ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIV 1972 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

А. Г. Маркосян

## Некоторые теоремы о декартовом произведении графов

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 28/IX 1971)

В настоящей статье доказаны теоремы о внутренне устойчивых множествах и числе внутренней устойчивости, о полном сжато-сохранном отображении; получены верхние оценки числа внутренней устойчивости. В дальнейшем мы будем придерживаться терминологии и обозначений работ [1,2].

Пусть дан граф $G=(X, U)$ и $S_G$ некоторое внутренне устойчивое множество, содержащее наибольшее число элементов: $|S_G|=\alpha(G)$. Однозначное отображение $\sigma$, переводящее множество $X_\sigma \subseteq X$ в себя, называется **с о х р а н н ы м**, если

$$y \neq x,\ y \overline{\in} \Gamma x \to \sigma(y) \neq \sigma(x), \quad \sigma(y) \overline{\in} \Gamma \sigma(x)$$

Ясно, что это отображение сохраняет несмежность вершин. Сохранное отображение называется **с ж а т о - с о х р а н н ы м** относительно $S$, если $S=\sigma(X_\sigma)=\{\sigma(x)/x \in X_\sigma\}$ — внутренне устойчивое множество. Сжато-сохранное отображение называется **п о л н ы м**, если $X_\sigma = X$. Сжато-сохранное отображение $\sigma'$ будем называть **м а к с и м а л ь н ы м**, если $|X_{\sigma'}| = \max\limits_{\sigma} |X_\sigma|$. Скажем, вершина $x$ графа $G$ не сжимается при сжато-сохранном отображении $\sigma$, если $x \overline{\in} X_\sigma$. Число таких вершин при отображении $\sigma$ обозначим через $\varepsilon(\sigma)$, а через $\varepsilon(G)=\min\limits_{\sigma} \varepsilon(\sigma)$. Будем говорить, что граф $G$ имеет $\varepsilon(G)$ **н е с ж и м а е м ы х** точек.

Можно доказать следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. *Если граф $G$ имеет полное сжато-сохранное отображение $\sigma_G$ относительно некоторого внутренне устойчивого множества $S_G$, то он имеет полное сжато-сохранное отображение $\sigma'_G$ относительно любого внутренне устойчивого множества $S'_G$.*

Из этой теоремы следует, что если нас интересует только существование полного сжато-сохранного отображения в данном графе, то можно не указывать относительно какого множества оно взято.

В связи с равенством

$$\alpha(G \times H) = \alpha(G) \cdot \alpha(H) \tag{1}$$

важно знать, имеет ли данный граф полное сжато-сохранное отображение или нет. Следующая теорема устанавливает связь между существованием полного сжато-сохранного отображения в графах $G$ и $H$ с одной стороны, и в декартовом произведении графов $G$ и $H$, с другой стороны.

Теорема 2. *Если графы $G = (X, U)$ и $H = (Y, V)$ обладают полным сжато-сохранным отображением, то их декартово произведение также обладает полным сжато-сохранным отображением.*

Представляет интерес следующий вопрос: имеет ли полное сжато-сохранное отображение граф, обладающий единственным внутренне устойчивым множеством. Ответ на данный вопрос отрицателен. На рис. 1 приведен пример графа, имеющего единственное внутренне устойчивое множество $S_0 = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ и не имеющего сжато-сохранного отображения: $\varepsilon(G) = 1$. Легко убедиться, что $S_0$—единственное внутренне устойчивое множество. А полного сжато-сохранного отображения граф не имеет, так как к каждой вершине $g_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ можно сжать только одну вершину, вследствие отсутствия треугольников.

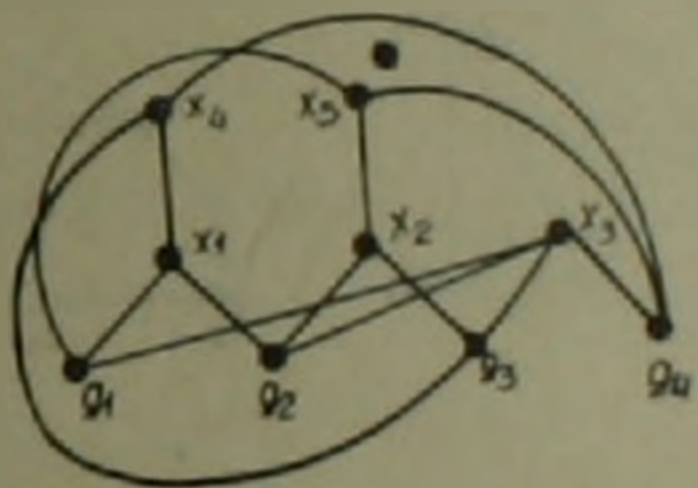


Рис. 1

В дальнейшем нам понадобится вышеприведенный пример.

*Верхние оценки числа внутренней устойчивости декартова произведения.* Известно, что нижняя оценка числа внутренней устойчивости в декартовом произведении двух графов $G$ и $H$ является $\alpha(G) \cdot \alpha(H)$ и улучшить эту оценку в терминах $\alpha(G)$ и $\alpha(H)$ в общем случае невозможно. К сожалению, верхней оценки, имеющей простой вид, еще не найдено. Здесь мы получим верхнюю оценку, которая имеет довольно простой вид, и улучшить эту оценку в общем случае нельзя.

Теорема 3. $\alpha(G \times H) \leqslant \min\{[\alpha(G) + \varepsilon(G)] \cdot \alpha(H), \ [\alpha(H) + \varepsilon(H)] \cdot \alpha(G)\}$.

Доказательство. Если заметить, что $\alpha(G \times H) = \alpha(H \times G)$, то достаточно доказать справедливость одного из неравенств.

$$\alpha(G\times H)\leqslant(\alpha(G)+\varepsilon(G))\cdot\alpha(H); \tag{2}$$

$$\alpha(G\times H)\leqslant(\alpha(H)+\varepsilon(H))\cdot\alpha(G);$$

Докажем неравенство (2).

Для этого возьмем некоторое максимальное сжато-сохранное отображение $s_0$ в графе $G$ и все ребра, которые инцендентны несжимающимся вершинам, уничтожим. Полученный граф обозначим через $G^-$. Из построения графа $G$ очевидно, что

$$\alpha(G\times H)\leqslant\alpha(G^-\times H) \tag{2*}$$

Но $\alpha(G^-)=\alpha(G)+\varepsilon G$, и граф $G^-$ уже имеет полное сжато-сохранное отображение, из теоремы Шеннона ([2,3]) следует $\alpha(G^-\times H)=\alpha(G^-)\cdot\alpha(H)$. Подставив в последнее равенство значение $\alpha(G^-)$, получим

$$\alpha(G^-\times H)=(\alpha(G)+\varepsilon(G))\cdot\alpha(H)$$

Из последнего равенства и из неравенства (2*) получается (2). Теорема доказана.

На рис. 2. приведен пример двух графов $G=(X, U)$ и $H=(Y, V)$, который показывает, что оценку (2) в общем случае улучшить невозможно.

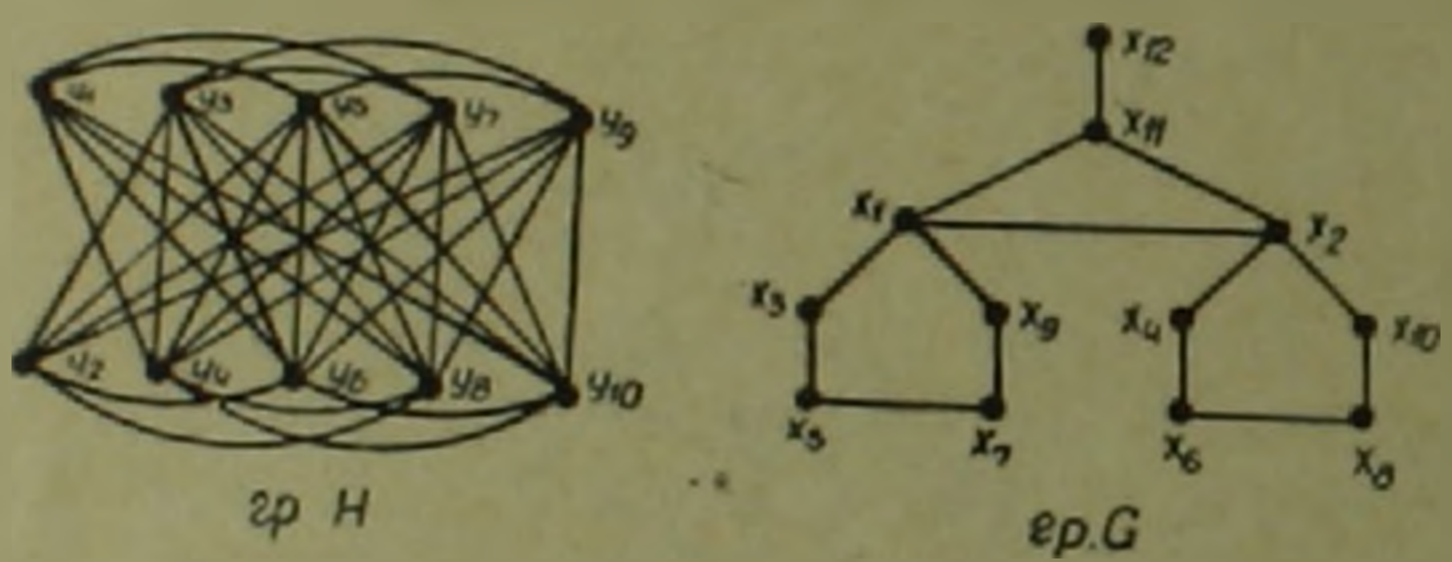


Рис. 2

Для этих графов $\alpha(G\times H)=(\alpha(G)+\varepsilon(G))\cdot\alpha(H)$. Действительно, легко убедиться, что $\alpha(G)=5$, $\varepsilon(G)=1$, $\alpha(H)=2$. А для графа $G\times H$ множество $S_{G\times H}=\{x_{11}y_1, x_{12}y_2, x_1y_1, x_3y_3, x_5y_5, x_7y_7, x_9y_9, x_2y_2, x_4y_4, x_6y_6, x_8y_8, x_{10}y_{10}\}$ внутренне устойчиво и содержит $(\alpha(G)+\varepsilon(G))\cdot\alpha(H)=(5+1)2=12$ элементов. Значит,

$$\alpha(G\times H)\geqslant|S_{G\times H}|=(\alpha(G)+\varepsilon(G)\cdot\alpha(H)$$

Из оценки (2) получается

$$\alpha(G\times H)=(\alpha(G)+\varepsilon(G))\cdot\alpha(H)$$

Так как оценку (2) нельзя улучшить с помощью параметров $\alpha(G)$, $\alpha(H)$, $\varepsilon(G)$, $\varepsilon(H)$, мы получим более точную оценку, если введем параметр $\alpha_1(G)$, $\alpha_1(H)$, где $\alpha_1(G)$—наименьшее число таких полных подграфов $G_1, G_2, \cdots G_{\alpha_1(G)}$ графа $G$, что $G=\bigcup\limits_{i=1}^{\alpha_1(G)}G_i$.

Аналогичным образом определяется $\alpha_1(H)$ для графа $H$.

Тогда легко показать, что

$$\alpha(G\times H)\leqslant\min\{\alpha_1(G)\cdot\alpha(H),\ \alpha(G)\cdot\alpha_1(H)\} \tag{3}$$

Очевидно, что $\alpha_1(G)\leqslant\alpha(G)+\varepsilon(G)$ и $\alpha_1(H)\leqslant\alpha(H)+\varepsilon(H)$. А это означает, что оценки (3) точнее, чем (2). В частности, если $G=H$, то из (3) получим $\alpha(G^2)\leqslant\alpha_1(G)\cdot\alpha(G)$, $\alpha(G^n)\leqslant\alpha_1^{n-1}(G)\cdot\alpha(G)$. Емкостью графа называется $\theta=\sup(\alpha(G^n))^{1/n}$, а пропускной способностью канала, смежностным графом ([3]) (граф сигналов ([4])) которого служит граф $G$, $C_0=\log_2\theta$. Для $\theta$ и $C_0$ получим

$$\theta\leqslant\alpha_1(G),\ C_0\leqslant\log_2\alpha_1(G) \tag{*}$$

Сейчас мы сформулируем теорему для простых циклов нечетной длины и для произвольного графа, которая дает более точную оценку.

Теорема 4. *Если граф $G$ простой цикл длины $2k+1$, а $H$ — произвольный граф, то*

$$\alpha(G\times H)\leqslant\alpha(G)\cdot\alpha(H)+\frac{1}{2}[\alpha(H)] \tag{4}$$

Доказательство этой теоремы опускаем, так как она доказывается точно так же, как и теорема 1 в работе ([5]).

Ясно, что из (4) следует, что

$$\alpha(G\times H)\leqslant\alpha(H)\,\frac{2\alpha(G)+1}{2}$$

При $G=H$

$$\alpha(G^2)\leqslant\alpha(G)\cdot\frac{2\alpha(G)+1}{2}$$

и

$$\alpha(G^n)\leqslant\alpha(G)\cdot\left(\frac{2\alpha(G)+1}{2}\right)^{n-1}$$

Отсюда

$$\theta(G)\leqslant\frac{2\alpha(G)+1}{2},\quad C_0\leqslant\log_2\frac{2\alpha(G)+1}{2} \tag{**}$$

Для $G$ — простого цикла нечетной длины (*) дает $\theta(G)\leqslant\alpha(G)+1$, $C_0\leqslant\log_2(\alpha(G)+1)$. Для пятиугольника $\alpha(G)=2$, $\alpha_1(G)=3$.

Из (*) получаем $\theta(G)\leqslant 3$, $C_0\leqslant\log_2 3$, а из (**) — $\theta(G)\leqslant\frac{5}{2}$, $C_0\leqslant\log_2\frac{5}{2}$.

Последняя оценка для $C_0$ совпадает с оценкой Шеннона.

*О теореме, обратной теореме Шеннона.* Обозначим через $L$-класс пар графов $(G, H)$, для которых $\alpha(G\times H)=\alpha(G)\cdot\alpha(H)$, а через $L_*$-класс пар $(G, H)$, для которых хотя бы один обладает полным сжато-сохранным отображением. Из теоремы Шеннона следует, что $L_*\subseteq L$.

Теорема 5. *Если графы $G=(X, U)$ и $H=(Y, V)$ имеют единственные внутренне-устойчивые множества $S_G$ и $S_H$ соответственно и по одной несжимающейся вершине: $\varepsilon(H)=\varepsilon(H)=1$, то $\alpha(G\times H)=\alpha(G)\cdot\alpha(H)$.*

Доказательство. Пусть $S_G=\{g_1, g_2, \cdots, g_{\alpha(G)}\}$ и $S_H=\{h_1, h_2, \cdots, h_{\alpha(H)}\}$. Возьмем максимальные сжато-сохранные отображения $\sigma_G$ и $\sigma_H$ в графах $G$ и $H$, и пусть $g_0$ и $h_0$ несжимающиеся вершины при этих отображениях; $X_0=X\setminus\{g_0\}$, $Y_0=Y\setminus\{h_0\}$. Обозначим через

$$X_i=\{x/x\in X, \sigma_0(x)=g_i\},\quad i=1, 2,\cdots, \alpha(G)$$

$$Y_j=\{y/y\in Y, \sigma_H(y)=h_j\},\quad j=1, 2,\cdots, \alpha(H)$$

Ясно, что $X_0=\bigcup\limits_{i=1}^{\alpha(G)} X_i$, $Y_0=\bigcup\limits_{j=1}^{\alpha(H)} Y_j$. Пусть $S_{G\times H}$—внутренне устойчивое множество в графе $G\times H$ и $\alpha(G\times H)=|S_{G\times H}|$. Если $A\subseteq B$, $B\subseteq Y$, то обозначим

$$(A\times B)_S=A\times B\cap S_{G\times H}$$

Покажем, что $|(X_0\times Y)_S|\leqslant\alpha(G)\cdot\alpha(H)$.

Из того, что граф $G_i$, порожденный множеством вершин $X_i$ — полный, следует,

$$|(X_i\times Y)_S|\leqslant\alpha(H),\quad i=1, 2,\cdots, \alpha(G),$$

откуда

$$|(X_0\times Y)_S|=|(\bigcup_{i=1}^{\alpha(G)} X_i\times Y)_S|\leqslant\alpha(G)\cdot\alpha(H).$$

Значит, если $\alpha(G\times H)>\alpha(G)\cdot\alpha(H)$, то

$$(g_0\times Y)_S\neq\varnothing$$

Рассмотрим два случая.

1. $g_0h_0\overline{\in} S_{G\times H}$.

Пусть $(g_0\times Y)_S=\{g_0y_1, g_0y_2,\cdots, g_0y_k\}$, где $y_j\in Y_j$, $j=1, 2,\cdots, k$. Покажем, что для любого $y_j$, $j=1, 2,\cdots, k$

$$|(X_0\times Y_j)_S|\leqslant\alpha(G)-2$$

Пусть $X_{i_1}, X_{i_2},\cdots, X_{i_p}$ те множества из $\{X_i/i=1, 2,\cdots, \alpha(G)\}$, что $(X_{i_l}\times Y_j)_S\neq\varnothing$. Докажем, что $p\leqslant\alpha(G)-2$.

Обозначим через $x_l y_l^j=(X_{i_l}\times Y_j)_S$ для $l=1, 2,\cdots, p$. Рассмотрим множество $\{x_1y_1^j, x_2y_2^j,\cdots, x_py_p^j, g_0y_j\}$. Так как оно является подмножеством $S_{G\times H}$ и вершины $y_1^j, y_2^j,\cdots, y_p^j, y_j$ принадлежат множеству $Y_j$, то множество вершин $\{x_1, x_2,\cdots, x_p, g_0\}$ должно быть внутренне устойчивым в графе $G$. В силу единственности внутренне устойчивого множества $S_G$; $p+1<\alpha(G)$, откуда $p\leqslant\alpha(G)-2$, значит $|(X_0\times Y_j)_S|\leqslant\alpha(G)-2$ для $j=1, 2,\cdots, k$. Так как для различных $y_{l_1}$ и $y_{l_2}$, $Y_{l_1}\neq Y_{l_2}$, то получим

$$|(X_0\times Y_j)_S|\leqslant\alpha(G)\cdot\alpha(H)-2k\tag{a}$$

С другой стороны,

$$|(X_0 \times h_0)_S| \leqslant k-1 \tag{b}$$

в силу того, что количество таких множеств $X_i$, $i=1, 2, \cdots, \alpha(G)$, для которых $|(X_i \times Y)_S| \leqslant \alpha(H)-1$ меньше, чем $k-1$. Если бы таких $X_i$ было бы больше, чем $k-1$, то получили бы, что $|(X_0 \times Y)_S| \leqslant$ $\leqslant \alpha(G)\cdot\alpha(H)-k$. При этом, учитывая равенство

$$|(g_0 \times Y)_S| = k \tag{c}$$

получили бы $\alpha(G \times H) = \alpha(G)\cdot\alpha(H)$, вопреки предположению. Из того, что $g_0 h_0 \in S_{G\times H}$, можно написать:

$$S_{G\times H} = (X_0 \times Y_0)_S \cup (X_0 \times h_0)_S \cup (g_0 \times Y_0)_S$$

откуда

$$|S_{G\times H}| = |(X_0 \times Y_0)_S| + |(X_0 \times h_0)_S| + |(g_0 \times Y_0)_S|$$

и на основании (a), (b), (c):

$$\alpha(G \times H) \leqslant \alpha(G)\cdot\alpha(H) - 2k + k - 1 + k < \alpha(G)\cdot\alpha(H)$$

вопреки предположению $\alpha(G \times H) > \alpha(G)\cdot\alpha(H)$.

2. Пусть в $(g_0 \times Y)_S$ $y_k = h_0$.

В этом случае вместо (a)

$$|(X_0 \times Y)_0| \leqslant \alpha(G)\cdot\alpha(H) - 2k + 2 \tag{a'}$$

(рассуждения аналогичны случаю 1 для $k-1$ элементов $y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}$)

Покажем, что

$$|(X_0 \times h_0)_S| \leqslant k-3 \tag{b'}$$

Без ограничения общности можно предположить, что $X_1, X_2, \cdots, X_q$ именно те множества, для которых $(X_i \times h_0)_S \neq \varnothing$, $i=1, 2, \cdots, q$. Надо показать, что $q \leqslant k-3$. Пусть $x_i h_0 = (X_i \times h_0)_S$, $i=1, 2, \cdots, q$ и $x_i h_{S(a)} = (X_i \times h_{S(a)})_S$ $i=k, k+1, \cdots, \alpha(G)$, где $h_{S(a)} \in S_H$ и смежна с вершиной $h_0$. Множество вершин $\{x_1, x_2, \cdots, x_q, x_{k+1}, x_{\alpha(G)}, g_0\}$ внутренне устойчиво в графе $G$, т. к. $h_0$ и $h_{S(a)}$ смежны в графе $H$. Следовательно, в силу единственности $S_G$

$$q + 1 + \alpha(G) - k + 1 < \alpha(G), \text{ откудо } q \leqslant k-3$$

Из (a′), (b′), (c′) получим

$$|S_{G\times H}| \leqslant \alpha(G)\cdot\alpha(H),$$

что противоречит предположению

$$\alpha(G \times H) > \alpha(G)\cdot\alpha(H).$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы и из примера, который показывает, что класс графов, для которых условие теоремы выполнено, не пуст, вытекает $L_2 \subset L^-$. Последнее означает, что теорема, обратная теореме Шеннона, неверна, что иным путем было доказано в работе ([6]).

Ереванский политехнический институт

Ա. Գ. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

## Մի քանի թեորեմներ գրաֆների դեկարտյան արտադրյալի մասին

*Հոդվածում դիտարկվում են ներքին կայունության բազմությունները և ներքին կայունության թիվը՝ տրված երկու գրաֆների դեկարտյան արտադրյալի մեջ։ Հայտնի է Շենոնի թեորեմը, որ եթե $G$ և $H$ գրաֆներից որևէ մեկը ունի պահպանող արտապատկերում, ապա $\alpha(G\times H)=\alpha(G)\cdot\alpha(H)$ (1) Հոդվածում գտնվում է գրաֆների այնպիսի դաս, որը չունի պահպանող արտապատկերում, բայց այդ դասին պատկանող գրաֆների համար տեղի ունի (1) հավասարումը։ Դրանից հետևում է, որ Շենոնի թեորեմի հակառակը ճիշտ չէ։ Գտնված են մի քանի գնահատականներ վերևից $\alpha(G\times H)$-ի համար։ Ապացուցված են պահպանող արտապատկերումների մի քանի հատկություններ։ Մասնավորապես ապացուցված է, որ եթե $G$ և $H$ գրաֆներն ունեն լրիվ սեղմող արտապատկերումներ, ապա նրանց դեկարտյան արտադրյալը նույնպես ունի լրիվ սեղմող արտապատկերում։ Բերված է գրաֆի օրինակ, որը չնայած նրան, որ ունի միակ ներքին բազմություն, բայց չունի լրիվ սեղմող արտապատկերում։*

### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. Берж.* Теория графов и ее применения. ИЛ, М., 1962. [2] *А. Г. Маркосян.* ДАН Арм. ССР, т. LII, № 1 (1971). [3] *C. E. Shannon.* TRE. Trans. № 3, 8 (1956). [4] *О. Оре.* Теория графов. Изд. „Наука", М., 1968. [5] *А. Г. Маркосян.* „Известия АН Арм. ССР", сер. Математика, т. VI, № 5 (1971). [6] *M. Rosenfeld.* Proc. Amer. Math. Soc., 8, № 2 (1967).