ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIV 1972 2

УДК 512.8

МАТЕМАТИКА

Б. М. Едигарян

Алгебра представлений конечной моногенной полугруппы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 2/IX 1971)

Пусть P—конечная моногенная полугруппа, порожденная элементом a определяющим соотношением

$$a^{h+g} = a^h \quad (h > 1, \ g > 1). \tag{1}$$

Степени $a^h, a^{h+1}, \cdots, a^{h+g-1}$, образуют циклическую группу G порядка g. Группа G—это максимальная подгруппа полугруппы P.

Пусть, далее, K—поле, характеристика которого не делит порядок g подгруппы G.

В настоящей заметке перечисляются все неразложимые представления полугруппы P над полем K (их конечное число ([1])) и доказывается, что алгебра представлений полугруппы P над K полупроста.

Алгебра представлений определяется следующим образом. Пусть $E_1, \cdots, E_m$—все попарно неизоморфные неразложимые модули представления. Для тензорного произведения $E_i \times E_j$ (над полем K) мы имеем однозначное разложение в прямую сумму неразложимых модулей

$$E_i \times E_j = \sum_{k=1}^{m} \oplus c_{ijk} E_k \quad (1 \leqslant i, j \leqslant m), \tag{2}$$

где c_{ijk}—неотрицательные целые рациональные числа, обозначающие число прямых слагаемых в разложении, изоморфных модулю E_k. Наличие равенств (2) позволяет ввести в рассмотрение алгебру над полем рациональных чисел с базисом $E_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ и с таблицей умножения

$$E_i \cdot E_j = \sum_{k=1}^{m} c_{ijk} E_k.$$

Так полученная коммутативная алгебра и называется алгеброй представлений полугруппы P над полем K.

Пусть E—произвольный модуль представления. Если в E выбран какой-нибудь базис над полем K, то образующему элементу $a \in P$ в этом базисе будет соответствовать некоторая матрица A (с элементами из K). В силу равенства (1) матрица A удовлетворяет аналогичному соотношению

$$A^{h+g} = A^{h}. \tag{3}$$

Другими словами, минимальный многочлен матрицы A является делителем многочлена

$$f(x) = x^{h}(x^{g} - 1). \tag{4}$$

Обратно, всякая матрица A, удовлетворяющая условию (3), определяет некоторый модуль представления.

При этом два модуля представления изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им матрицы подобны.

Всякая матрица, минимальный многочлен которой является делителем многочлена (4), подобна клеточно-диагональной матрице с диагональными клетками двух типов:

1) клетки Жордана $J_l(0)$ с нулем на главной диагонали порядка $l \leqslant h$;

2) неприводимые над K матрицы A_φ, характеристические многочлены которых совпадают с неприводимыми над K делителями многочлена $x^g - 1$.

Пусть над полем K многочлен $x^g - 1$ имеет следующее разложение на неприводимые множители:

$$x^g - 1 = \varphi_1(x) \cdots \varphi_r(x). \tag{5}$$

При введенных обозначениях мы можем сформулировать следующее утверждение:

Теорема 1. *Для полугруппы P над полем K имеется ровно $h + r$ неразложимых представлений. Матрицами этих представлений являются клетки Жордана $J_l(0)$ $(1 \leqslant l \leqslant h)$ и матрицы A_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ с характеристическими многочленами φ_j из разложения* (5).

Введем для неразложимых модулей представления, полугруппы P новые обозначения. Пусть $E_1, \cdots, E_r$ — модули представления, соответствующие неприводимым многочленам $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ из разложения (5) и $F_1, \cdots, F_h$ — модули представления, соответствующие клеткам Жордана $J_l(0)$ $(1 \leqslant l \leqslant h)$.

Лемма 1. *Для тензорного произведения $E_i \times E_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant h)$ имеет место следующее разложение на неразложимые слагаемые*

$$E_i \times F_j = 2F_1 \oplus \cdots \oplus 2F_{i-1} \oplus (j - i + 1) F_i.$$

Доказательство. Мы применим метод построения канонической формы Жордана для нульстепенного оператора в конечномерном линейном пространстве.

Модулю представления $F_i \times F_j$ соответствует матрица, являющаяся кронекеровским произведением клеток Жордана $J_i(0)$ и $J_j(0)$.

Обозначим ее через B. Легко видеть, что ранг ρ_k матрицы B^k равен $(l-k)(j-k)$ при $0 \leqslant k \leqslant l$ (напомним, что $l \leqslant j$).

Если теперь

$$F_l \times F_j = c_1 F_1 \oplus \cdots \oplus c_l F_l,$$

то ([8])

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \cdots + c_l &= \rho_0 - \rho_1 \\ c_2 + \cdots + c_l &= \rho_1 - \rho_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ c_l &= \rho_{l-1} - \rho_l. \end{aligned}$$

Откуда при $1 \leqslant k \leqslant l-1$ получаем

$$c_k = \rho_{k-1} - 2\rho_k + \rho_{k+1} = (l-k+1)(j-k+1) - \\ - 2(l-k)(j-k) + (l-k+1)(j-k+1) = 2$$

и далее (поскольку $\rho_l = 0$),

$$c_l = \rho_{l-1} = 1(j-l+1),$$

и лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если n_j есть степень многочлена $\varphi_j (1 \leqslant j \leqslant r)$, то*

$$E_j \times F_l \approx n_j F_l.$$

Доказательство. Рассуждаем так же, как и при доказательстве леммы 1. Пусть B—кронекеровское произведение матриц A_j и $J_l(0)$ и пусть ρ_k—ранг матрицы B^k. Тогда

$$\rho_k = (l-k) n_j \quad (0 \leqslant k \leqslant l)$$

и аналогичные выкладки приводят нас к утверждению леммы 2.

Леммы 1 и 2 означают, что линейное подпространство, натянутое на элементы $F_1, \cdots, F_h$, является идеалом в алгебре представлений.

Лемма 3. *Подалгебра в алгебре представлений, порожденная элементами $F_1, \cdots, F_h$, полупроста.*

Доказательство. Рассмотрим в нашей подалгебре новый базис

$$\begin{aligned} e_1 &= F_1 \\ e_2 &= F_2 - 2F_1 \\ e_3 &= F_3 - 2F_2 + F_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ e_h &= F_h - 2F_{h-1} + F_{h-2}. \end{aligned}$$

Пусть $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant h$. Легко проверяется, что

$$(F_j - F_{j-1}) \cdot (F_i - F_{i-1}) = F_i - F_{i-1}$$

(мы считаем, что $F_0 = 0$). Пользуясь этим равенством, устанавливаем теперь, что элементы $e_1, \cdots, e_h$ (также образующие базис подалгебры) составляют попарно ортогональные идемпотенты. Это и доказывает лемму 3.

Лемма 4. *Линейное подпространство в алгебре представлений натянутое на элементы $E_1, \cdots, E_r$, является подалгеброй, и эта подалгебра полупроста.*

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из того факта, что кронекеровское произведение двух неособенных матриц есть неособенная матрица. Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что $E_1, \cdots, E_r$ являются неприводимыми модулями представления циклической подгруппы G (порядка g), и следовательно, порожденная ими подалгебра изоморфна алгебре представлений группы G.

Из лемм 3 и 4 вытекает следующий результат:

Теорема 2. *Алгебра представлений конечной моногенной полугруппы P над полем, характеристика которого не делит порядок максимальной подгруппы $G \subset P$, полупроста.*

Замечание 1. Размерность над K модуля E_i равна степени n_i многочлена φ_i. Вместо элементов E_i в алгебре представлений рассмотрим элементы $\overline{E_i} = E_i - n_i e$, где $e = e_1 + \cdots + e_h$. Соответствие $E_i \to \overline{E_i}$ порождает изоморфизм подалгебры $\{E_1, \cdots, E_r\}$ на подалгебру $\{\overline{E}_1, \cdots, \overline{E}_r\}$. При этом вся алгебра представлений взаимно аннулируется прямой суммой подалгебр $\{e_1, \cdots, e_h\} \oplus \{\overline{E}_1, \cdots, \overline{E}_r\}$.

Замечание 2. В полугрупповом кольце $K[P]$ рассмотрим элемент

$$c = a - a^u,$$

где u—число из ряда $h, h+1, \cdots, h+g-1$, которое $\equiv 1 \pmod g$. Легко видеть, что

$$c^i = a^i - a^{u+i-1} \quad (1 \leqslant i \leqslant h),$$

в частности, $c^h = 0$. Кольцо $K[P]$ распадается, следовательно в прямую сумму

$$K[P] = \{c, c^2, \cdots, c^{h-1}\} \oplus K[G].$$

Мы видим, таким образом, что в полугрупповом кольце $K[P]$ реализуются все неразложимые модули представления, кроме модуля, соответствующего клетке Жордана $J_h(0)$ максимального порядка h.

Ереванский государственный
университет

Բ. Մ. ԾԻԳԱՐՅԱՆ

Վերջավոր մոնոգեն կիսախմբի ներկայացման հանրահաշիվը

Դիցուք P-ն վերջավոր մոնոգեն կիսախումբ է, ծնված էլեմենտով a

$$a^{h+g} = a^h \quad (h \geqslant 1,\ g \geqslant 1)$$

որոշիչ առնչությամբ։

Հետևյալ $a^h, a^{h+1}, \cdots, a^{h+g-1}$ *էլեմենտները կազմում են* g *կարգի ցիկլիկ* G *խումբ։ Այդ խումբը* P *կիսախմբի մաքսիմալ ենթախումբն է։*

Դիցուք K-ն դաշտն է, որի բնութագրիչը չի բաժանում G ենթախմբի կարգը։

Ներկա աշխատանքում թվարկվում է P կիսախմբի բոլոր չվերլուծվող ներկայացումները K դաշտի նկատմամբ (նրանց քանակը վերջավոր է ([1])) և ապացուցվում է, որ K դաշտի նկատմամբ P կիսախմբի ներկայացման հանրահաշիվը կիսապարզ է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. С. Понизовский*, Сибирский математический журнал, т. XI, № 5 (1970). [2] *Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева*, Вычислительные методы линейной алгебры, М.—Л., 1963.