac{2\pi}{(1-\nu)(3+\nu) \operatorname{ch} a_k a} \left(\frac{1-\nu}{2} a_k a \operatorname{th} a_k a - 1 \right); \quad (1.22)$$

$$J_{kn} = \int_0^\pi P_k(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta; \quad (1.23)$$

$$I_{kn}^{(1)} = \int_0^\pi P_{-1/2+1/2}(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta; \quad (1.24)$$

$$I_{kn}^{(2)} = \int_0^\pi W_k(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta; \quad (1.25)$$

$P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра.

Здесь использована формула интегрального представления функций Лежандра с комплексным индексом ⁽²⁾

$$P_{-1/2+1/2}(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{ch} p_k \varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi \quad (1.26)$$

и принято обозначение

$$W_k(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\varphi \operatorname{sh} p_k \varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi. \quad (1.27)$$

Удовлетворяя условиям (1.2), с использованием обозначений (1.14) и разложений функций $\operatorname{ch} a_k x$, $\operatorname{sh} a_k x$, $x \operatorname{ch} a_k x$, $x \operatorname{sh} a_k x$ в ряды Фурье по $\cos \beta_n x$ и функций $\operatorname{ch} \beta_k y$, $y \operatorname{sh} \beta_k y$ — по $\cos \alpha_n y$, получаем следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений:

$$Y_n = \sum_0^{\infty} Z_k a_{kn}^{(2)} + c_n^{(2)}; \quad (1.28)$$

$$Z_n = \sum_0^{\infty} X_k a_{kn}^{(3)} + \sum_0^{\infty} Y_k b_{kn}^{(3)} + c_n^{(3)}, \quad (1.29)$$

где

$$a_{kn}^{(2)} = - \frac{4(-1)^{k+n} \alpha_k^2 \beta_k}{a m_n (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}; \quad (1.30)$$

$$c_n^{(2)} = - \frac{a_n}{m_n \alpha_n^2} \left(\operatorname{th} \alpha_n a - \frac{a_n a}{\operatorname{ch}^2 \alpha_n a} \right); \quad (1.31)$$

$$a_{kn}^{(3)} = \frac{2 \beta_n (-1)^k}{\pi b q_n (\alpha_k^2 + \beta_n^2)^2} [(\beta_n^2 + \nu \alpha_k^2) + \\ + \frac{2(1-\nu)(-1)^n \alpha_k^2 \beta_n a}{\operatorname{ch} \alpha_k a} \frac{n_k}{m_k}]; \quad (1.32)$$

$$b_{kn}^{(3)} = - \frac{4}{b q_n} (-1)^{n+k} \frac{\alpha_k \beta_n^2}{(\alpha_k^2 + \beta_n^2)^2}; \quad (1.33)$$

$$c_n^{(3)} = - \frac{2}{b q_n} (-1)^n \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k a_k \alpha_k}{(\alpha_k^2 + \beta_n^2)^2}; \quad (1.34)$$

$$q_n = \operatorname{th} \beta_n b + \frac{\beta_n b}{\operatorname{ch}^2 \beta_n b}. \quad (1.35)$$

Таким образом решение задачи сводится к определению коэффициентов X_k , Y_k , Z_k из совокупности трех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (1.16), (1.28) и (1.29).

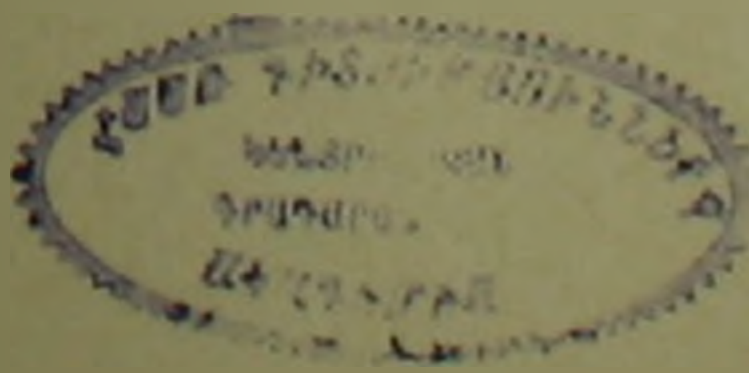
Для сумм $S_n^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) модулей коэффициентов при неизвестных каждой из бесконечных систем (1.16), (1.28) и (1.29) получают оценки

$$S_n^{(i)} \leq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad n > n_0. \quad (1.36)$$

Для свободных членов этих систем из выражений (1.20), (1.31), (1.34) нетрудно получить оценки

$$c_n^{(1)} = O(n^{-1/2}), \quad c_n^{(2)} = O(n^{-2}), \quad c_n^{(3)} = O(n^{-2}). \quad (1.37)$$

Таким образом, согласно оценкам (1.36) и (1.37), бесконечные системы (1.16), (1.28) и (1.29) квазивполне регулярны, а их свободные члены ограничены сверху и стремятся к нулю с возрастанием индекса.



Отметим также, что аналогично работе (1), выделяя главную часть ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(k + \frac{1}{2}\right) \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \varphi$ на участке (β, π) , можно получить выражения изгибающих моментов M_x и M_y на линии разреза ($x=0$) с выделенными особенностями у концов разреза. При этом, также как и в (1), они будут иметь у концов разреза $\varphi = \beta + 0$ ($y = \mu\beta + 0$) особенность порядка $(\cos \beta - \cos \varphi)^{-1/2}$.

2. В качестве числового примера рассматривается защемленная по внешнему контуру квадратная пластинка ($a=b$), с симметричным разрезом, длина которой равна половине ширины пластинки $\left(\mu = \frac{1}{2}\right)$, под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки $p = \text{const}$, при $\nu = 0,25$.

Вычислены значения w и изгибающих моментов M_x и M_y на линии разреза ($x=0$), которые приведены в виде эпюр на рис. 2. В точке $x=a$, $y=0$ вычислен опорный изгибающий момент $M_x = -0,281 pb^2$.

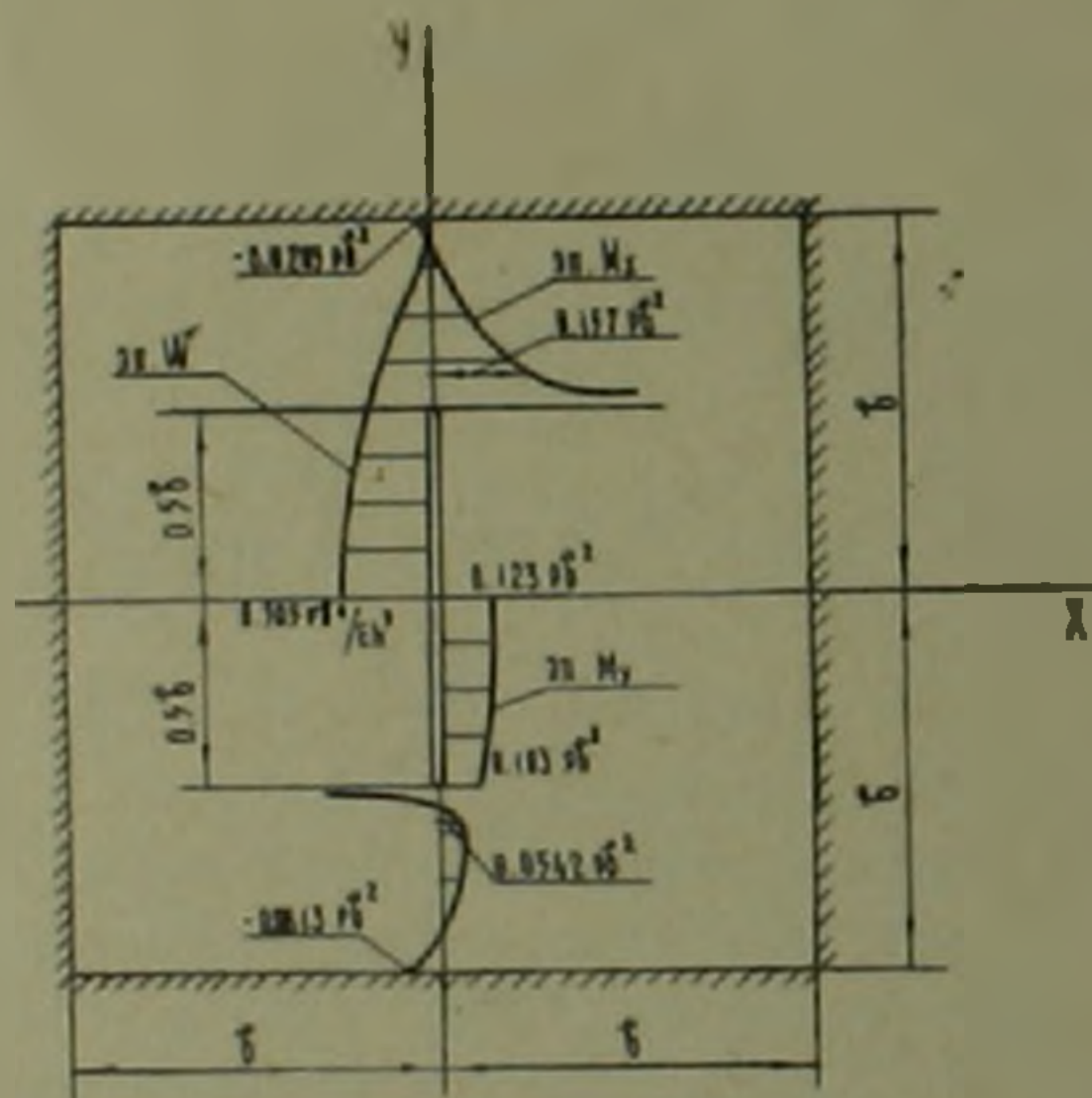


Рис. 2

Для выяснения влияния заделки и наличия разреза на напряженно-деформированное состояние пластинки, полученные здесь результаты сравним с результатами, полученными для свободно опертой квадратной пластинки с симметричным разрезом той же длины (1) и защемленной по контуру квадратной пластинки без разреза (4) при $p = \text{const}$ и $\nu = 0,25$.

Эти сравнения показывают, что наличие разреза в защемленной пластинке увеличивает наибольший прогиб на 120%, а опорные моменты: M_x — в середине стороны пластинки, параллельной разрезу ($x=a$, $y=0$), увеличивается на 35%, M_y — в середине другой стороны пласт-

тинки ($x=0$, $y=b$), уменьшается на 67%. В центре пластинки изгибающий момент M_y увеличивается на 40%.

Благодаря наличию заделки в квадратной пластинке с разрезом, наибольшие прогибы уменьшаются на 50%, величина изгибающего момента M_y в центре пластинки уменьшается на 50%, а величина M_x в точке $x=0$, $y=0,6b$ уменьшается на 33%.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Է. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

Եզրագծով ամրակցված համաչափ ճախով ուղղանկյուն սալի ծոռում

Աշխատանքում դիտարկվում է եզրագծով կոշտ ամրակցված ուղղանկյուն սալի ծոռում համաչափ բաշխված բևեռի ազդեցության տակ, երբ սալն ունի ներքին համաչափ ճեղք:

Խնդրի լուծումը, օգտագործելով «զույգ շարքեր» հավասարումների հանակր, բերվում է երեք հանրահաշվական գծային հավասարումների անվերջ սխեմաների: Ապացուցվում է, որ ստացված անվերջ սխեմաները կվազիլի-ովին ռեզոլյար են, իսկ նրանց ազատ անդամները ձգտում են զրոյի ինդեքսի մեծացմանը դուրընթաց:

Բերված է թվային օրինակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ե Ն Ա Ր Զ Ա Ր Ն

- ¹ Э. В. Белубекян, «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. XXI, № 2 (1968).
² А. А. Баблоян, ДАН Арм. ССР, т. 39, № 3 (1964). ³ И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962. ⁴ Д. В. Вайнберг, Е. Д. Вайнберг, Пластинки, диски, балки-стенки, Госстройиздат УССР, Киев, 1959.